

2

Παράγωγοι

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο Κεφάλαιο 1 ορίσαμε την κλίση καμπύλης σε ένα σημείο της ως το όριο των κλίσεων μιας ακολουθίας τεμνουσών. Το όριο αυτό, που καλείται παράγωγος και μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής μιας συναρτήσεως, είναι μια από τις σπουδαιότερες έννοιες του απειροστικού λογισμού. Οι παράγωγοι χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πληθώρα επιστημονικών πεδίων, όπως στις επιστήμες μηχανικού, στις θετικές επιστήμες, στα οικονομικά, στην ιατρική και στην επιστήμη των υπολογιστών, όπου βρίσκουν εφαρμογή (μεταξύ άλλων) σε υπολογισμούς ταχύτητας και επιτάχυνσης, στην κατανόηση της λειτουργίας μηχανών, στην εκτίμηση της πτώσης της στάθμης του νερού που αντλείται από μια δεξαμενή, καθώς και στην πρόβλεψη των συνεπειών από σφάλματα μέτρησης. Η εύρεση παραγώγων από υπολογισμό ορίων μπορεί να καταστεί επίπονη και χρονοβόρος διαδικασία. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε εναλλακτικές και πιο χρηστικές τεχνικές υπολογισμού των παραγώγων.

2.1

Η παράγωγος ως συνάρτηση

CD-ROM

Δικτυότοπος

Ιστορικά στοιχεία

Παράγωγος

Ορισμός παραγώγου • Συμβολισμός • Παράγωγοι σταθεράς, δύναμης, πολλαπλασίου και αθροίσματος • Παραγωγισιμότητα σε διάστημα • Πλευρικές παράγωγοι • Σχεδίαση της f' από πίνακα τιμών • Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι συνεχείς • Ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους • Παράγωγοι υψηλότερων τάξεων

Προς το τέλος του Κεφαλαίου 1, ορίσαμε την κλίση καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $x = x_0$ ως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ονομάσαμε το όριο αυτό, όταν υπήρχε, παράγωγο της f στο x_0 . Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την παράγωγο ως *συνάρτηση* που προκύπτει από την f θεωρώντας το παραπάνω όριο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f .

Ορισμός παραγώγου

CD-ROM
Δικτυότοπος

Ορισμός Παράγωγος συνάρτηση

Η *παράγωγος* της συναρτήσεως $f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Υπολογισμός της $f'(x)$ από τον ορισμό της παραγώγου

Βήμα 1. Εκφράζουμε τα $f(x)$
και $f(x+h)$.

Βήμα 2. Αναπτύσσουμε και
απλοποιούμε το
πηλίκιο διαφορών
 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Βήμα 3. Από το
απλοποιημένο
πηλίκιο, βρίσκουμε
την $f'(x)$ ως το όριο
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το παραπάνω όριο υπάρχει. Έτσι το πεδίο ορισμού της παραγώγου μπορεί να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της f ή να είναι μικρότερο. Αν υπάρχει η f' για κάποιο x , λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη** ή **παραγωγίσιμη** (έχει παράγωγο) στο x . Αν η f' υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f , λέμε απλώς ότι η f είναι **διαφορίσιμη** ή **παραγωγίσιμη**.

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή του ορισμού

(α) Να βρεθεί η παράγωγος της $y = \sqrt{x}$ για $x > 0$.

(β) Να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ για $x = 4$.

Λύση

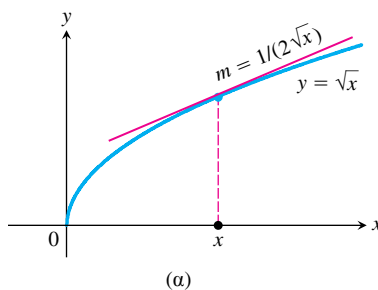
(α)

Βήμα 1: $f(x) = \sqrt{x}$ και $f(x+h) = \sqrt{x+h}$

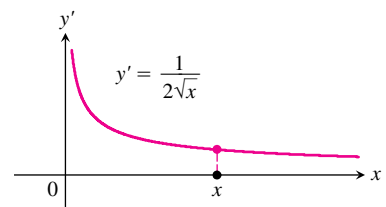
$$\begin{aligned} \text{Βήμα 2: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \quad \text{Πολλαπλασιασμός με } (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})/(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}). \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Βήμα 3: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

CD-ROM
Διακτύωσις



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 2.1 Γραφικές παραστάσεις των (α) $y = \sqrt{x}$ και (β) $y' = 1/(2\sqrt{x})$, $x > 0$. Στο $x = 0$ η συνάρτηση ορίζεται, η παράγωγος όμως όχι. (Παράδειγμα 1)

Δείτε το Σχήμα 2.1.

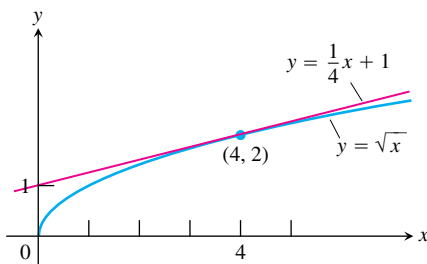
(β) Η κλίση της καμπύλης για $x = 4$ ισούται με

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Η εφαπτομένη είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$ με κλίση $1/4$ (Σχήμα 2.2).

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$



ΣΧΗΜΑ 2.2 Η καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $(4, 2)$. Η κλίση της εφαπτομένης δίδεται από την τιμή της y' για $x = 4$. (Παράδειγμα 1)

Συμβολισμός

Υπάρχουν πολλοί τρόποι συμβολισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Πέραν του $f'(x)$, οι συνηθέστεροι εξ αυτών είναι:

Ο τονικός συμβολισμός οφείλεται στον Νεύτωνα, ενώ ο συμβολισμός d/dx στον Leibniz.

y'	« y τόνος»	Κομψός και σύντομος, αλλά δεν κατονομάζει την ανεξάρτητη μεταβλητή
$\frac{dy}{dx}$	« $dy dx$ »	Κατονομάζει τις μεταβλητές και χρησιμοποιεί το σύμβολο d για την παράγωγο
$\frac{df}{dx}$	« $df dx$ »	Δίνει έμφαση στο όνομα της συναρτήσεως
$\frac{d}{dx} f(x)$	« ddx της $f(x)$ »	Δίνει έμφαση στο ότι η παραγωγή είναι μια μαθηματική πράξη που εκτελείται επί της f (Σχήμα 2.3)

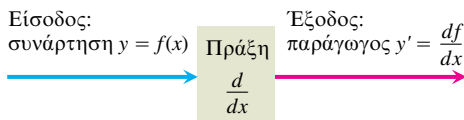
Επίσης, ο συμβολισμός dy/dx διαβάζεται και ως «παράγωγος του y ως προς x », ενώ οι df/dx και $(d/dx)f(x)$ ως «παράγωγος της f ως προς x ».

Η τιμή

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

της παραγώγου της $y = f(x)$ ως προς x για $x = a$ μπορεί, τέλος, να γραφεί ως

$$y'|_{x=a} \text{ ή } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \text{ ή } \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}.$$



ΣΧΗΜΑ 2.3 Διάγραμμα ροής που περιγράφει τη λειτουργία της παραγώγισης ως προς x .

Το σύμβολο $|_{x=a}$, που λέγεται **σύμβολο αποτίμησης**, μας λέει να αποτιμήσουμε (υπολογίσουμε) την έκφραση στα αριστερά του, για $x = a$.

Η διαδικασία υπολογισμού μιας παραγώγου λέγεται **διαφόριση** ή **παραγώγιση**. Στο Παράδειγμα 1 υπολογίσαμε την παράγωγο της $y = \sqrt{x}$ βάσει του ορισμού. Τώρα όμως θα δούμε τρόπους παραγωγίσεως που παρακάμπτουν τη ρητή επίκληση του ορισμού κάθε φορά.

Παράγωγος σταθεράς, δύναμης, πολλαπλασίου και αθροίσματος

Ο πρώτος κανόνας λέει ότι η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι η μηδενική συνάρτηση.

Κανόνας 1 Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Αν η f έχει τη σταθερή τιμή $f(x) = c$, τότε

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 1

Αν η f έχει τη σταθερή τιμή $f(x) = 8$, τότε

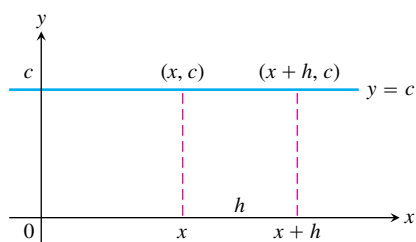
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0.$$

Ομοίως,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{3}) = 0.$$

Απόδειξη του Κανόνα 1 Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου στη συνάρτηση σταθερής τιμής $f(x) = c$ (Σχήμα 2.4). Για κάθε x , βρίσκουμε ότι

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$



ΣΧΗΜΑ 2.4 Ο κανόνας $(d/dx)(c) = 0$ μας λέει με άλλα λόγια ότι μια σταθερή συνάρτηση δεν μεταβάλλει τις τιμές της και ότι η κλίση μιας οριζόντιας ευθείας μηδενίζεται παντού.

CD-ROM**Δικτυότοπος****Βιογραφικά στοιχεία**

Richard Courant
(1888-1972)

Ο δεύτερος κανόνας μάς λέει πώς να παραγωγίσουμε το x^n για n θετικό ακέραιο.

Κανόνας 2 Παράγωγος θετικής ακέραιας δύναμης

Αν n θετικός ακέραιος, τότε

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Πρακτικά, ο Κανόνας 2 μας λέει να μειώσουμε τον αρχικό εκθέτη (n) κατά μία μονάδα και να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με n .

Παράδειγμα 3 Ερμηνεία του Κανόνα 2

f	x	x^2	x^3	x^4	...
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	...

Απόδειξη του Κανόνα 2 Αν $f(x) = x^n$, τότε $f(x+h) = (x+h)^n$. Εφόσον ο n είναι θετικός ακέραιος, κάνουμε χρήση της ταυτότητας

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

προκειμένου να απλοποιήσουμε το πηλίκο διαφορών της f . Θέτοντας $x+h = a$ και $x = b$, έχουμε $a-b = h$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \underbrace{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}}_{n \text{ όροι, καθένας με όριο } x^{n-1} \text{ καθώς } h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

Ο τρίτος κανόνας λέει πως όταν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά, η παράγωγος του γινομένου ισούται με το γινόμενο της παραγώγου της συναρτήσεως επί τη σταθερά αυτή.

Κανόνας 3 Παράγωγος σταθερού πολλαπλασίου

Αν η u είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x , και c είναι μια σταθερά, τότε

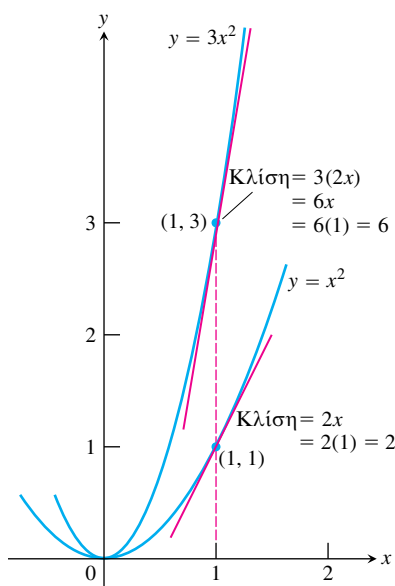
$$\frac{d}{dx} (cu) = c \frac{du}{dx}.$$

Παράδειγμα 4 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 3

(α) $\frac{d}{dx} (3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$

Ερμηνεία: Αν αλλάξουμε την κλίμακα του γραφήματος της $y = x^2$ πολλαπλασιάζοντας κάθε y με το 3, η κλίση σε κάθε σημείο της καμπύλης θα πολλαπλασιαστεί επίσης με το 3 (Σχήμα 2.5).

(β) *Μια χρήσιμη ειδική περίπτωση:* Η παράγωγος της αντιθέτου μιας



ΣΧΗΜΑ 2.5 Γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = 3x^2$. Αν τριπλασιάσουμε μια συνάρτηση τριπλασιάζεται και η κλίση της. (Παράδειγμα 3)

Συμβολίζοντας με u και v τις συναρτήσεις στους κανόνες παραγωγίσης

Συνηθίζεται να συμβολίζουμε τις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν στο εκάστοτε πρόβλημα με τα γράμματα f , g κ.λπ. Υπάρχει λοιπόν κίνδυνος σύγχυσης, εάν στους κανόνες παραγωγίσης χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα. Γι' αυτό συμβολίζουμε με u και v τις συναρτήσεις στους κανόνες αυτούς, ελπίζοντας ότι τα συγκεκριμένα σύμβολα δεν θα εμφανίζονται πουθενά αλλού.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Colin Maclaurin
(1698-1746)

παραγωγίσιμης συνάρτησης ισούται με την αντίθετη της παραγώγου της συνάρτησης. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα 3 για $c = -1$, παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$

Απόδειξη του Κανόνα 3

$$\frac{d}{dx} cu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \quad \text{Ορισμός παραγώγου με } f(x) = cu(x)$$

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{Ιδιότητα ορίου}$$

$$= c \frac{du}{dx} \quad \text{Η } u \text{ είναι παραγωγίσιμη.}$$

Ο επόμενος κανόνας λέει ότι η παράγωγος του αθροίσματος δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων τους.

Κανόνας 4 Παράγωγος αθροίσματος

Αν u και v είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x , τότε το άθροισμα $u + v$ είναι παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο όπου αμφότερες οι u και v είναι παραγωγίσιμες. Στα σημεία αυτά,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Παράδειγμα 5 Παράγωγος αθροίσματος

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) \\ &= 4x^3 + 12 \end{aligned}$$

Απόδειξη του Κανόνα 4 Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου στην $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τους κανόνες παραγωγίσης αθροίσματος και σταθερού πολλαπλασίου παίρνουμε τον **κανόνα παραγωγίσης διαφοράς**, ο οποίος λέει ότι η παράγωγος της διαφοράς παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των παραγώγων τους.

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1) \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Ο κανόνας παραγωγίσης αθροίσματος μπορεί βεβαίως να επεκταθεί και σε περισσότερες από δύο συναρτήσεις, αρκεί το άθροισμα να περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος όρων. Αν οι $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι παραγωγίσιμες στο x , τότε και η $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ είναι παραγωγίσιμη, και

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

Παράδειγμα 6 Παράγωγος πολυωνύμου

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2x - 5 + 0 \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5 \end{aligned}$$

Κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμο.

Σημειώστε ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να παραγωγιστεί, όρο προς όρο, όπως κάναμε στο Παράδειγμα 6.

Παράδειγμα 7 Εύρεση οριζόντιων εφαπτομένων

Έχει οριζόντιες εφαπτομένες η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$; Αν ναι, σε ποια σημεία της;

Λύση Οι οριζόντιες εφαπτομένες, αν υπάρχουν, προκύπτουν στα σημεία μηδενισμού της κλίσεως dy/dx , τα οποία και βρίσκουμε ακολουθώντας τα εξής βήματα.

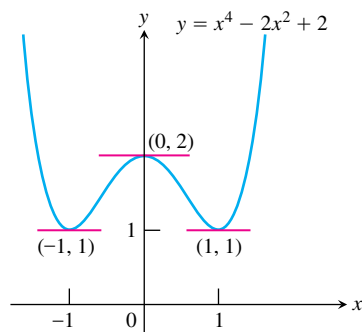
1. Υπολογίζουμε την κλίση dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

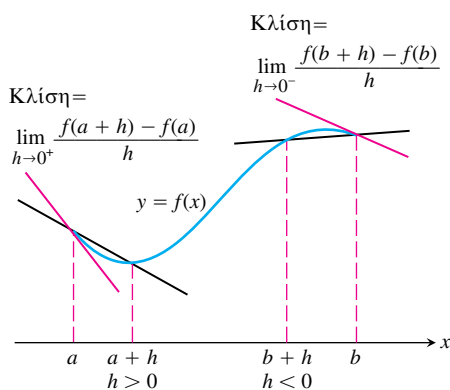
2. Λύνουμε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 0$ ως προς x :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1. \end{aligned}$$

Η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ έχει οριζόντιες εφαπτομένες για $x = 0, 1$ και -1 . Τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης είναι τα $(0, 2)$, $(1, 1)$ και $(-1, 1)$. Δείτε το Σχήμα 2.6.



ΣΧΗΜΑ 2.6 Η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ και οι οριζόντιες εφαπτομένες της. (Παράδειγμα 7)



ΣΧΗΜΑ 2.7 Οι παράγωγοι σε άκρα διαστήματος είναι πλευρικά όρια.

Παραγωγισιμότητα σε διάστημα· πλευρικές παράγωγοι

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα ανοιχτό διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο) αν υπάρχει η παράγωγός της σε κάθε σημείο του διαστήματος. Είναι δε παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ αν είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) και αν τα πλευρικά όρια στα άκρα του διαστήματος

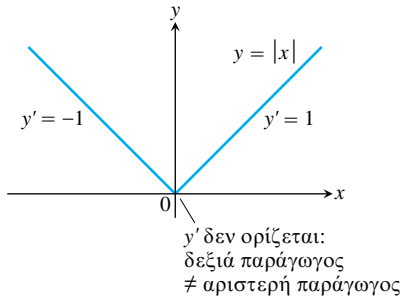
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Δεξιά παράγωγος στο } a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad \text{Αριστερή παράγωγος στο } b$$

υπάρχουν (Σχήμα 2.7).

Μπορούμε να ορίσουμε δεξιές και αριστερές παραγώγους σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως. Η συνήθης σχέση με-

ταξύ πλευρικών και αμφίπλευρων ορίων ισχύει και για τις παραγώγους αυτές. Βάσει του Θεωρήματος 5 της Ενότητας 1.2, μια συνάρτηση θα έχει παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο εν λόγω σημείο και είναι ίσες μεταξύ τους.



ΣΧΗΜΑ 2.8 Η συνάρτηση $y = |x|$ δεν παραγωγίζεται στην αρχή των αξόνων όπου το γράφημά της έχει γωνιώδη συμπεριφορά.

Παράδειγμα 8 Η συνάρτηση $y = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στην αρχή των αξόνων

Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$, αλλά δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = 0$.

Λύση Στα δεξιά της αρχής,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1. \quad \begin{array}{l} \frac{d}{dx}(mx+b) = m, \\ |x| = x \end{array}$$

Στα αριστερά της αρχής,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \quad |x| = -x$$

(Σχήμα 2.8). Δεν υπάρχει λοιπόν παράγωγος στην αρχή των αξόνων εφόσον οι εκεί πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες:

$$\begin{aligned} \text{Δεξιά παράγωγος του } |x| \text{ στο μηδέν} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \quad |h| = h \text{ όταν } h > 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \text{Αριστερή παράγωγος του } |x| \text{ στο μηδέν} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \quad |h| = -h \text{ όταν } h < 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1. \end{aligned}$$

Εν γένει, στα σημεία όπου η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f έχει γωνιώδη χαρακτήρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης, και η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Κατά συνέπεια, η παραγωγισιμότητα αποτελεί κριτήριο (ένδειξη) «ομαλότητας (λειότητας)» της γραφικής παραστάσεως.

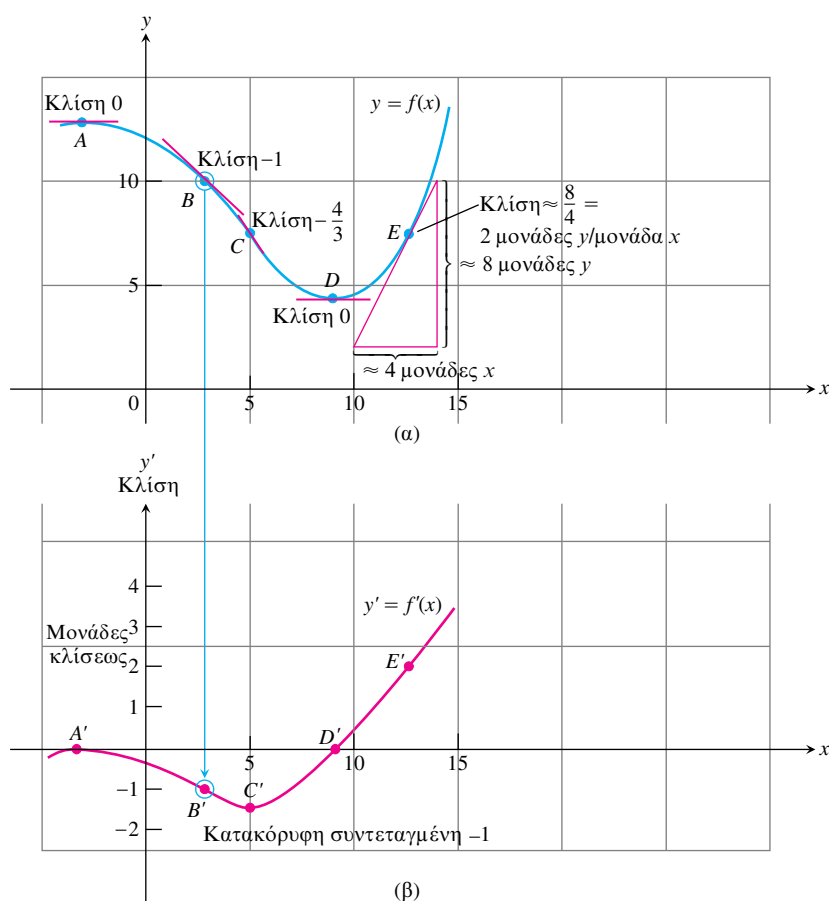
Σχεδίαση της f' από πίνακα τιμών

Όταν τοποθετούμε σε διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στις πειραματικές μετρήσεις των τιμών μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ (π.χ. πίεση έναντι θερμοκρασίας, πληθυσμός έναντι χρόνου, κ.λπ.), συνήθίζεται να συνδέουμε καταλλήλως τα σημεία (με ευθείες ή καμπύλες γραμμές) προκειμένου να πάρουμε το πλήρες γράφημα της f . Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει πώς γίνεται αυτή η διαδικασία και τι μπορεί να μας διδάξει.

Παράδειγμα 9 Σχεδίαση παραγώγου

Να παρασταθεί γραφικά η παράγωγος της συναρτήσεως $y = f(x)$ που φαίνεται στο Σχήμα 2.9α.

Λύση Σχεδιάζουμε πρώτα τους άξονες, βαθμονομώντας τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα σε μονάδες x και y' αντίστοιχα (Σχή-



ΣΧΗΜΑ 2.9 Για να σχεδιάσουμε το γράφημα της $y' = f'(x)$ στο (β) υπολογίσαμε τις κλίσεις της καμπύλης $y = f(x)$ στο (α). Η κατακόρυφη συντεταγμένη του σημείου B' είναι η κλίση στο B κ.ο.κ. Το γράφημα της $y' = f'(x)$ μας πληροφορεί για το πώς μεταβάλλεται η κλίση της f συναρτήσεως του x .

μα 2.9β). Κατόπιν φέρνουμε τις εφαπτομένες στο γράφημα της f ανά τακτά διαστήματα, και από τις κλίσεις τους υπολογίζουμε κατά προσέγγιση τις τιμές της $y' = f'(x)$ στα σημεία επαφής. Τοποθετούμε σε νέο σχήμα τα σημεία με συντεταγμένες (x, y') και τα ενώνουμε με μια ομαλή (λεία) καμπύλη.

Από τη γραφική παράσταση της $y' = f'(x)$ διακρίνουμε αμέσως:

1. τα σημεία όπου ο ρυθμός μεταβολής της f είναι θετικός, αρνητικός, ή μηδέν
2. το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της f για κάθε x και μάλιστα σε σύγκριση με το μέγεθος της $f(x)$
3. τα σημεία όπου ο ίδιος ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται ή μειώνεται.

Στις Ασκήσεις 15-20 μπορείτε να «πειραματιστείτε» περαιτέρω με τις έννοιες αυτές.

Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι συνεχείς

Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο όπου υπάρχει η παράγωγός της.

ΠΡΟΣΟΧΗ Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1 είναι ψευδές. Μια συνάρτηση δεν οφείλει να έχει παράγωγο σε σημείο όπου είναι συνεχής, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 8.

Θεώρημα 1 Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται και συνέχεια

Αν η f έχει παράγωγο στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = c$.

Απόδειξη Δεδομένου ότι υπάρχει η $f'(c)$, πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ή, ισοδύναμα, ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = f(c)$. Εάν $h \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h. \end{aligned}$$

Τώρα παίρνουμε το όριο καθώς $h \rightarrow 0$. Βάσει του Θεωρήματος 1 της Ενότητας 1.2,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c). \end{aligned}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι αν η f έχει πλευρική παράγωγο (από δεξιά ή από αριστερά) στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής από την αντίστοιχη πλευρά στο $x = c$.

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει άλλος ένας λόγος για τον οποίο μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει παράγωγο. Αν η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια σε ένα της σημείο (π.χ. ασυνέχεια άλματος), τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Η συνάρτηση ακέραιας τιμής $y = \text{int } x$ δεν έχει παράγωγο για κάθε $x = n$ (Παρ. 4, Ενότητα 1.4).

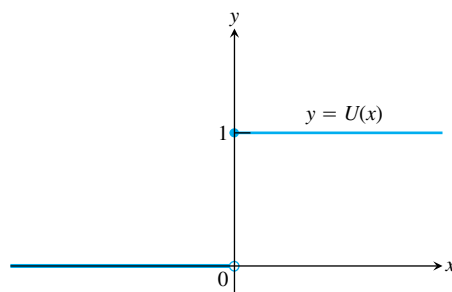
Ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι δεν μπορεί κάθε συνάρτηση να είναι η παράγωγος κάποιας άλλης.

Θεώρημα 2 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Αν a και b είναι δύο τυχαία σημεία σε διάστημα όπου η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$.

Το Θεώρημα 2 (που παραθέσαμε εδώ χωρίς απόδειξη) λέει ότι μια τυχούσα συνάρτηση δεν μπορεί να είναι παράγωγος μιας άλλης σε κάποιο διάστημα παρά μόνο αν παρουσιάζει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα αυτό (Σχήμα 2.10). Το πότε μια συνάρτηση είναι παράγωγος αποτελεί για τον απειροστικό λογισμό ένα θεμελιώδες ερώτημα, και οι απαντήσεις που έδωσαν σε αυτό οι Νεύτων και Leibniz άλλαξαν για πάντα τον κόσμο των μαθηματικών. Στο Κεφάλαιο 4 θα αναλύσουμε το θέμα περισσότερο.



ΣΧΗΜΑ 2.10 Η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας δεν έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και συνεπώς δεν μπορεί να αποτελεί την παράγωγο καμιάς συναρτήσεως πραγματικών αριθμών.

Σημειώστε ότι ο συμβολισμός

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

δεν υπονοεί πολλαπλασιασμό. Συμβολίζει μονάχα «την παράγωγο της παραγώγου».

Παράγωγοι υψηλότερων τάξεων

Η παράγωγος $y' = dy/dx$ είναι η **πρώτη (πρώτης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x . Η ίδια η παράγωγος ενδέχεται να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x : αν ναι, τότε η παράγωγός της

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

καλείται η **δεύτερη (δεύτερης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x .

Αν η y'' είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγός της, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ είναι η **τρίτη (τρίτης τάξης) παράγωγος** της y ως προς x . Ομοίως, η

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$$

είναι η **n -οστή (n -οστής τάξης) παράγωγος** της y ως προς x , όπου n θετικός ακέραιος.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη δεύτερη παράγωγο ως τον ρυθμό μεταβολής της κλίσεως της εφαπτομένης στην καμπύλη $y = f(x)$ σε κάθε της σημείο. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η δεύτερη παράγωγος μας πληροφορεί για το αν η καμπύλη κάμπτεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε σχέση με την εφαπτομένη, καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο επαφής. Στην επόμενη ενότητα, θα ερμηνεύσουμε τόσο τη δεύτερη όσο και την τρίτη παράγωγο σε σχέση με την ευθύγραμμη κίνηση.

Πώς διαβάζονται τα σύμβολα των παραγώγων

y'	« y τόνος»
y''	« y δίστονον»
$\frac{d^2y}{dx^2}$	« d τετράγωνο y διά dx τετράγωνο»
y'''	« y τρίστονον»
$y^{(n)}$	« n ιοστή παράγωγος του y »
$\frac{d^ny}{dx^n}$	« d εις την n του y διά dx εις την n »

Παράδειγμα 10 Εύρεση n -οστών παραγώγων

Οι πρώτες τέσσερις παράγωγοι της $y = x^3 - 3x^2 + 2$ είναι:

$$\text{Πρώτη παράγωγος: } y' = 3x^2 - 6x$$

$$\text{Δεύτερη παράγωγος: } y'' = 6x - 6$$

$$\text{Τρίτη παράγωγος: } y''' = 6$$

$$\text{Τέταρτη παράγωγος: } y^{(4)} = 0.$$

Η συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξης. Οι παράγωγοι πέμπτης τάξης και εφεξής είναι όλες μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1



Εύρεση παραγώγων και υπολογισμός των τιμών τους

Στις Ασκήσεις 1-6, χρησιμοποιήστε τον ορισμό προκειμένου να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως. Κατόπιν υπολογίστε την τιμή της παραγώγου στα αναφερόμενα σημεία.

1. $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3)$, $f'(0)$

2. $g(t) = 1/t^2$, $g'(-1)$, $g'(2)$

3. $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=-1}$, αν $s = t^3 - t^2$

4. $f(x) = x + \frac{9}{x}$, $x = -3$

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$, $\theta = 0,25$

6. $\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$, αν $r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

Υπολογισμός παραγώγων

Στις Ασκήσεις 7-10, να βρεθούν οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι.

7. $y = x^2 + x + 8$

8. $s = 5t^3 - 3t^5$

9. $y = \frac{4x^3}{3} - 4$

10. $y = \frac{x^3 + 7}{x}$

Να βρεθούν οι παράγωγοι όλων των τάξεων στις Ασκήσεις 11 και 12.

11. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

12. $y = \frac{x^5}{120}$

Κλίσεις και εφαπτομένες

13. (α) Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^3 - 4x + 1$ στο σημείο $(2, 1)$.

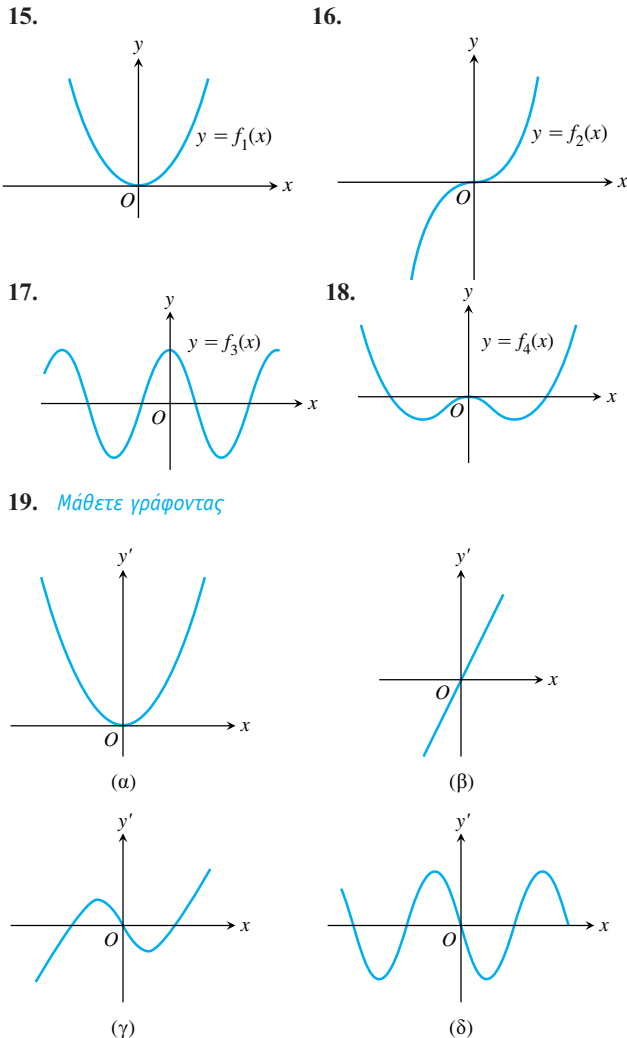
(β) Τι εύρος τιμών παρουσιάζει η κλίση της καμπύλης;

(γ) Βρείτε εξισώσεις για τις εφαπτομένες της καμπύλης στα σημεία όπου η κλίση ισούται με 8.

14. (α) Βρείτε μια εξίσωση για την οριζόντια εφαπτομένη της καμπύλης $y = x - 3\sqrt{x}$.
 (β) Τι εύρος τιμών παρουσιάζει η κλίση της καμπύλης;

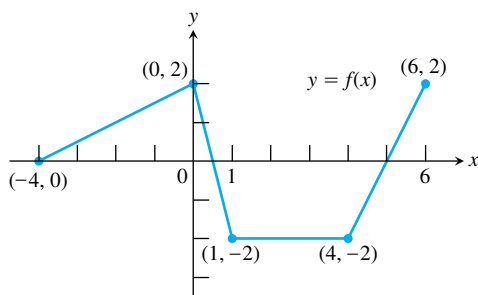
Γραφικές παραστάσεις

Αντιστοιχίστε τα γραφήματα των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 15-18 με τα γραφήματα των παραγώγων τους στο Σχήμα 2.11.



ΣΧΗΜΑ 2.11 Οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων για τις Ασκήσεις 15-18.

- (α) Η γραφική παράσταση του Σχήματος 2.12 αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους. Σε ποια σημεία του διαστήματος $[-4, 6]$ δεν ορίζεται η f' ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



ΣΧΗΜΑ 2.12 Γραφική παράσταση για την Άσκηση 19.

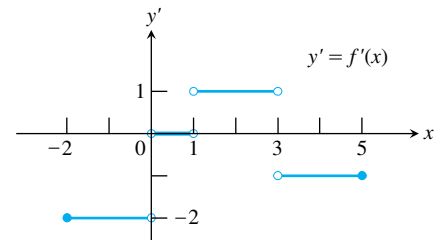
- (β) Παραστήστε γραφικά την f . Τον κατακόρυφο άξονα ονομάστε τον άξονα y' . Το γράφημά σας θα πρέπει να είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση.

Εύρεση συναρτήσεως μέσω της παραγώγου της

20. (α) Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες πληροφορίες, σχεδιάστε τη συνάρτηση f επί του κλειστού διαστήματος $[-2, 5]$.
- i. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους.
 - ii. Η γραφική παράσταση αρχίζει από το σημείο $(-2, 3)$.
 - iii. Παράγωγος της f είναι η κλιμακωτή συνάρτηση του Σχήματος 2.13.
- (β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για την περίπτωση στην οποία το γράφημα αρχίζει από το σημείο $(-2, 0)$ αντί του $(-2, 3)$.

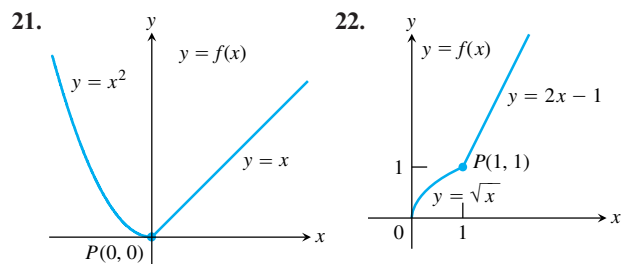
Πλευρικές παράγωγοι

Συγκρίνετε τις αριστερές και δεξιές παραγώγους, δείχνον-



τας έτσι ότι οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 21 και 22 δεν **ΣΧΗΜΑ 2.13** Γραφική παράσταση της παραγώγου για την Άσκηση 20.

είναι παραγωγίσιμες στο σημείο P .

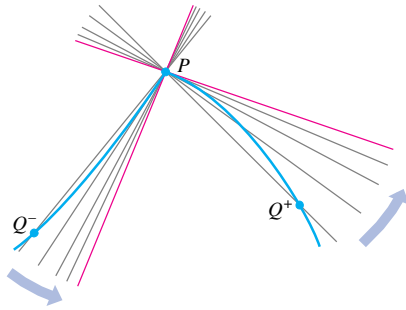


Πότε μια συνάρτηση δεν έχει παράγωγο σε ένα σημείο;

Μια συνάρτηση έχει παράγωγο σε σημείο x_0 αν οι κλίσεις των τεμνουσών ευθειών που διέρχονται από το $P(x_0, f(x_0))$ και από ένα γειτονικό σημείο Q του γραφήματος τείνουν σε κάποιο όριο καθώς το Q πλησιάζει στο P . Όταν οι κλίσεις δεν παίρνουν μία μοναδική οριακή θέση ή γίνονται κατακόρυφες καθώς το Q πλησιάζει στο P , η παράγωγος δεν υπάρχει. Μια συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι κατά τα άλλα λείο, δεν θα έχει παράγωγο σε σημείο όπου το γράφημα παρουσιάζει ένα από τα παρακάτω:

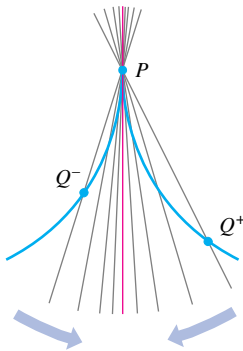
- (i) ένα **γωνιακό σημείο**, όπου οι πλευρικές παράγωγοι διαφέρουν μεταξύ τους
- (ii) ένα **σημείο ανάκαμψης**, όπου η κλίση της τέμνουσας

PQ τείνει στο ∞ από τη μία πλευρά και στο $-\infty$ από την άλλη

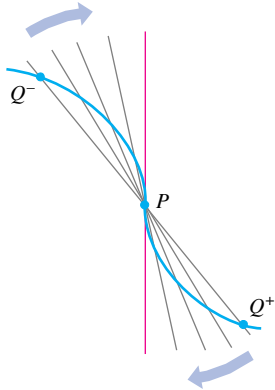


(iii) μια κατακόρυφη εφαπτομένη, όπου η κλίση του PQ τείνει αμφιπλεύρως είτε στο ∞ είτε στο $-\infty$ (εδώ, $-\infty$)

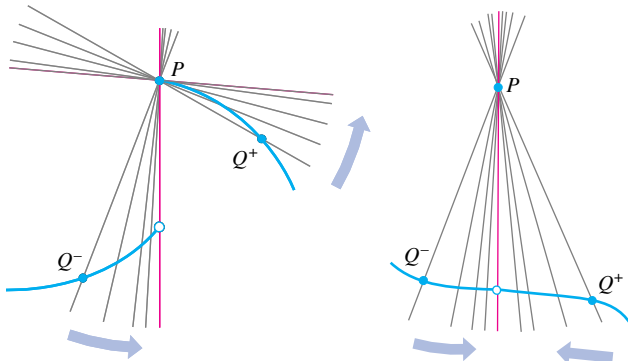
(iv) μια ασυνέχεια.



Κάθε σχήμα στις Ασκήσεις 23–26 δείχνει τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως σε ένα κλειστό διάστημα D . Σε



ποια σημεία του πεδίου ορισμού της πιστεύετε ότι η συνάρ-



τηση είναι

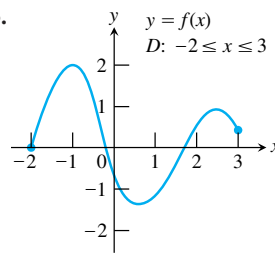
(α) παραγωγίσιμη;

(β) συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη;

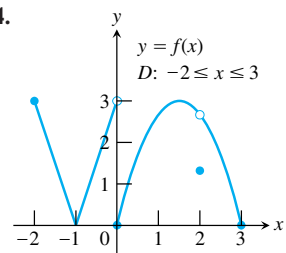
(γ) ούτε συνεχής ούτε παραγωγίσιμη;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

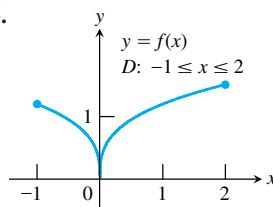
23.



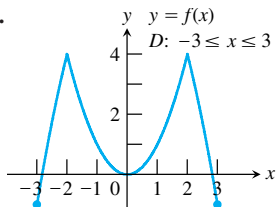
24.



25.



26.



Ερμηνεία παραγώγων

Στις Ασκήσεις 27–30,

(α) Βρείτε την παράγωγο $y' = f'(x)$ της συναρτήσεως $y = f(x)$ που δίδεται.

(β) Σχεδιάστε τις $y = f(x)$ και $y' = f'(x)$ τη μία δίπλα στην άλλη, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς άξονες συντεταγμένων και απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις.

(γ) Για ποιες τιμές του x , αν υπάρχουν, είναι η y' θετική, μηδέν, ή αρνητική;

(δ) Σε ποια διαστήματα τιμών του x , αν υπάρχουν, είναι η $y = f(x)$ αύξουσα, και σε ποια φθίνουσα; Πώς σχετίζεται η απάντησή σας στο παρόν ερώτημα με την απάντησή σας στο ερώτημα (γ); (Περισσότερα για τη σχέση αυτή, στο Κεφάλαιο 3.)

27. $y = -x^2$

28. $y = -1/x$

29. $y = x^3/3$

30. $y = x^4/4$

31. *Μάθετε γράφοντας* Έχει ποτέ αρνητική κλίση η καμπύλη $y = x^3$; Αν ναι, πού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

32. *Μάθετε γράφοντας* Έχει οριζόντιες εφαπτομένες η καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$; Αν ναι, πού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θεωρία και παραδείγματα

33. *Εφαπτομένη παραβολής* Έχει εφαπτομένη με κλίση -1 η παραβολή $y = 2x^2 - 13x + 5$; Αν ναι, βρείτε το σημείο επαφής και γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη. Αν όχι, γιατί όχι;

34. *Εφαπτομένη της $y = \sqrt{x}$* Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ που να τέμνει τον άξονα x στο $x = -1$; Αν ναι, βρείτε το σημείο επαφής και γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη. Αν όχι, γιατί όχι;

35. *Ακέραια τιμή του x* Υπάρχει συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \infty)$ της οποίας παράγωγος να είναι η $y = \ln x$, η ακέραια τιμή του x (δείτε το Σχήμα 1.49); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

36. **Παράγωγος της $y = |x|$** Σχεδιάστε την παράγωγο της $f(x) = |x|$. Κατόπιν σχεδιάστε την $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. Τι συμπεραίνετε;

37. **Παράγωγος της $-f$** Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = x_0$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διαφορισμότητα της $-f$ στο $x = x_0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **T**

38. **Παράγωγος πολλαπλασίων** Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $g(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 7$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη διαφορισμότητα της $3g$ στο $t = 7$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

39. **Όριο πηλίκου** Έστω ότι οι συναρτήσεις $g(t)$ και $h(t)$ είναι ορισμένες για κάθε t και ότι $g(0) = h(0) = 0$. Μπορεί να υπάρξει το $\lim_{t \rightarrow 0} (g(t)/h(t))$; Αν ναι, οφείλει να ισούται με το μηδέν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. **T**

40. (α) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $|f(x)| \leq x^2$ για $-1 \leq x \leq 1$. Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

41. **Μάθετε γράφοντας** Σχεδιάστε (με υπολογιστή) την $y = 1/(2\sqrt{x})$ για $0 \leq x \leq 2$. Κατόπιν, στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

για $h = 1, 0,5, 0,1$, καθώς και για $h = -1, -0,5, -0,1$. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

42. **Μάθετε γράφοντας** Σχεδιάστε (με υπολογιστή) την $y = 3x^2$ στην περιοχή $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$. Κατόπιν, στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε την

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

για $h = 2, 1, 0,2$, καθώς και για $h = -2, -1, -0,2$. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

43. **Η πουθενά διαφορίσιμη συνεχής συνάρτηση του Weierstrass** Το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της συνάρτησης του Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ ισούται με

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Παραστήστε γραφικά το άθροισμα αυτό. Μεγεθύνετε το γράφημα μερικές φορές. Πόσο κυματοειδής και ανώμαλη είναι η καμπύλη που βλέπετε; Καθορίστε τις διαστάσεις μιας περιοχής στην οποία η καμπύλη φαίνεται λεία.

44. **Μάθετε γράφοντας** Σχεδιάστε με υπολογιστή τις συναρτήσεις $f(x) = 1 + \ln(x+1)$ και $g(x) = |x| + 1$ σε κοινό σχήμα. Μεγεθύνετε το γράφημα για να μπορέσετε να αναλύσετε τη συμπεριφορά των καμπυλών κοντά στο σημείο $(0,1)$. Τι παρατηρείτε; Ποια από τις δύο συναρτήσεις πιστεύετε ότι είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. **T**

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 45-50, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα εξής:

- (α) Παραστήστε γραφικά την $y = f(x)$ για να δείτε τη συνολική συμπεριφορά της συναρτήσεως.
- (β) Ορίστε το πηλίκο διαφορών q για ένα γενικό σημείο x , με γενικό βήμα h .
- (γ) Πάρτε το όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \rightarrow 0$. Ποιος τύπος προκύπτει;
- (δ) Αντικαταστήστε $x = x_0$ και σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = f(x)$ μαζί με την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό.

(ε) Αντικαταστήστε στον ανωτέρω τύπο (γ) διάφορες τιμές για το x , μικρότερες ή και μεγαλύτερες του x_0 . Συμφωνούν τα αριθμητικά σας αποτελέσματα με τη γραφική παράσταση;

(στ) **Μάθετε γράφοντας** Παραστήστε γραφικά τον τύπο που εξαγάγατε στο (γ). Τι νόημα έχει αν οι τιμές του είναι αρνητικές, μηδέν, ή θετικές; Συμφωνεί αυτή η γραφική παράσταση με εκείνην που πήρατε στο (α); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

45. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

46. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$ 48. $f(x) = \frac{x-1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

49. $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \pi/2$ 50. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

2.2

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής • Ευθύγραμμη κίνηση: Μετατόπιση, ταχύτητα, μέτρο ταχύτητας, επιτάχυνση και παράγωγος επιτάχυνσης
 • Ευαισθησία σε μεταβολές • Εφαρμογές των παραγώγων στα οικονομικά

Στην Ενότητα 1.1 εξετάσαμε για πρώτη φορά τον μέσο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Θα συνεχίσουμε με εφαρμογές όπου οι παράγωγοι χρησιμεύουν ως μοντέλα ρυθμών μεταβολής που συμβαίνουν γύρω μας, στον πραγματικό κόσμο. Θα επανέλθουμε λοιπόν στην ευθύγραμμη κίνηση, εξετάζοντας και άλλες εφαρμογές στην πορεία.

Αν και είναι φυσικό να σκεφτόμαστε τη μεταβολή ως μεταβολή στον χρόνο, υπάρχουν και άλλες μεταβλητές συναρτήσεων των οποίων μπορεί να συμβαίνει μια μεταβολή. Για παράδειγμα, ένας γιατρός μπορεί να ενδιαφέρεται να μάθει πώς η μεταβολή στη χορηγούμενη δόση μιας φαρμακευτικής ουσίας επηρεάζει τη συμπεριφορά του οργανισμού του ασθενούς. Ένας οικονομολόγος μπορεί να μελετά πώς μεταβάλλεται το κόστος παραγωγής χάλυβα συναρτήσει της παραχθείσας ποσότητας.

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής

Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών $(f(x+h) - f(x))/h$ ως τον μέσο ρυθμό μεταβολής της f στο διάστημα από x έως $x+h$, τότε το όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \rightarrow 0$ θα είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η f στο σημείο x .

Οι στιγμιαίοι ρυθμοί δεν είναι παρά όρια των μέσων ρυθμών μεταβολής.

Ορισμός Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

Ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** της f ως προς x στο x_0 είναι η παράγωγος

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Συνηθίζεται να αποκαλούμε τον ρυθμό αυτόν **στιγμιαίο** ακόμη και όταν το x δεν αναπαριστά χρόνο. Όμως συχνά ο επιθετικός προσδιορισμός παραλείπεται ολότελα. Έτσι όταν λέμε **ρυθμός μεταβολής**, εννοούμε **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής**.

Παράδειγμα 1 Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν κύκλου συναρτήσει της διαμέτρου του

Το εμβαδόν A ενός κύκλου συνδέεται με τη διάμετρό του με τη σχέση

$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το εμβαδόν συναρτήσει της διαμέτρου, όταν η διάμετρος είναι 10 m;

Λύση Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ως προς τη διάμετρο είναι

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}.$$

Όταν $D = 10$ m, το εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό $(\pi/2)10 = 5\pi$ m²/m.

Ευθύγραμμη κίνηση: Μετατόπιση, ταχύτητα, μέτρο ταχύτητας, επιτάχυνση και παράγωγος επιτάχυνσης

Έστω ότι ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα κατά τρόπο ώστε να γνωρίζουμε τη θέση του, s , συναρτήσει του χρόνου, t :

$$s = f(t).$$

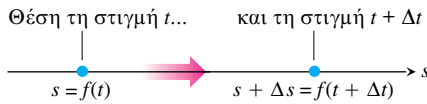
Η μετατόπιση του σώματος κατά το χρονικό διάστημα από t έως $t + \Delta t$ (Σχήμα 2.14) είναι

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

ενώ η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$v_{av} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος κίνησης}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Για την εύρεση της ταχύτητας ακριβώς τη χρονική στιγμή t , παίρνουμε το όριο της μέσης ταχύτητας στο χρονικό διάστημα από t έως $t + \Delta t$ καθώς το Δt συρρικνώνεται τείνοντας στο μηδέν. Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της f ως προς t .



ΣΧΗΜΑ 2.14 Οι θέσεις σώματος που κινείται επί της ευθείας, κατά τις χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$.



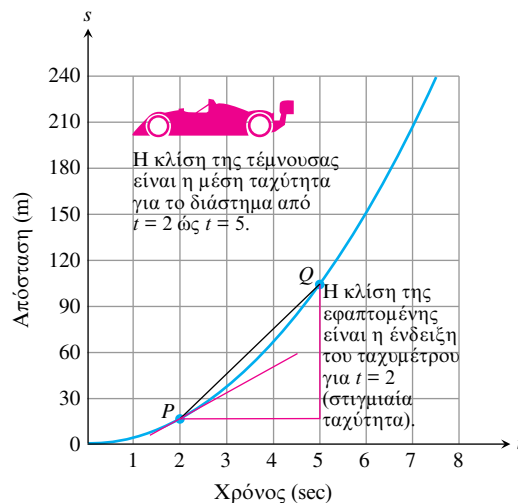
Ορισμός (Στιγμαία) ταχύτητα

Ταχύτητα (στιγμαία ταχύτητα) είναι η παράγωγος της θέσεως ως προς τον χρόνο. Αν η θέση ενός σώματος τη στιγμή t είναι $s = f(t)$, τότε η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t θα είναι

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Παράδειγμα 2 Εύρεση ταχύτητας αγωνιστικού αυτοκινήτου

Το Σχήμα 2.15 δείχνει τη γραφική παράσταση απόστασης-χρόνου ενός αγωνιστικού μοντέλου Riley & Scott Mk III-Olds WSC του 1996. Η κλίση της τέμνουσας PQ είναι η μέση ταχύτητα για το χρονικό διάστημα των 3 sec από $t = 2$ έως $t = 5$ sec, η οποία εδώ είναι ίση με περίπου 30 m/sec δηλαδή 108 km/h. Η κλίση της εφαπτομένης στο P δεν είναι παρά η ένδειξη του ταχυμέτρου τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec, περίπου 18 m/sec, δηλαδή 65 km/h. Η επιτάχυνση είναι σχεδόν σταθερή για τη χρονική διάρκεια που φαίνεται στο σχήμα, και ίση με 8,7 m/sec² για κάθε δευτερόλεπτο που περνά, ήτοι περίπου 0,89g, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η μέγιστη ταχύτητα του



ΣΧΗΜΑ 2.15 Γραφική παράσταση απόστασης συναρτήσει του χρόνου για το Παράδειγμα 2.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Galileo Galilei
(1564 -1642)

αγωνιστικού αυτοκινήτου προσεγγίζει τα 300 km/h. (Πηγή: *Road and Track*, March 1997.)

Η ταχύτητα ενός σώματος μας πληροφορεί όχι μόνο για το πόσο γρήγορα αλλά και προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα. Όταν η κίνηση είναι προς τα εμπρός (αυξανόμενο s) η ταχύτητα είναι θετική· όταν η κίνηση είναι προς τα πίσω (μειωνόμενο s) είναι αρνητική.

Αν πηγαίνοντας να επισκεφθούμε κάποιον φίλο μας, αλλά και κατά την επιστροφή, κινούμαστε πάντα με ταχύτητα π.χ. 50 km/h, το ταχύμετρο θα δείχνει 50 ενόσω πηγαίνουμε αλλά δεν θα δείχνει -50 κατά την επιστροφή, παρ' ότι η απόσταση από το σπίτι μας μειώνεται τότε. Το ταχύμετρο μετρά πάντα το μέτρο της ταχύτητας ("speed" στα αγγλικά), δηλαδή την απόλυτη τιμή της ταχύτητας. Το μέτρο της ταχύτητας είναι μια έννοια που μας πληροφορεί για τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως.

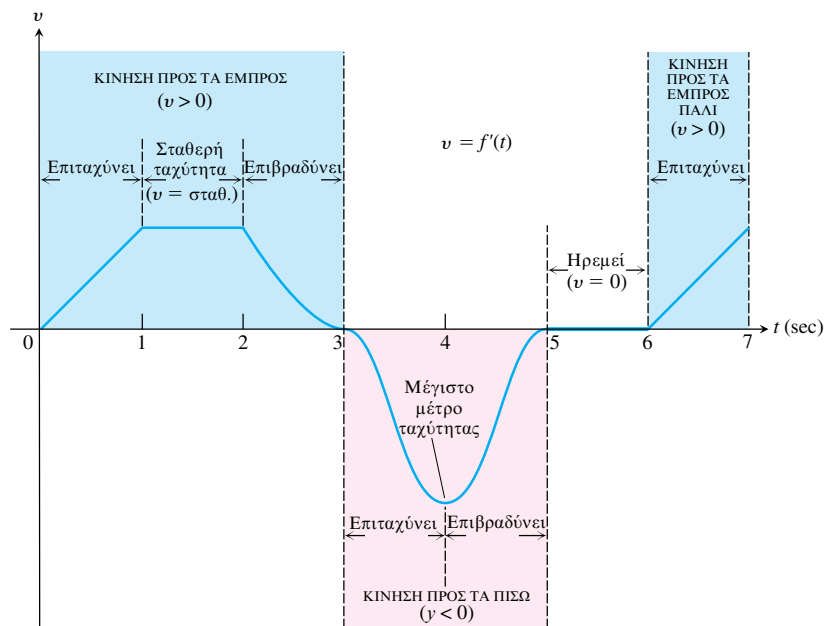
Ορισμός Μέτρο ταχύτητας

Μέτρο ταχύτητας είναι η απόλυτη τιμή της ταχύτητας.

$$\text{Μέτρο ταχύτητας} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

Παράδειγμα 3 Οριζόντια κίνηση

Το Σχήμα 2.16 δείχνει την ταχύτητα $v = f'(t)$ σωματιδίου κινούμενου επί ενός άξονα συντεταγμένων. Το σωματίδιο κινείται προς τα εμπρός για τα πρώτα 3 sec, προς τα πίσω για τα επόμενα 2 sec, έπειτα μένει ακίνητο για ένα δευτερόλεπτο, και τέλος κινείται πάλι προς τα εμπρός. Η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου προκύπτει για $t = 4$, κατά την όπισθεν κίνηση.



ΣΧΗΜΑ 2.16 Γραφική παράσταση της ταχύτητας, για το Παράδειγμα 3.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Bernard Bolzano
(1781-1848)

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι η επιτάχυνσή του. Η επιτάχυνση μας δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνει ή μειώνει την ταχύτητά του το σώμα.

Μερικές φορές η επιτάχυνση μεταβάλλεται απότομα. Όταν επιβαίνουμε σε όχημα που κινείται άτσαλα, η καταπόνηση που νιώθουμε δεν οφείλεται τόσο στο ότι οι επιταχύνσεις που αναπτύσσονται είναι κατ' ανάγκην μεγάλες, αλλά στο ότι οι μεταβολές της επιταχύνσεως είναι απότομες. Αυτή είναι, για παράδειγμα, η αιτία που το ποτό μας μπορεί να χυθεί σε ένα απότομο φρενάρισμα.

Ορισμοί **Επιτάχυνση, παράγωγος επιτάχυνσης**

Επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο. Αν η θέση ενός σώματος τη χρονική στιγμή t είναι $s = f(t)$, τότε η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή t είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ορίζουμε επίσης την **παράγωγο της επιταχύνσεως** ως προς τον χρόνο:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Κοντά στην επιφάνεια της Γης όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση. Όπως απέδειξε ο Galileo πειραματιζόμενος με την ελεύθερη πτώση, η απόσταση που διανύει σε χρόνο t ένα σώμα που αφήνεται να πέσει, είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου πτώσεως. Εκφράζουμε την αναλογία αυτή γράφοντας

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου s η απόσταση και g η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας της Γης. Η εξίσωση αυτή ισχύει κανονικά στον κενό χώρο, όπου δεν υπάρχει η αντίσταση του αέρα· αλλά και στον αέρα ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό, προκειμένου για συμπαγή, βαριά αντικείμενα, όπως ατσάλινα εργαλεία, κατά τα πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης τους (προτού η αντίσταση γίνει μεγάλη).

Η παράγωγος της σταθερής επιταχύνσεως της βαρύτητας ($g = 9,8 \text{ m/sec}^2$) είναι μηδέν:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

Για ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα, έχουμε $j = 0$.

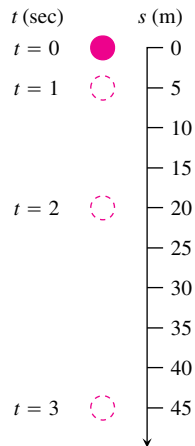
Η τιμή του g στην εξίσωση $s = (1/2)gt^2$ εξαρτάται από τις μονάδες στις οποίες μετράμε τα t και s . Όταν το t είναι σε δευτερόλεπτα (ως συνήθως), τότε έχουμε τις ακόλουθες τιμές:

Εξισώσεις ελεύθερης πτώσης (Γη)

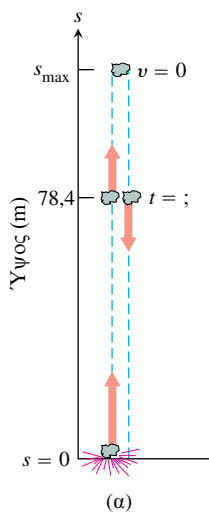
Μετρικές μονάδες (SI): $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad s = \frac{1}{2}(9,8)t^2 = 4,9t^2$
(s σε μέτρα)

Συντομογραφίες μονάδων μέτρησης

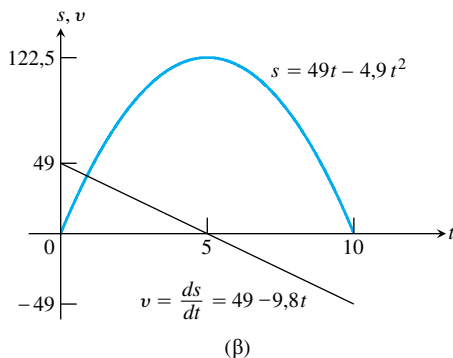
m/sec^2 «μέτρα ανά δευτερόλεπτο τετράγωνο» ή «μέτρα ανά δευτερόλεπτο ανά δευτερόλεπτο»



ΣΧΗΜΑ 2.17 Μια συμπαγής σφαίρα που πέφτει από κατάσταση ηρεμίας (Παράδειγμα 4)



CD-ROM
Δικτυότοπος



Παράδειγμα 4 Μοντέλο ελεύθερης πτώσης

Το Σχήμα 2.17 δείχνει την ελεύθερη πτώση μιας συμπαγούς σφαίρας που αφήνεται να πέσει από κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ sec.

(α) Πόσα μέτρα θα διανύσει η σφαίρα τα πρώτα 2 sec της πτώσης της;

(β) Πόση είναι τότε η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνσή της;

Λύση

(α) Η εξίσωση της ελεύθερης πτώσης (σε μέτρα) είναι $s = 4,9t^2$. Κατά τα πρώτα 2 sec, η σφαίρα διανύει πέφτοντας

$$s(2) = 4,9(2)^2 = 19,6 \text{ m}.$$

(β) Για κάθε χρονική στιγμή t , η ταχύτητα είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσεως:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4,9t^2) = 9,8t.$$

Για $t = 2$, η ταχύτητα ισούται με

$$v(2) = 19,6 \text{ m/sec}$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω (αυξανόμενο s). Το μέτρο της ταχύτητας για $t = 2$ είναι

$$\text{Μέτρο ταχύτητας} = |v(2)| = 19,6 \text{ m/sec}.$$

Η επιτάχυνση για τη χρονική στιγμή t είναι

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9,8 \text{ m/sec}^2.$$

Για $t = 2$, η επιτάχυνση ισούται με $9,8 \text{ m/sec}^2$.

Παράδειγμα 5 Μοντέλο κατακόρυφης πτώσης

Μια έκρηξη δυναμίτη εκσφενδονίζει έναν μεγάλο βράχο κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 49 m/sec (περίπου 176 km/h) (Σχήμα 2.18α). Ο βράχος φθάνει σε ύψος $s = 49t - 4,9t^2$ m μετά από t sec.

(α) Σε πόσο ύψος φθάνει τελικά ο βράχος;

(β) Ποιο το μέτρο και η φορά της ταχύτητας του βράχου σε ύψος 78,4 m κατά την άνοδό του; Το ίδιο ερώτημα για το ίδιο σημείο κατά την κάθοδο.

(γ) Ποια η επιτάχυνση του βράχου σε τυχούσα στιγμή t κατά τη διάρκεια της κίνησής του (μετά την έκρηξη);

(δ) Πότε θα συγκρουστεί με το έδαφος ο βράχος;

Λύση

(α) Στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει, s είναι το ύψος από το έδαφος, οπότε η ταχύτητα είναι θετική κατά την άνοδο και αρνητική κατά την κάθοδο. Τη στιγμή που ο βράχος βρίσκεται στο απόγειο της κίνησής του (σε μέγιστο ύψος), η

ΣΧΗΜΑ 2.18 (α) Η κίνηση του βράχου στο Παράδειγμα 5. (β) Οι γραφικές παραστάσεις των s και v συναρτήσει του χρόνου· το s μεγιστοποιείται όταν $v = ds/dt = 0$. Το γράφημα του s δεν είναι η τροχιά του βράχου, αλλά η γραφική παράσταση του ύψους συναρτήσει του χρόνου. Η κλίση της καμπύλης του s είναι η ταχύτητα του βράχου, που γράφημά της είναι η ευθεία που φαίνεται στο σχήμα.

ταχύτητά του μηδενίζεται. Για να βρούμε το ύψος αυτό, θα πρέπει να βρούμε σε ποια χρονική στιγμή έχουμε $v = 0$ και μετά να υπολογίσουμε το s για εκείνη τη στιγμή.

Για τυχούσα στιγμή t , η ταχύτητα είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(49t - 4,9t^2) = 49 - 9,8t \text{ m/sec.}$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν

$$49 - 9,8t = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad t = 5 \text{ sec.}$$

Το ύψος του βράχου για $t = 5 \text{ sec}$ είναι

$$s_{\max} = s(5) = 49(5) - 4,9(5)^2 = 245 - 122,5 = 122,5 \text{ m.}$$

Δείτε το Σχήμα 2.18β.

- (β) Για να βρούμε την ταχύτητα του βράχου σε ύψος 78,4 m κατά την άνοδο και την κάθοδο, βρίσκουμε πρώτα τις δύο τιμές του t για τις οποίες

$$s(t) = 49t - 4,9t^2 = 78,4.$$

Λύνουμε την εξίσωση αυτή:

$$4,9t^2 - 49t + 78,4 = 0$$

$$4,9(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0$$

$$t = 2 \text{ sec}, t = 8 \text{ sec.}$$

Δηλαδή ο βράχος βρίσκεται σε ύψος 78,4 m πάνω από το έδαφος 2 sec μετά την έκρηξη και, πάλι, για δεύτερη φορά, 8 sec μετά την έκρηξη. Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι

$$v(2) = 49 - 9,8(2) = 49 - 19,6 = 29,4 \text{ m/sec}$$

$$v(8) = 49 - 9,8(8) = 49 - 78,4 = -29,4 \text{ m/sec.}$$

Και τις δύο φορές, το μέτρο της ταχύτητας ισούται με 29,4 m/sec.

- (γ) Για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης του βράχου μετά την έκρηξη, η επιτάχυνσή του είναι σταθερή και ίση με

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(49 - 9,8t) = -9,8 \text{ m/sec}^2.$$

Η επιτάχυνση έχει πάντα φορά προς τα κάτω. Καθώς ανέρχεται ο βράχος, τον επιβραδύνει· καθώς κατέρχεται, τον επιταχύνει.

- (δ) Ο βράχος συγκρούεται με το έδαφος τη (θετική) χρονική στιγμή t για την οποία $s = 0$. Η εξίσωση $49t - 4,9t^2 = 0$ παραγοντοποιείται, οπότε παίρνουμε $4,9t(10 - t) = 0$, της οποίας οι λύσεις είναι $t = 0$ και $t = 10$. Η έκρηξη συνέβη τη στιγμή $t = 0$, οπότε και εκσφενδονίστηκε ο βράχος. Επέστρεψε στο έδαφος 10 sec αργότερα.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσομοίωση κατακόρυφης κίνησης. Οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

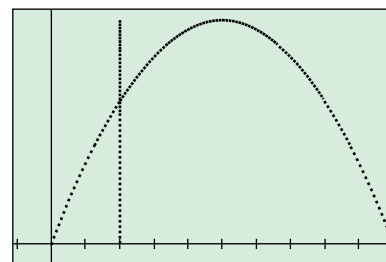
παριστάνουν σημεία επί της κατακόρυφης ευθείας $x = c$. Αν η $f(t)$ δηλώνει το ύψος κινούμενου σώματος κατά τη χρονική στιγμή t , τότε τοποθετώντας στην ευθεία το σύνολο των σημείων $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ θα έχουμε προσομοιώσει την κίνη-

ση. Δοκιμάστε το για τον βράχο του Παραδείγματος 5, θέτοντας π.χ. $x(t) = 2$ και $y(t) = 49t - 4,9t^2$, και κατασκευάζοντας το διάκριτο γράφημα (επιλέγοντας «dot mode» στον υπολογιστή σας) με χρονικό βήμα (χρονοβαθμίδα) ίσο με 0,1. Για ποιον λόγο μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του γραφήματος; Γιατί η σχεδίαση μοιάζει να σταματά μόλις φθάσει στο ανώτερο σημείο; (Κάντε χωριστά γραφήματα για τα χρονικά διαστήματα $0 \leq t \leq 5$ και $5 \leq t \leq 10$.)

Ως ένα δεύτερο πείραμα, σχεδιάστε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = t, \quad y(t) = 160t - 16t^2$$

στο ίδιο σχήμα με την προσομοίωση της κατακόρυφης κίνησης, πάλι σε διάκριτο γράφημα. Βάσει των όσων μάθατε για το είδος της κίνησης του βράχου από το Παράδειγμα 5, επιλέξτε κατάλληλα μια περιοχή σχεδίασης όπου να περικλείεται όλη η ενδιαφέρουσα συμπεριφορά της κίνησης.



Διάκριτα γραφήματα των

$$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 49t - 4,9t^2 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 49t - 4,9t^2 \end{cases}$$

Ευαισθησία σε μεταβολές

Όταν μια μικρή μεταβολή στο x προξενεί μια μεγάλη μεταβολή στην τιμή της συναρτήσεως $f(x)$, λέμε ότι η συνάρτηση είναι σχετικά **ευαίσθητη** σε μεταβολές του x . Η παράγωγος $f'(x)$ είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας αυτής.

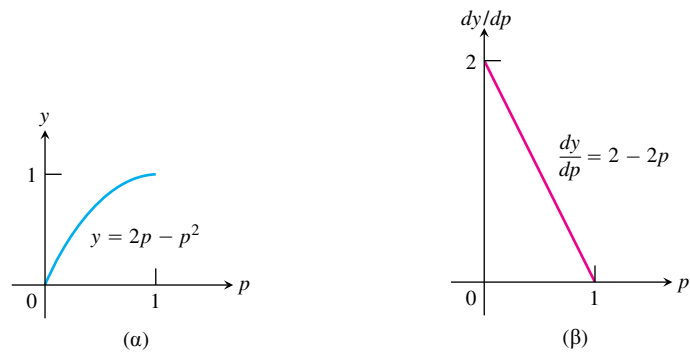
Παράδειγμα 6 Γενετικά δεδομένα και ευαισθησία σε μεταβολές

Ο Αυστριακός μοναχός Gregor Johann Mendel (1822–1884), μελετώντας τους καρπούς της μπιζελιάς και άλλων φυτών, μας έδωσε την πρώτη επιστημονική ερμηνεία του υβριδισμού. Οι ενδελχεείς μελέτες του απέδειξαν ότι αν η συχνότητα του γονιδίου του μπιζελιού με λεία φλούδα (επικρατές γονίδιο) είναι p (ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1), και η συχνότητα του γονιδίου του μπιζελιού με ρυτιδωμένη φλούδα (υπολειπόμενο γονίδιο) είναι $(1 - p)$, τότε το ποσοστό των μπιζελιών με λεία φλούδα στην επόμενη γενεά θα ισούται με

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2.$$

Η γραφική παράσταση του y συναρτήσει του p , στο Σχήμα 2.19α, φανερώνει ότι το y είναι πιο ευαίσθητο σε μεταβολές του p για μικρές τιμές του p παρά για μεγάλες. Πράγματι, το γράφημα του Σχήματος 2.19β μας δείχνει ότι η παράγωγος dy/dp ισούται περίπου με 2 για p κοντά στο 0, και περίπου με 0 για p κοντά στο 1.

Η σημασία των παραπάνω για τη γενετική έγκειται στο ότι αν εισαγάγουμε μερικά επικρατή γονίδια σε πληθυσμό έντονα υπολειπόμενο (δηλ. με μικρή συχνότητα λείας φλούδας) τα αποτελέσματα στις επόμενες γενεές θα είναι θεαματικότερα απ' ό,τι αν εισαγάγαμε τα ίδια γονίδια σε έναν έντονα επικρατή πληθυσμό (δηλ. με μεγάλη συχνότητα λείας φλούδας).



ΣΧΗΜΑ 2.19 (α) Το γράφημα της $y = 2p - p^2$, που περιγράφει το ποσοστό των μπιτζελιών με λεία φλούδα. (β) Το γράφημα της dy/dp .

Εφαρμογές των παραγώγων στα οικονομικά

Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τους όρους *ταχύτητα* και *επιτάχυνση* όταν αναφέρονται στις παραγώγους συναρτήσεων που περιγράφουν κίνηση. Αλλά και οι οικονομολόγοι διαθέτουν εξειδικευμένο λεξιλόγιο για την έννοια του ρυθμού μεταβολής, δηλ. της παραγώγου: χρησιμοποιούν τον επιθετικό προσδιορισμό *οριακός*.

Κατά την παραγωγική διαδικασία, το *κόστος παραγωγής* $c(x)$ είναι συνάρτηση του πλήθους x των παραχθέντων μονάδων (προϊόντων). Το *οριακό κόστος παραγωγής* είναι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους ως προς την παραχθείσα ποσότητα, δηλαδή dc/dx .

Εστω ότι η συνάρτηση $c(x)$ παριστάνει το κόστος παραγωγής μιας ποσότητας x τόνων χάλυβα σε μία εβδομάδα. Η παραγωγή $x + h$ μονάδων (τόνων) ανά εβδομάδα στοιχίζει περισσότερο, και η διαφορά αυτή του κόστους, διαιρεμένη με το h , είναι το μέσο κόστος παραγωγής για κάθε επιπλέον τόνο:

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{μέσο κόστος παραγωγής καθενός από τους } h \text{ επιπλέον τόνους χάλυβα}$$

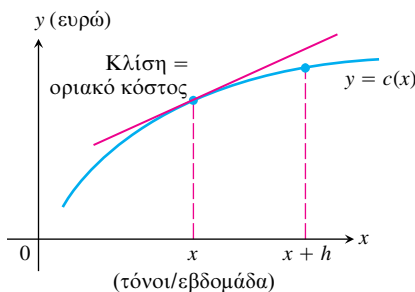
Τό όριο του πηλίκου αυτού καθώς $h \rightarrow 0$ είναι το *οριακό κόστος* της παραγωγής επιπλέον ποσότητας χάλυβα κάθε εβδομάδα, όταν η τρέχουσα εβδομαδιαία παραγωγή είναι x τόνοι (Σχήμα 2.20).

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{οριακό κόστος παραγωγής.}$$

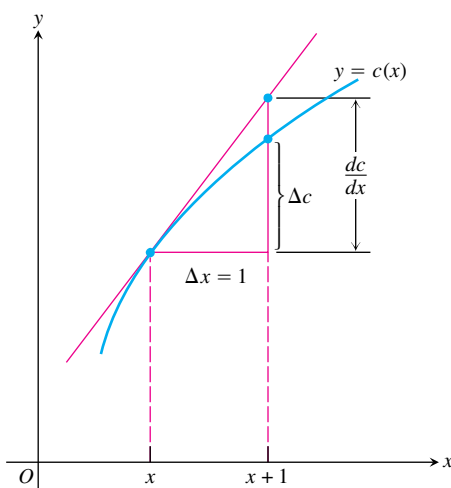
Μερικές φορές χρησιμοποιείται και ο ακόλουθος, λιγότερο αυστηρός ορισμός του οριακού κόστους παραγωγής, ως το επιπλέον κόστος παραγωγής μίας μονάδας:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1},$$

ποσότητα που προσεγγίζεται από την τιμή της παραγώγου dc/dx στο x . Η προσέγγιση αυτή είναι επιτρεπτή εφόσον η κλίση της καμπύλης c δεν παρουσιάζει μεγάλες αυξομειώσεις κοντά στο x . Στην περίπτωση αυτή το πηλίκο διαφορών ισούται περίπου με το όριό του dc/dx , που εκφράζει την κατακόρυφη μεταβολή επί της εφαπτόμενης ευθείας για $\Delta x = 1$ (Σχήμα 2.21). Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβέστερη για μεγάλες τιμές του x .



ΣΧΗΜΑ 2.20 Εβδομαδιαία παραγωγή χάλυβα: $c(x)$ είναι το κόστος παραγωγής x τόνων ανά εβδομάδα. Το κόστος παραγωγής h τόνων επιπλέον είναι $c(x+h) - c(x)$.



ΣΧΗΜΑ 2.21 Το οριακό κόστος dc/dx ισούται κατά προσέγγιση με το επιπλέον κόστος Δc παραγωγής $\Delta x = 1$ επιπλέον μονάδας.

Επιλογή συναρτήσεων για την εξήγηση οικονομικών εννοιών

Αν διερωτάστε για ποιον λόγο οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν πολυώνυμα μικρού βαθμού για να εξηγήσουν τις περίπλοκες έννοιες του κόστους και του εισοδήματος, ιδού το σκεπτικό τους: Παρά το ότι σπανίως διαθέτουμε μαθηματικούς τύπους που να περιγράφουν πιστά τα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου, εντούτοις η θεωρία των οικονομικών μπορεί να μας φανεί χρήσιμη – ως ένα σημείο. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιεί η θεωρία αυτή μπορούν συνήθως να προσεγγιστούν από πολυώνυμα μικρού βαθμού, ορισμένα σε κατάλληλα διαστήματα. Τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού αποτελούν μια καλή τέτοια επιλογή, δεδομένου ότι είναι μεν σχετικά απλά στον χειρισμό τους, αλλά διαθέτουν και αρκετή πολυπλοκότητα ώστε να αποδίδουν τη ζητούμενη συμπεριφορά.

Παράδειγμα 7 Οριακό κόστος και οριακό έσοδο

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος παραγωγής (σε ευρώ) x θερμοσυσσωρευτών είναι

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

όταν συνολικά παράγονται από 8 έως 30 θερμοσυσσωρευτές, και ότι το έσοδο (σε ευρώ) από την πώληση αυτών των x συσκευών είναι

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x.$$

Έστω ότι η επιχείρησή σας παράγει 10 θερμοσυσσωρευτές την ημέρα. Πόσο περίπου επιπλέον θα στοιχίσει η παραγωγή ενός ακόμη θερμοσυσσωρευτή την ημέρα, και πόσο θα αυξηθούν τα έσοδά σας από την επακόλουθη πώληση των 11 συσκευών ανά ημέρα;

Λύση Το κόστος της αύξησης της παραγωγής από 10 θερμοσυσσωρευτές την ημέρα σε 11, ισούται περίπου με την παράγωγο $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

Το επιπλέον κόστος είναι λοιπόν 195 €. Το οριακό έσοδο είναι

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12.$$

Η συνάρτηση οριακού εσόδου αποτελεί μια εκτίμηση της αύξησης των εσόδων από την πώληση μίας μονάδας επιπλέον. Εάν ήδη πωλούνται ημερησίως 10 συσκευές, τότε η αναμενόμενη αύξηση των εσόδων σας θα είναι

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252 \text{ €}$$

αν οι πωλήσεις αυξηθούν σε 11 ημερησίως.

Παράδειγμα 8 Οριακός φορολογικός συντελεστής

Προκειμένου να αποκτήσετε μια αίσθηση της ορολογίας των οριακών συντελεστών, ας εξετάσουμε τώρα τους οριακούς φορολογικούς συντελεστές. Αν ο οριακός φορολογικός συντελεστής σας είναι 28% και το εισόδημά σας αυξηθεί κατά 1000 €, θα πληρώσετε επιπλέον φόρο 280 €. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα πληρώσετε το 28% του συνολικού σας εισοδήματος σε φόρους. Σημαίνει απλώς ότι για την παρούσα εισοδηματική σας στάθμη I , ο ρυθμός αύξησης του φόρου T ως προς το εισόδημα ισούται με $dT/dI = 0,28$. Συνεπώς θα πληρώσετε 0,28 € φόρο για κάθε επιπλέον ευρώ που κερδίζετε. Προφανώς, αν συνολικά κερδίζετε πολύ περισσότερα, θα υπαχθείτε σε άλλη φορολογική κλίμακα και κατά συνέπεια ο οριακός φορολογικός σας συντελεστής θα αυξηθεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2

Ευθύγραμμη κίνηση

CD-ROM

Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 1-4 δίδονται οι θέσεις $s = f(t)$ σώματος που κινείται επί του άξονα s (s σε m και t σε sec).

- (α) Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος και η μέση ταχύτητά του για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.
 - (β) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος στα άκρα του χρονικού διαστήματος.
 - (γ) Αλλάζει κατεύθυνση στο δοσμένο χρονικό διάστημα το σώμα, και πότε;
1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \leq t \leq 2$
 2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \leq t \leq 6$
 3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 3$
 4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 3$
5. **Κίνηση σωματιδίου** Κατά τη χρονική στιγμή t , η θέση ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.
 - (α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητά του μηδενίζεται.
 - (β) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος κάθε φορά που η επιτάχυνσή του μηδενίζεται.
 - (γ) Να βρεθεί η συνολική διανυθείσα απόσταση κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 2$.
6. **Κίνηση σωματιδίου** Κατά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$, η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $v = t^2 - 4t + 3$.
 - (α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητά του μηδενίζεται.
 - (β) Πότε κινείται προς τα εμπρός το σώμα και πότε προς τα πίσω;
 - (γ) Πότε αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος και πότε μειώνεται;

Εφαρμογές ελεύθερης πτώσεως

7. **Ελεύθερη πτώση στον Άρη και στον Δία** Οι εξισώσεις ελεύθερης πτώσεως στις επιφάνειες των δύο πλανητών είναι $s = 1,86t^2$ για τον Άρη και $s = 11,44t^2$ για τον Δία, αντίστοιχα (s σε m, t σε sec). Αν αφήσουμε έναν βράχο να πέσει σε κάθε πλανήτη, σε πόσο χρόνο θα αποκτήσει την ταχύτητα των 27,8 m/sec (περίπου 100 km/h);
8. **Κίνηση βλήματος στη σεληνή** Ένας βράχος εκσφενδονίζεται κατακόρυφα από τη σεληνιακή επιφάνεια με αρχική ταχύτητα 24 m/sec (περίπου 86 km/h) και μετά από t sec έχει ανέλθει σε ύψος $s = 24t - 0,8t^2$ m.
- (α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του βράχου τη χρονική στιγμή t . (Εδώ πρόκειται για την επιτάχυνση της σεληνιακής βαρύτητας.)
- (β) Πότε φθάνει σε μέγιστο ύψος ο βράχος;
- (γ) Σε ποιο μέγιστο ύψος ανέρχεται;
- (δ) Πόσο χρόνο χρειάζεται για να ανέλθει στο ήμισυ του μέγιστου ύψους του ο βράχος;
- (ε) Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που εκσφενδονίζεται θα συγκρουστεί με το σεληνιακό έδαφος ο βράχος;

9. **Εύρεση του g σε μικρό πλανήτη χωρίς ατμόσφαιρα** Εξερευνητές στην επιφάνεια ενός μικρού πλανήτη χωρίς ατμόσφαιρα χρησιμοποιούν έναν εκτοξευτήρα με ελατήριο για να εκσφενδονίσουν κατακόρυφα μια μικρή σφαίρα, με αρχική ταχύτητα 15 m/sec. Δεδομένου ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι g_s m/sec², οι εξερευνητές υπολογίζουν ότι μετά από t sec η σφαίρα θα έχει ανέλθει σε ύψος $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ m. Η σφαίρα έφτασε σε μέγιστο ύψος 20 sec μετά την εκτόξευσή της. Ποια είναι η τιμή του g_s στον πλανήτη;

CD-ROM

Δικτυότοπος

10. **Επιταχυνόμενη σφαίρα** Μια σφαίρα που εκτοξεύεται κατακόρυφως από 45άρι περιστροφή στην επιφάνεια της σεληνής θα ανέλθει σε ύψος $s = 250t - 0,8t^2$ m μετά από t sec. Το αντίστοιχο ύψος στη Γη (απουσία αέρα), πάλι μετά από t sec, θα ήταν $s = 250t - 4,9t^2$ m. Επί πόσο χρόνο θα κινηθεί συνολικά η σφαίρα σε κάθε πλανήτη; Σε πόσο μέγιστο ύψος θα ανέλθει;

CD-ROM

Δικτυότοπος

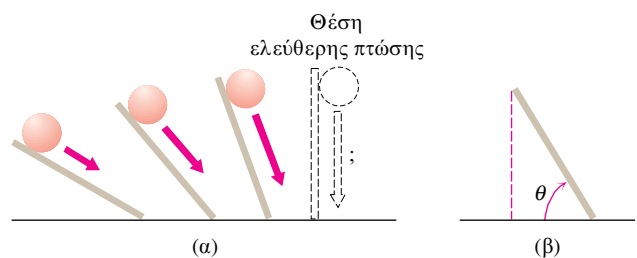
11. **Ελεύθερη πτώση από τον πύργο της Πίζας** Αν ο Γαλιλαίος είχε αφήσει μια μπάλα κανονιού να πέσει από τον πύργο της Πίζας, ύψους 55 m, τότε μετά από t sec πτώσεως η μπάλα θα βρισκόταν σε ύψος $s = 55 - 4,9t^2$.

- (α) Ποια θα ήταν τότε η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνση της μπάλας τη χρονική στιγμή t ;
- (β) Σε πόσο χρόνο θα έφτανε η μπάλα στο έδαφος;
- (γ) Ποια θα ήταν η ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή που θα έφτανε στο έδαφος;

12. **Ο τύπος ελεύθερης πτώσης του Γαλιλαίου** Ο Γαλιλαίος κατέληξε σε έναν τύπο για την ταχύτητα ενός σώματος κατά την ελεύθερη πτώση εφαρμόζοντας την εξής πειραματική διαδικασία: Παρατηρούσε την κίνηση σφαιρών που άφηνε να κυλήσουν (χωρίς αρχική ταχύτητα) πάνω σε κεκλιμένα επίπεδα διαδοχικά αυξανόμενης κλίσης, επιζητώντας να προσδιορίσει έτσι έναν οριακό τύπο που θα προέβλεπε την κίνηση στην περίπτωση που το επίπεδο θα ήταν κατακόρυφο και η σφαίρα θα έπεφτε συνεπώς ελεύθερα. Οι μετρήσεις του απέδειξαν ότι για κάθε γωνία κλίσεως του επιπέδου, η σφαίρα αποκτούσε ταχύτητα ανάλογη του χρόνου κίνησης t . Με άλλα λόγια, η ταχύτητα ικανοποιούσε μια σχέση της μορφής $v = kt$. Η τιμή της σταθεράς k εξαρτώνταν από την κλίση του επιπέδου.

Χρησιμοποιώντας σημερινό συμβολισμό —τμήμα (β) του σχήματος— όπου η απόσταση μετρείται σε m και ο χρόνος σε sec, θα γράφαμε την πειραματικά προσδιορισθείσα σχέση του Γαλιλαίου ως εξής: Για δεδομένη γωνία θ , η ταχύτητα της σφαίρας t sec μετά την έναρξη της κύλησης είναι

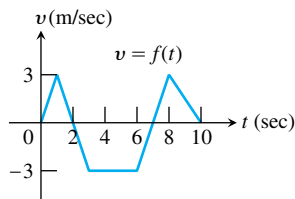
$$v = 9,8(\sin \theta)t \text{ m/sec.}$$



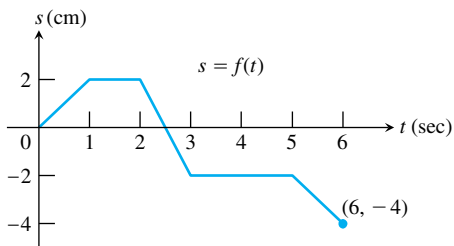
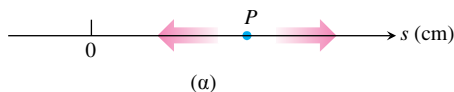
- (α) Ποια είναι η εξίσωση της ταχύτητας μιας σφαίρας που πέφτει ελεύθερα;
- (β) Βασιζόμενοι στην απάντησή σας στο ερώτημα (α), πόση είναι η σταθερή επιτάχυνση που υφίσταται ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα κοντά στην επιφάνεια της Γης;

Συμπεράσματα περί κίνησης από γραφικές παραστάσεις

13. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει την ταχύτητα $v = ds/dt = f(t)$ (m/sec) σώματος που κινείται σε ευθεία.

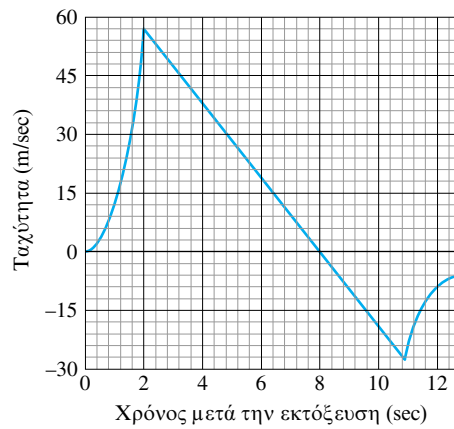


- (α) Πότε αλλάζει η φορά της κίνησης του σώματος;
- (β) Περίπου πότε κινείται με σταθερή ταχύτητα το σώμα;
- (γ) Παραστήστε γραφικά την ταχύτητα για $0 ≤ t ≤ 10$.
- (δ) Παραστήστε γραφικά την επιτάχυνση, όπου αυτή ορίζεται.
14. Ένα σωματίδιο P κινείται επί του άξονα s όπως φαίνεται στο τμήμα (α) του ακόλουθου σχήματος. Το τμήμα (β) δείχνει τη θέση του P συναρτήσει του χρόνου t .



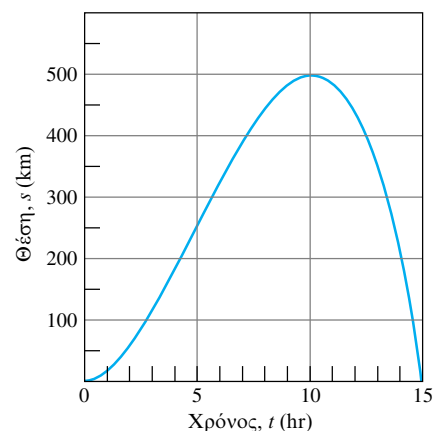
- (α) Πότε κινείται προς τα αριστερά το P , πότε προς τα δεξιά, και πότε μένει ακίνητο;
- (β) Παραστήστε γραφικά το μέτρο και την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας, όπου αυτή ορίζεται.
15. **Εκτόξευση πυραύλου** Κατά την εκτόξευση δοκιμαστικού πυραύλου, τα καύσιμα επαρκούν για να προωθήσουν κατακόρυφα τον πύραυλο για μερικά δευτερόλεπτα, επιταχύνοντάς τον. Μετά την εξάντληση των καυσίμων, ο πύραυλος συνεχίζει για λίγο την ανοδική του πορεία και κατόπιν αρχίζει να πέφτει. Ένας μικρός εκρηκτικός μηχανισμός ενεργοποιεί ένα αλεξίπτωτο λίγο μετά την έναρξη της καθόδου. Το αλεξίπτωτο επιβραδύνει τον πύραυλο και έτσι αποφεύγεται η συντριβή του κατά την προσεδάφιση.

Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει μετρήσεις της τα-

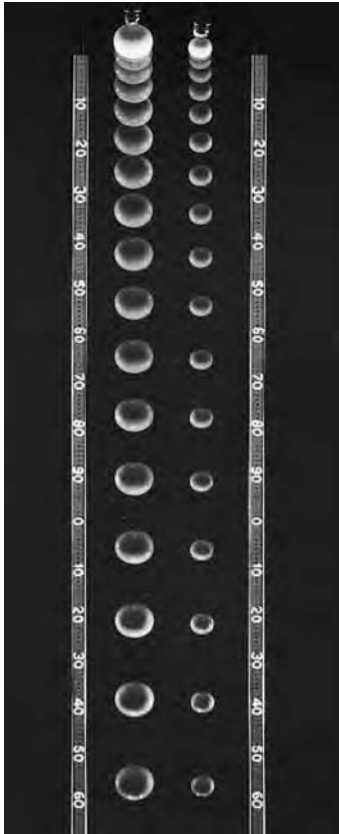


χύτητας του δοκιμαστικού πυραύλου κατά την πτήση του. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του διαγράμματος για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α) Πόσο γρήγορα ανέβαινε ο πύραυλος τη στιγμή που τελείωσαν τα καύσιμα;
- (β) Για πόσα δευτερόλεπτα δούλεψαν οι μηχανές του;
- (γ) Πότε έφτασε στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ο πύραυλος; Πόση ήταν τότε η ταχύτητά του;
- (δ) Σε ποια στιγμή άνοιξε το αλεξίπτωτο; Πόσο γρήγορα έπεφτε τη στιγμή εκείνη ο πύραυλος;
- (ε) Για πόσο διάστημα έπεφτε ο πύραυλος προτού ανοίξει το αλεξίπτωτο;
- (στ) Πότε ήταν μέγιστη η επιτάχυνση του πυραύλου;
- (ζ) Πότε ήταν σταθερή η επιτάχυνση του πυραύλου; Ποια η τιμή της τότε (με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου);
16. **Διαδρομή φορτηγού** Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η θέση s ενός φορτηγού που κινείται στην εθνική οδό. Το φορτηγό ξεκινά το ταξίδι του τη χρονική στιγμή $t = 0$ και επιστρέφει μετά από 15 h, δηλ. $t = 15$.
- (α) Χρησιμοποιώντας την τεχνική που περιγράφεται στην Ενότητα 2.1, Παράδειγμα 9, παραστήστε γραφικά την ταχύτητα του φορτηγού $v = ds/dt$ για $0 ≤ t ≤ 15$. Κατόπιν επαναλάβετε τη διαδικασία με την καμπύλη της ταχύτητας, σχεδιάζοντας τώρα το γράφημα της επιτάχυνσης dv/dt .
- (β) Έστω ότι είναι $s = 15t^2 - t^3$. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις ds/dt και d^2s/dt^2 και συγκρίνετε τα γραφήματά σας με εκείνα του ερωτήματος (α).



17. **Σφαίρες που πέφτουν** Η πολλαπλή φωτογράφιση του ακόλουθου σχήματος δείχνει την ελεύθερη πτώση δύο σφαιρών από κατάσταση ηρεμίας. Η κατακόρυφη βαθμονόμηση είναι σε εκατοστόμετρα (cm). Χρησιμοποιήστε την εξίσωση $s = 490t^2$ (εξίσωση ελεύθερης πτώσης με το s σε cm και το t σε sec) για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

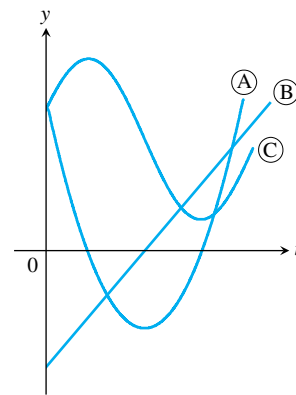


- (α) Πόσος χρόνος απαιτήθηκε για να διανύσουν πέφτοντας τα πρώτα 160 cm οι σφαίρες; Ποια η μέση ταχύτητά τους για το χρονικό αυτό διάστημα;
- (β) Πόσο γρήγορα έπεφταν οι σφαίρες τη στιγμή που έφταναν στο 160-στό cm; Πόση ήταν η επιτάχυνσή τους τη στιγμή εκείνη;
- (γ) Περίπου πόσο γρήγορα αναβόσβηνε το φλας στη φωτογραφία (αναλαμπές ανά δευτερόλεπτο);
18. **Μάθετε γράφοντας** Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2.22 δείχνουν τη θέση s , την ταχύτητα $v = ds/dt$, και την επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$ ενός ευθύγραμμου κινούμενου σώματος, συναρτήσει του χρόνου t . Αναγνωρίστε κάθε καμπύλη, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
19. **Μάθετε γράφοντας** Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2.23 δείχνουν τη θέση s , την ταχύτητα $v = ds/dt$, και την επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$ ενός ευθύγραμμου κινούμενου σώματος, συναρτήσει του χρόνου t . Αναγνωρίστε κάθε καμπύλη, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

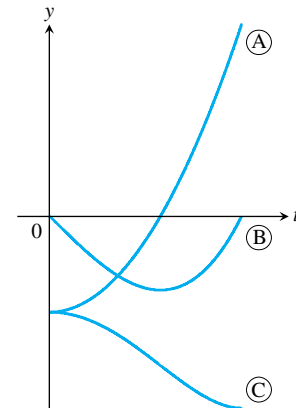
Οικονομικά

20. **Οριακό κόστος** Έστω ότι το κόστος (σε €) παραγωγής x πλυντηρίων δίδεται από τη σχέση
- $$c(x) = 2000 + 100x - 0,1x^2.$$

2.2. Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής



ΣΧΗΜΑ 2.22 Γραφικές παραστάσεις για την Άσκηση 18.



ΣΧΗΜΑ 2.23 Γραφικές παραστάσεις για την Άσκηση 19.

- (α) Βρείτε το μέσο κόστος ανά συσκευή, προκειμένου να παραχθούν τα πρώτα 100 πλυντήρια.
- (β) Βρείτε το οριακό κόστος όταν παράγονται 100 πλυντήρια.
- (γ) Δείξτε ότι το οριακό κόστος, όταν παράγονται 100 πλυντήρια, ισούται περίπου με το κόστος παραγωγής ενός επιπλέον πλυντηρίου μετά τα πρώτα 100. (Υπολογίστε απευθείας το κόστος αυτό.)
21. **Οριακά έσοδα** Έστω ότι το έσοδο (σε ευρώ) από την πώληση x πλυντηρίων δίδεται από τη σχέση

$$r(x) = 20.000 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

- (α) Βρείτε το οριακό έσοδο όταν παράγονται 100 συσκευές.
- (β) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $r'(x)$ για να εκτιμήσετε την αύξηση των εσόδων που προκύπτει όταν αυξηθεί η παραγωγή από 100 σε 101 πλυντήρια εβδομαδιαίως.
- (γ) Βρείτε το όριο της συναρτήσεως $r'(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Τι νόημα έχει το αποτέλεσμα αυτό;

Περισσότερες εφαρμογές

22. **Βακτηριακός πληθυσμός** Αφού προστέθηκε βακτηριοκτόνος ουσία σε μια καλλιέργεια βακτηρίων, τα βακτήρια συνέχισαν για λίγο να πολλαπλασιάζονται, προτού ο πληθυσμός τους αρχίσει να μειώνεται. Ο πληθυσμός των βακτηρίων τη χρονική στιγμή t (σε ώρες) ήταν $b =$

$10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Να βρεθούν οι ρυθμοί αύξησης του πληθυσμού για

(α) $t = 0$ h.

(β) $t = 5$ h.

(γ) $t = 10$ h.

23. **Δεξαμενή που αδειάζει** Στο εσωτερικό μιας δεξαμενής που αδειάζει παραμένουν $Q(t) = 200(30 - t)^2$ λίτρα νερού t λεπτά (min) μετά την έναρξη της εκροής. Πόσο γρήγορα χύνεται το νερό στο τέλος των πρώτων 10 min; Ποιος ο μέσος ρυθμός εκροής κατά το χρονικό διάστημα των πρώτων 10 min;

- T** 24. **Δεξαμενή που αδειάζει** Για να αδειάσει μια γεμάτη δεξαμενή, απαιτούνται 12 h από τη στιγμή που ανοίγει η βρύση στον πυθμένα. Το βάθος y του υγρού, t ώρες μετά το άνοιγμα της βρύσης, δίδεται από τη σχέση

$$y = 6 \left(1 - \frac{t}{12} \right)^2 \text{ m.}$$

- (α) Βρείτε τον ρυθμό εκροής του υγρού dy/dt (m/h) τη χρονική στιγμή t .
- (β) Πότε κατεβαίνει γρηγορότερα και πότε αργότερα η στάθμη του υγρού της δεξαμενής; Ποιες οι τιμές της παραγώγου dy/dt τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές;
- (γ) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις συναρτήσεις y και dy/dt και σχολιάστε τη συμπεριφορά της y αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές της dy/dt .
25. **Μπαλόνι που φουσκώνει** Ο όγκος $V = (4/3)\pi r^3$ ενός σφαιρικού μπαλονιού εξαρτάται από την ακτίνα.
- (α) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του όγκου (m^3/m) ως προς την ακτίνα, όταν $r = 0,6$ m;
- (β) Πόσο περίπου αυξάνεται ο όγκος όταν η ακτίνα μεταβληθεί από 0,6 σε 0,7 m;
26. **Απογείωση αεροπλάνου** Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση που διανύει ένα αεροσκάφος στον διάδρομο πριν την απογείωση δίδεται από τη σχέση $D = (10/9)t^2$, όπου η απόσταση D μετριέται σε m από το σημείο εκκίνησης και ο χρόνος t μετριέται σε sec από τη στιγμή που ο πιλότος αφήνει τα φρένα. Το αεροσκάφος απογειώνεται όταν η ταχύτητά του φθάσει τα 200 km/h. Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται γι' αυτό, και πόση απόσταση διανύεται στο μεταξύ;
27. **Πίδακες ηφαιστειακής λάβας** Η ηφαιστειακή δραστηριότητα του όρους Kilauea Iki τον Νοέμβριο του 1959, στη Χαβάη, ξεκίνησε με εκτίναξη λάβας από πολλά σημεία του τοιχώματος του κρατήρα, αλλά αργότερα περιορίστηκε σε μια μικρή περιοχή στο κέντρο του κρατήρα, απ' όπου σε κάποια φάση εκτινάχθηκε κατακόρυφα λάβα που έφτασε στο ύψος-ρεκόρ των 600 m. Ποια ήταν η

ταχύτητα εξόδου της λάβας σε m/sec και ποια σε km/h; (Υπόδειξη: Αν η ταχύτητα ενός σωματιδίου λάβας είναι v_0 , τότε το ύψος του μετά από t sec θα είναι $s = v_0 t - 4,9t^2$ m. Βρείτε κατ' αρχάς τη χρονική στιγμή όπου $ds/dt = 0$. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.)

- T** Οι Ασκήσεις 28-31 αναφέρονται σε σωματίδιο που κινείται στον άξονα s . Δίδεται η συνάρτηση θέσεως του σωματιδίου $s = f(t)$ συναρτήσει του χρόνου t . Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα την f , την ταχύτητα $v(t) = ds/dt = f'(t)$ και την επιτάχυνση $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Σχολιάστε πώς επηρεάζει την κίνηση το πρόσημο και οι τιμές των v και a . Συμπεριλάβετε στα σχόλιά σας απαντήσεις στα εξής ερωτήματα:

- (α) Πότε είναι στιγμιαία ακίνητο το σωματίδιο;
- (β) Πότε κινείται προς τα αριστερά (κάτω) και πότε προς τα δεξιά (πάνω);
- (γ) Πότε αλλάζει κατεύθυνση;
- (δ) Πότε επιταχύνεται και πότε επιβραδύνεται;
- (ε) Πότε κινείται με μέγιστη ταχύτητα; Πότε με ελάχιστη;
- (στ) Πότε απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων;
28. $s = 200t - 4,9t^2$, $0 \leq t \leq 12,5$ (συμπαγές αντικείμενο που εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 200 m/sec).
29. $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \leq t \leq 5$
30. $s = t^3 - 6t^2 + 7t$, $0 \leq t \leq 4$
31. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 4$
32. **Ιπποδρομίες** Ένα καθαρόαιμο άλογο τρέχει σε μια κούρσα 10 γύρων στον ιππόδρομο (ο γύρος έχει μήκος 200 περίπου μέτρα). Καθώς το άλογο περατώνει κάθε γύρο (I), περνώντας από την αφετηρία, ένας αφέτης καταγράφει τον χρόνο (t) από την έναρξη της κούρσας, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

- (α) Σε πόσο χρόνο τελειώνει την κούρσα το άλογο;
- (β) Με πόση μέση ταχύτητα διανύει τους πρώτους 5 γύρους;
- (γ) Με πόση περίπου ταχύτητα καλπάζει το άλογο τη στιγμή που συμπληρώνει τον 3^ο γύρο;
- (δ) Σε ποιο τμήμα της κούρσας τρέχει με μέγιστη ταχύτητα το άλογο;
- (ε) Σε ποιο τμήμα της κούρσας τρέχει με μέγιστη επιτάχυνση;

2.3

Παράγωγοι γινομένου, πηλίκου και αρνητικής δύναμης

Γινόμενα • Πηλίκα • Αρνητικές ακέραιες δυνάμεις του x

Συνεχίζουμε να εξετάζουμε τρόπους παραγωγίσις συναρτήσεων, παρακάμπτοντας την εφαρμογή του ορισμού.

Γινόμενα

Παρόλο που η παράγωγος του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων τους, η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων δεν ισούται με το γινόμενο των παραγώγων τους. Παραδείγματος χάριν,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \text{ ενώ } \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα δύο γινομένων, όπως θα δούμε.

Κανόνας 5 Παράγωγος γινομένου

Αν οι u και v είναι διαφορίσιμες στο x , τότε και το γινόμενό τους uv θα είναι διαφορίσιμο στο x , και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Η παράγωγος του γινομένου uv ισούται με u επί την παράγωγο της v συν v επί την παράγωγο της u . Σε τονικό συμβολισμό, $(uv)' = uv' + vu'$.

Παράδειγμα 1 Κάνοντας χρήση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου

Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως

$$y = \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right).$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου με $u = 1/x$ και $v = x^2 + (1/x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \quad \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx}, \text{ και} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3}. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}, \text{ βάσει του} \end{aligned}$$

Παράδειγματος 3 της
Ενότητας 1.5.

Απόδειξη του Κανόνα 5

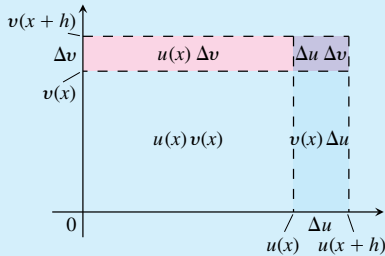
$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Για να μετατρέψουμε το κλάσμα αυτό σε ισοδύναμό του που περιέχει πηλίκα διαφορών ώστε να αναγνωρίσουμε τις παραγώγους των u και v , προσθαφαιρούμε τον όρο $u(x+h)v(x)$ στον αριθμητή:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

Γραφική απεικόνιση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου

Αν οι $u(x)$ και $v(x)$ είναι αμφοτέρωθες θετικές και αύξουσες, και αν $h > 0$,



τότε η συνολική σκιασμένη επιφάνεια στο σχήμα ισούται με

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u\Delta v.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής με h παίρνουμε

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}.$$

Καθώς $h \rightarrow 0^+$,

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \rightarrow 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0,$$

και άρα

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}. \end{aligned}$$

Καθώς το h τείνει στο μηδέν, η $u(x+h)$ τείνει στην τιμή $u(x)$, αφού η συνάρτηση u είναι διαφορίσιμη και άρα συνεχής στο x . Έτσι τα δύο κλάσματα τείνουν, αντίστοιχα, στις τιμές dv/dx στο x και du/dx στο x . Με άλλα λόγια,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου.

Παράδειγμα 2 Υπολογισμός παραγώγου από αριθμητικές τιμές

Έστω $y = uv$ το γινόμενο δύο συναρτήσεων u και v . Να βρεθεί η $y'(2)$ αν δίδονται οι τιμές

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad \text{και} \quad v'(2) = 2.$$

Λύση Από τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου,

$$y' = (uv)' = uv' + vu',$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Πηλίκα

Κατά τον ίδιο τρόπο που η παράγωγος του γινομένου δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων δεν ισούται με το γινόμενο των παραγώγων τους, έτσι και η παράγωγος του πηλίκου δεν ισούται με το πηλίκο των παραγώγων. Αντ' αυτού, ισχύει ο λεγόμενος κανόνας παραγωγίσεως πηλίκου.

Κανόνας 6 Παράγωγος πηλίκου

Αν οι u και v είναι διαφορίσιμες στο x και αν $v(x) \neq 0$, τότε και το πηλίκο u/v θα είναι διαφορίσιμο στο x , και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Παράδειγμα 3 Κάνοντας χρήση του κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου

Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως του πηλίκου με $u = t^2 - 1$ και $v = t^2 + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} & \frac{du}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2} \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Απόδειξη του Κανόνα 6

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{h v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

Για να μετατρέψουμε το κλάσμα αυτό σε ισοδύναμό του που περιέχει πηλίκια διαφορών ώστε να αναγνωρίσουμε τις παραγώγους των u και v , προσθαφαιρούμε τον όρο $v(x)u(x)$ στον αριθμητή:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{h v(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.\end{aligned}$$

Αν τώρα πάρουμε το όριο του κλάσματος, θα προκύψει ο κανόνας παραγωγίσεως πηλίκου.

Αρνητικές ακέραιες δυνάμεις του x

Η παράγωγος αρνητικής ακέραιας δύναμης δίνεται από τον ίδιο τύπο που ισχύει για θετική ακέραια δύναμη.

Κανόνας 7 Παράγωγος αρνητικής ακέραιας δύναμης

Αν n αρνητικός ακέραιος και $x \neq 0$, τότε

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Παράδειγμα 4 Κάνοντας χρήση του Κανόνα 7

$$(a) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4 \frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

CD-ROM**Δικτυότοπος****Βιογραφικά στοιχεία**

René Descartes
(Καρτέσιος)
(1596-1650)

Απόδειξη του Κανόνα 7 Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου. Αν n είναι αρνητικός ακέραιος, τότε $n = -m$, όπου m θετικός ακέραιος. Τότε θα είναι $x^n = x^{-m} = 1/x^m$, και συνεπώς

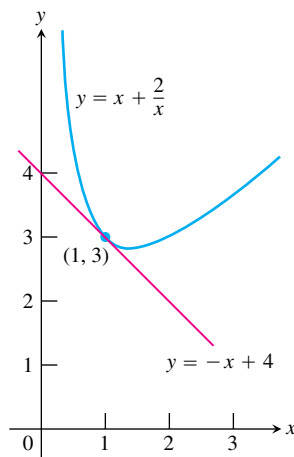
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\ &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{Παράγωγος πηλίκου} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{για } u = 1 \text{ και } v = x^m \\ &= -mx^{-m-1} && \text{Εφόσον } m > 0, \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\ &= nx^{n-1}. && \text{Εφόσον } -m = n\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5 Εφαπτομένη καμπύλης

Βρείτε μια εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$y = x + \frac{2}{x}$$

στο σημείο $(1, 3)$ (Σχήμα 2.24).



ΣΧΗΜΑ 2.24 Η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x + (2/x)$ στο σημείο $(1, 3)$. Η καμπύλη έχει άλλο ένα σκέλος στο τρίτο τεταρτημόριο, το οποίο όμως δεν φαίνεται εδώ. Στο Κεφάλαιο 3 θα δείτε πώς σχεδιάζουμε τέτοιου είδους συναρτήσεις.

Λύση Η κλίση της καμπύλης είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

Στο σημείο $x = 1$ η κλίση έχει τιμή

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

Η ευθεία που διέρχεται από το $(1, 3)$ με κλίση $m = -1$ θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{Εξίσωση σημείου-κλίσεως} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4. \end{aligned}$$

Αναλόγως του εκάστοτε προβλήματος, μερικοί κανόνες παραγωγής είναι περισσότερο κοπιώδεις από άλλους στην εφαρμογή τους. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 Επιλέγοντας ποιον κανόνα θα εφαρμόσουμε

Αντί να εφαρμόσουμε τον κανόνα παραγωγής πηλίκου για να βρούμε την παράγωγο της

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

αναπτύσσουμε τον αριθμητή και διαιρούμε με x^4 :

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Χρησιμοποιούμε, κατόπιν, τους κανόνες παραγωγής αθροίσματος και δυνάμεως:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7 Η αντίδραση του οργανισμού σε φάρμακο

Η αντίδραση του οργανισμού σε μια χορηγούμενη δόση φαρμάκου παριστάνεται μερικές φορές από μια εξίσωση της μορφής

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right),$$

όπου C μια θετική σταθερά και M είναι η απορροφηθείσα από το αίμα ποσότητα του φαρμάκου. Αν ο οργανισμός αντιδρά αυξάνοντας την πίεση του αίματος, τότε η μεταβλητή R μετριέται σε χιλιοστά υδραργύρου· αν πάλι μεταβάλλει τη θερμοκρασία του, τότε η R μετριέται σε βαθμούς· κ.ο.κ.

Βρείτε την dR/dM . Η παράγωγος αυτή, ειδικά ως συνάρτηση της M , καλείται η *ευαισθησία* του οργανισμού στο φάρμακο.

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dM} &= 2M \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right) + M^2 (-1/3) \\ &= MC - M^2 \end{aligned}$$

Παράγωγοι γινομένου, δύναμης, και σταθερού πολλαπλασίου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.3

Υπολογισμοί παραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-4, να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος κάθε συναρτήσεως.

1. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

2. $w = 3z^{-3} - \frac{1}{z}$

3. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$

4. $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, να βρεθεί η y' (α) εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου και (β) εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των παραγόντων ώστε να προκύψει ένα άθροισμα απλούστερων όρων προς παραγωγή.

5. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

6. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

Να βρεθεί η παράγωγος κάθε συναρτήσεως στις Ασκήσεις 7-14.

7. $y = \frac{2x+5}{3x-2}$

8. $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0,5}$

9. $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

10. $v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$

11. $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$

12. $r = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta} \right)$

13. $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

14. $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

Στις Ασκήσεις 15-18, να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος κάθε συναρτήσεως.

15. $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

16. $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$

17. $w = \left(\frac{1+3z}{3z} \right) (3-z)$

18. $p = \left(\frac{q^2+3}{12q} \right) \left(\frac{q^4-1}{q^3} \right)$

Χρήση αριθμητικών τιμών

19. Έστω ότι οι u και v είναι συναρτήσεις του x διαφορίσιμες στο $x = 0$ και ότι

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = 3$$

$$v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων παραγώγων στο $x = 0$.

(α) $\frac{d}{dx}(uv)$

(β) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

(γ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$

(δ) $\frac{d}{dx}(7v-2u)$

20. Έστω ότι οι u και v είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x και ότι

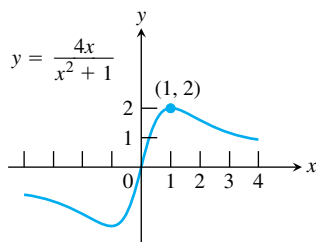
$$\begin{aligned} u(1) &= 2, & u'(1) &= 0 \\ v(1) &= 5, & v'(1) &= -1. \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων παραγώγων στο $x = 1$.

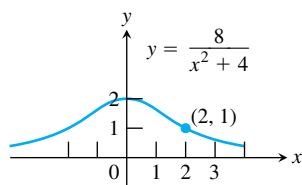
$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \frac{d}{dx}(uv) & & (\beta) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \\ (\gamma) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) & & (\delta) \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u) \end{aligned}$$

Κλίσεις και εφαπτομένες

21. Βρείτε την εφαπτομένη της *οφιοειδούς του Νεύτωνα* (δείτε το ακόλουθο σχήμα) στην αρχή των αξόνων και στο σημείο $(1, 2)$.



22. Βρείτε την εφαπτομένη της *μάγισσας της Agnesi* (δείτε το ακόλουθο σχήμα) στο σημείο $(2, 1)$.



23. Η καμπύλη $y = ax^2 + bx + c$ διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τα a , b , και c .
24. Οι καμπύλες $y = x^2 + ax + b$ και $y = cx - x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $(1, 0)$. Βρείτε τα a , b , και c .

Θεωρία και παραδείγματα

25. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση v που εμφανίζεται στον τύπο της παραγώγου γινομένου έχει σταθερή τιμή c . Τι δηλώνει τότε ο κανόνας παραγωγίσεως γινομένου, και τι σημαίνει αυτό για τον κανόνα παραγωγίσεως σταθερού πολλαπλασίου;

26. *Παράγωγος αντιστρόφου*

- (α) Ο κανόνας παραγωγίσεως αντιστρόφου λέει ότι σε κάθε σημείο όπου η συνάρτηση $v(x)$ είναι διαφορίσιμη και διάφορη του μηδενός,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}.$$

Δείξτε ότι ο κανόνας αυτός αποτελεί ειδική περίπτωση του κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου.

- (β) Δείξτε ότι ο τύπος της παραγώγου αντιστρόφου συνδυαζόμενος με τον τύπο της παραγώγου γινομένου οδηγούν στον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου.

27. *Γενίκευση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου* Ο τύπος

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

μας δίνει την παράγωγο του γινομένου uv δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων του x .

- (α) Ποιος είναι ο αντίστοιχος τύπος της παραγώγου του γινομένου uvw τριών διαφορίσιμων συναρτήσεων του x ;
- (β) Ποιος ο τύπος της παραγώγου του γινομένου $u_1 u_2 u_3 u_4$ τεσσάρων διαφορίσιμων συναρτήσεων του x ;
- (γ) Ποιος ο τύπος της παραγώγου του γινομένου $u_1 u_2 u_3 \cdots u_n$ ενός πεπερασμένου πλήθους n διαφορίσιμων συναρτήσεων του x ;

28. *Ρητές δυνάμεις*

- (α) Βρείτε την $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$ γράφοντας το $x^{3/2}$ ως $x \cdot x^{1/2}$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου. Γράψτε την απάντησή σας σε μορφή γινομένου ρητού αριθμού επί μια ρητή δύναμη του x . Με παρόμοιο τρόπο απαντήστε στα (β) και (γ).

- (β) Βρείτε το $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$.

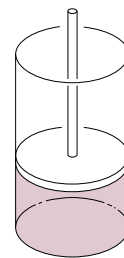
- (γ) Βρείτε το $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$.

- (δ) Τι συμπεραίνετε από τις απαντήσεις σας στα (α), (β), και (γ); Οι ρητές δυνάμεις θα μελετηθούν περαιτέρω στην Ενότητα 2.6.

29. *Πίεση κυλινδρικού δοχείου* Αν ένας κύλινδρος περιέχει αέριο σε σταθερή θερμοκρασία T , η πίεση P συνδέεται με τον όγκο V μέσω του τύπου

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

όπου a , b , n , και R είναι σταθερές. Βρείτε την dP/dV .



30. *Η βέλτιστη ποσότητα προς παραγωγή* Σύμφωνα με έναν τύπο απογραφής που χρησιμοποιείται στα οικονομικά, το μέσο εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής, πληρωμής, και αποθήκευσης εμπορεύματος ισούται με

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

όπου q είναι η ποσότητα του εμπορεύματος που παραγέλλεται όταν έχουν λιγοστέψει τα αποθέματα (που μπορεί να είναι παπούτσια, ραδιόφωνα, σκούπες, ή οτιδήποτε)· k είναι το πάγιο κόστος ανά παραγγελία (σταθερό κάθε φορά, ανεξαρτήτως του πόσο συχνά γίνονται παραγγελίες)· c είναι το κόστος ενός τεμαχίου (σταθερό)· m είναι το πλήθος των τεμαχίων που πωλήθηκαν κάθε βδομάδα (σταθερό)· και h είναι το εβδομαδιαίο κόστος αποθήκευσης ανά τεμάχιο (σταθερά που περιλαμβάνει τα έξοδα ενοικίασης του χώρου, παροχής νερού, ρεύματος, τηλεφώνου, και ασφάλισης). Βρείτε τα dA/dq και d^2A/dq^2 .

2.4

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παράγωγος ημιτόνου • Παράγωγος συνημιτόνου • Απλή αρμονική κίνηση • Παράγωγοι των υπόλοιπων βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Πολλά από τα φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν έχουν περιοδικό χαρακτήρα (ηλεκτρομαγνητικά πεδία, καρδιακοί ρυθμοί, παλίρροιες, κλίμα). Ένα απροσδόκητο όσο και όμορφο θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού έρχεται να μας πληροφορήσει ότι κάθε περιοδική συνάρτηση (μοντέλο περιοδικού φαινομένου) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει ημιτόνων και συνημιτόνων. Συνεπώς, οι παράγωγοι των ημιτόνων και των συνημιτόνων έχουν βαρύνουσα σημασία στην περιγραφή περιοδικών μεταβολών. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πώς παραγωγίζονται οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Παράγωγος ημιτόνου

Για να βρούμε την παράγωγο της $y = \sin x$, συνδυάζουμε τα όρια του Παραδείγματος 10(α) καθώς και το Θεώρημα 6 της Ενότητας 1.2, με την ταυτότητα του αθροίσματος γωνίας:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h. \quad (1)$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad \text{Ορισμός παραγώγου}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \quad \text{Εξ. (1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x.$$

Παράδειγμα 10(α) και
Θεώρημα 6, Ενότητα 1.2

Το ακτινικό μέτρο στον απειροστικό λογισμό

Αν διερωτάστε γιατί στον λογισμό χρησιμοποιούμε το ακτινικό μέτρο, ενώ ο υπόλοιπος κόσμος φαίνεται να χρησιμοποιεί μοίρες, η απάντηση έγκειται στο ότι η παράγωγος του ημιτόνου είναι το συνημίτονο. Η παράγωγος του $\sin x$ ισούται με $\cos x$ μόνο αν το x μετρείται σε ακτίνια, αφού η σχέση

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

αληθεύει μόνο όταν το h μετρείται σε ακτίνια.

Η παράγωγος της συναρτήσεως ημιτόνου είναι η συνάρτηση συνημιτόνου.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Παράδειγμα 1 Παράγωγοι εκφράσεων που περιέχουν ημίτονο

(α) $y = x^2 - \sin x :$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= 2x - \cos x. \end{aligned}$$

Παράγωγος διαφοράς

(β) $y = \frac{\sin x}{x} :$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}. \end{aligned}$$

Παράγωγος πηλίκου



Παράγωγος συνημιτόνου

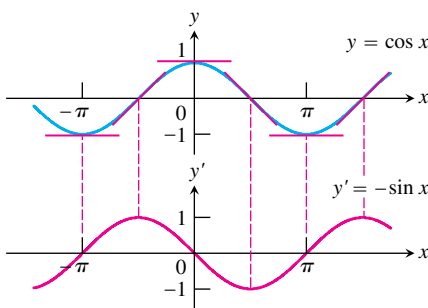
Βάσει του τύπου αθροίσματος γωνιών,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h, \quad (2)$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} && \text{Ορισμός παραγώγου} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} && \text{Εξ. (2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10(α) και
Θεώρημα 6, Ενότητα 1.2



ΣΧΗΜΑ 2.25 Η καμπύλη $y' = -\sin x$ προέκυψε με τον υπολογισμό των κλίσεων των εφαπτομένων της καμπύλης $y = \cos x$.

Η παράγωγος της συναρτήσεως συνημιτόνου είναι η αντίθετη της συναρτήσεως ημιτόνου.

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Το Σχήμα 2.25 δείχνει πώς μπορούμε να φθάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω γραφικών παραστάσεων.

Παράδειγμα 2 Κανόνες παραγωγισής ξανά

(α) $y = \sin x \cos x$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Παράγωγος} \\ &= \sin x (-\sin x) + \cos x (\cos x) && \text{γινομένου} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

(β) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} && \text{Παράγωγος} \\ &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x (0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} && \text{πηλίκου} \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Απλή αρμονική κίνηση

Η κίνηση ενός προσδεμένου σε ελατήριο σώματος που ταλαντώνεται ελεύθερα πάνω-κάτω αποτελεί παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε *απλή αρμονική κίνηση*. Το ακόλουθο παράδειγμα αναφέρεται στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να αντιτίθενται στην κίνηση επιβραδύνοντας το σώμα, π.χ. τριβές ή ανώσεις.



Παράδειγμα 3 Κίνηση σώματος προσδεμένου σε ελατήριο

Ένα σώμα που εξαρτάται από ελατήριο (Σχήμα 2.26) απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κατά 5 μονάδες μήκους και κατόπιν αφήνεται να ταλαντωθεί τη χρονική στιγμή $t = 0$. Σε τυχαία μεταγενέστερη χρονική στιγμή t , η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι

$$s = 5 \cos t.$$

Ποια θα είναι τη στιγμή t η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του;

Λύση Έχουμε

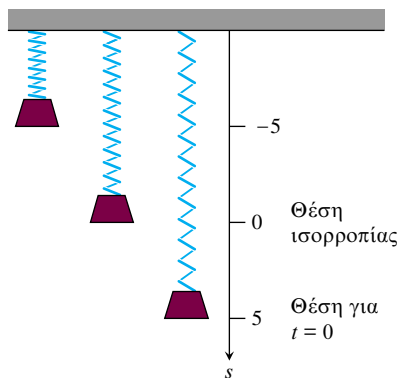
Θέση: $s = 5 \cos t$

Ταχύτητα: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \sin t$

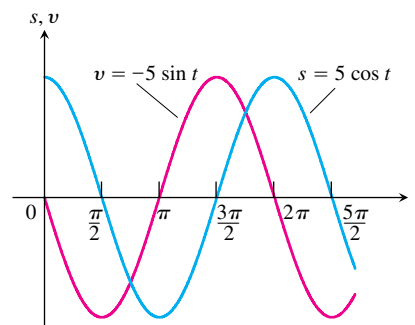
Επιτάχυνση: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \cos t.$

Ας δούμε τι μπορούν να μας πουν οι εξισώσεις αυτές:

1. Καθώς ο χρόνος περνά, το σώμα κινείται πάνω κάτω μεταξύ των ακραίων θέσεων $s = -5$ και $s = 5$ στον άξονα s . Το πλάτος της κίνησης ισούται με 5. Η περίοδος της κίνησης ισούται με 2π .
2. Η ταχύτητα $v = -5 \sin t$ αποκτά τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της, 5, όταν $\cos t = 0$, καθώς φαίνεται στο Σχήμα 2.27. Έτσι το μέτρο της ταχύτητας, $|v| = 5 |\sin t|$, μεγιστοποιείται όταν $\cos t = 0$, δηλαδή όταν $s = 0$ (το σώμα βρίσκεται τότε στη θέση ισορροπίας). Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\sin t = 0$, δηλαδή όταν $s = 5 \cos t = \pm 5$, δηλαδή στα ακραία σημεία της κίνησης.
3. Η τιμή της επιτάχυνσης είναι πάντα ακριβώς αντίθετη από την τιμή της συνάρτησης θέσεως. Όταν το σώμα βρίσκεται ψηλότερα από τη θέση ισορροπίας, η βαρύτητα το τραβά προς τα κάτω· όταν πάλι βρίσκεται χαμηλότερα από τη θέση ισορροπίας, το ελατήριο το τραβά προς τα πάνω.
4. Η επιτάχυνση, $a = -5 \cos t$, μηδενίζεται μονάχα στη θέση ισορροπίας, όπου $\cos t = 0$ καθώς η δύναμη βαρύτητας εξουδετερώνεται πλήρως από τη δύναμη του ελατηρίου. Σε κάθε άλλη θέση, οι δύο δυνάμεις έχουν άνισα μέτρα και η επιτάχυνση είναι μη μηδενική. Η επιτάχυνση παίρνει τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της στα ακραία σημεία της κίνησης, όπου $\cos t = \pm 1$.



ΣΧΗΜΑ 2.26 Το ταλαντούμενο σώμα του Παραδείγματος 3.



ΣΧΗΜΑ 2.27 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως και ταχύτητας του σώματος του Παραδείγματος 3.

Παράδειγμα 4 Παράγωγος επιτάχυνσης

Η παράγωγος επιτάχυνσης για την απλή αρμονική κίνηση του Παραδείγματος 3 ισούται με

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \sin t.$$

Οι μέγιστες (κατά μέτρο) τιμές προκύπτουν όταν $\sin t = \pm 1$, όχι δηλαδή στα ακραία σημεία αλλά στη θέση ισορροπίας, όπου η επιτάχυνση αλλάζει φορά και συνεπώς πρόσημο.

Παράγωγοι των υπόλοιπων Βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εφόσον οι $\sin x$ και $\cos x$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x , οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

θα είναι επίσης διαφορίσιμες σε κάθε x στο οποίο ορίζονται. Οι παράγωγοί τους, που μπορούν να υπολογιστούν από τον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου, δίδονται ακολούθως:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \quad (6)$$

Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο στους τύπους παραγώγων της συνεφαπτομένης και της συντέμνουσας.

Για να δείτε πώς γίνονται οι παραπάνω υπολογισμοί, θα αποδείξουμε εδώ την Εξίσωση (3). Οι υπόλοιπες παραγωγίσεις αφήνονται για την Άσκηση 44.

Παράδειγμα 5 Παράγωγος εφαπτομένης

Να βρεθεί η $d(\tan x)/dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} && \text{Παράγωγος πηλίκου} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6 Μια δεύτερη παράγωγος τριγωνομετρικής συναρτήσεως

Να βρεθεί η y'' όπου $y = \sec x$.

Λύση

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

Εξ. (4)

$$y'' = \frac{d}{dx} (\sec x \tan x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx} (\tan x) + \tan x \frac{d}{dx} (\sec x) \quad \text{Παράγωγος γινομένου}$$

$$= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εφόσον οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, θα είναι και συνεχείς, βάσει του Θεωρήματος 1 της Ενότητας 2.1. Έτσι οι $\sin x$ και $\cos x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x , πράγμα που συμφωνεί με τα όσα είπαμε στην Ενότητα 1.4. Επίσης, οι συναρτήσεις $\sec x$ και $\tan x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x διάφορο ενός μη μηδενικού ακέραιου πολλαπλασίου του $\pi/2$, ενώ οι $\csc x$ και $\cot x$ θα είναι συνεχείς για κάθε x διάφορο ενός ακέραιου πολλαπλασίου του π . Για καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές, λοιπόν, θα είναι $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ εφόσον η $f(c)$ ορίζεται. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε με απευθείας αντικατάσταση τα όρια διαφορών αλγεβρικών συνδυασμών ή και σύνθετων συναρτήσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7 Εύρεση τριγωνομετρικού ορίου

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4**Παράγωγοι**

Στις Ασκήσεις 1-12, βρείτε το dy/dx .

1. $y = -10x + 3 \cos x$

2. $y = \frac{3}{x} + 5 \sin x$

3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

4. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

5. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

6. $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

7. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

8. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

11. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

12. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

Στις Ασκήσεις 13-16, βρείτε το ds/dt .

13. $s = \tan t - t$

14. $s = t^2 - \sec t + 1$

15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

16. $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

Στις Ασκήσεις 17-20, βρείτε το $dr/d\theta$.

17. $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$

18. $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

19. $r = \sec \theta \csc \theta$

20. $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

Στις Ασκήσεις 21-24, βρείτε το dp/dq .

21. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

22. $p = (1 + \csc q) \cos q$

23. $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

24. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

25. Βρείτε το y'' αν

(α) $y = \csc x$.

(β) $y = \sec x$.

26. Βρείτε το $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ αν

(α) $y = -2 \sin x$.

(β) $y = 9 \cos x$.

Εφαπτομένες

Στις Ασκήσεις 27-30, σχεδιάστε τις καμπύλες και μαζί τις εφαπτομένες τους στα αναφερόμενα διαστήματα και σημεία, αντίστοιχα. Ονομάστε κάθε καμπύλη και την εφαπτομένη της σημειώνοντας στο διάγραμμα την εξίσωσή της.

27. $y = \sin x$, $-3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

$x = -\pi, 0, 3\pi/2$

28. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

$x = -\pi/3, 0, \pi/3$

29. $y = \sec x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

$x = -\pi/3, \pi/4$

30. $y = 1 + \cos x$, $-3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

$x = -\pi/3, 3\pi/2$

T Έχουν οι γραφικές παραστάσεις των Ασκήσεων 31-34 οριζόντιες εφαπτομένες στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\pi$; Αν ναι, σε ποια σημεία; Αν όχι, γιατί όχι; Σχεδιάστε τις συναρτήσεις με υπολογιστή για να υποστηρίξετε γραφικά τις απαντήσεις σας.

31. $y = x + \sin x$

32. $y = 2x + \sin x$

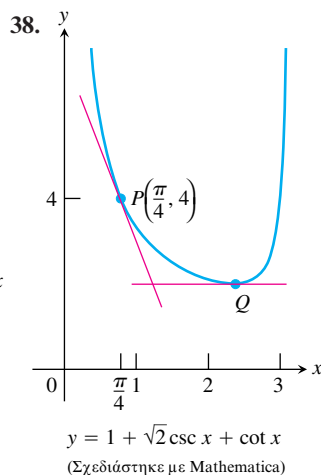
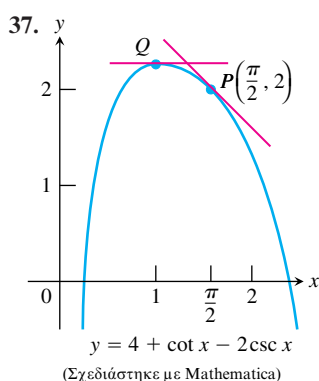
33. $y = x - \cot x$

34. $y = x + 2 \cos x$

35. Βρείτε όλα τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, για τα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη της ευθείας $y = 2x$. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη και τις εφαπτομένες της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

36. Βρείτε όλα τα σημεία επί της καμπύλης $y = \cot x$, $0 < x < \pi$, για τα οποία η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη της ευθείας $y = -x$. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη και τις εφαπτομένες της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

Στις Ασκήσεις 37 και 38, βρείτε μια εξίσωση για (α) την εφαπτομένη της καμπύλης στο P και (β) την οριζόντια εφαπτομένη στο Q .



Απλή αρμονική κίνηση

Στις Ασκήσεις 39 και 40, οι εξισώσεις που δίδονται περιγράφουν τη θέση $s = f(t)$ σώματος που κινείται ευθύγραμμα (s σε m, t σε sec). Να βρείτε την ταχύτητα (μέτρο και φορά), την επιτάχυνση και την παράγωγο επιτάχυνσης του σώματος τη στιγμή $t = \pi/4$ sec.

39. $s = 2 - 2 \sin t$

40. $s = \sin t + \cos t$

Θεωρία και παραδείγματα

41. **Μάθετε γράφοντας** Υπάρχει τιμή του c για την οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

γίνεται συνεχής στο $x = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. **Μάθετε γράφοντας** Υπάρχει τιμή του b για την οποία η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

γίνεται συνεχής στο $x = 0$; Διαφορίσιμη στο $x = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

43. Υπολογίστε το $d^{999}/dx^{999} (\cos x)$.

44. Να βρεθεί ένας τύπος για την παράγωγο ως προς x των συναρτήσεων

(α) $\sec x$.

(β) $\csc x$.

(γ) $\cot x$.

T 45. Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = \cos x$ για $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

για $h = 1, 0,5, 0,3$ και $0,1$. Κατόπιν, σε νέο σχήμα, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $h = -1, -0,5$ και $-0,3$. Τι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0^+$; Τι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0^-$; Ποιο φαινόμενο αναδεικνύεται εδώ;

46. Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = -\sin x$ για $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε και την

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

για $h = 1, 0,5, 0,3$ και $0,1$. Κατόπιν, σε νέο σχήμα, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $h = -1, -0,5$ και $-0,3$. Τι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0^+$; Τι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0^-$; Ποιο φαινόμενο αναδεικνύεται εδώ;

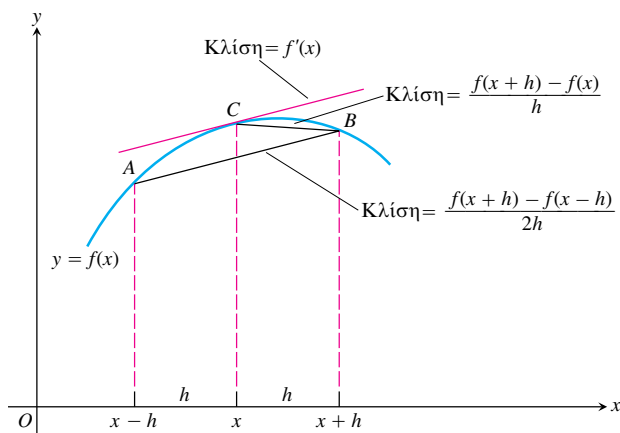
47. **Κεντρωμένα πηλίκια διαφορών** Το κεντρωμένο πηλίκιο διαφορών

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

χρησιμοποιείται συχνά για να προσεγγίσουμε αριθμητικά (με υπολογιστή) την παράγωγο $f'(x)$, κι αυτό γιατί (1) το όριο του καθώς $h \rightarrow 0$ ισούται με $f'(x)$ όταν υπάρχει η $f'(x)$, και (2) για δεδομένη τιμή του h συνήθως προσεγγίζει την $f'(x)$ καλύτερα απ' ό,τι το πηλίκιο διαφορών κατά Fermat

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Δείτε το επόμενο σχήμα.



- (α) Για να δείτε πόσο γρήγορα συγκλίνει το κεντρωμένο πηλίκο της $f(x) = \sin x$ στην παράγωγο $f'(x) = \cos x$, σχεδιάστε την $y = \cos x$ σε κοινό σχήμα με την

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$ για $h = 1, 0,5$ και $0,3$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της Ασκήσεως 45, για τις ίδιες τιμές του h .

- (β) Για να δείτε πόσο γρήγορα συγκλίνει το κεντρωμένο πηλίκο της $f(x) = \cos x$ στην παράγωγο $f'(x) = -\sin x$, σχεδιάστε την $y = -\sin x$ σε κοινό σχήμα με την

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$ για $h = 1, 0,5$ και $0,3$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της Ασκήσεως 46, για τις ίδιες τιμές του h .

48. Προσοχή στον χειρισμό κεντρωμένων πηλίκων (Συνέχεια της Ασκήσεως 47) Το πηλίκο

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

ενδέχεται να έχει όριο καθώς $h \rightarrow 0$, ακόμη και όταν η f δεν έχει παράγωγο στο x . Για παράδειγμα, θεωρήστε την $f(x) = |x|$ και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}.$$

Όπως θα δείτε, το όριο υπάρχει παρά το γεγονός ότι η $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$. Δίδαγμα: Προτού κάνετε χρήση κεντρωμένων πηλίκων διαφορών, βεβαιωθείτε ότι υπάρχει η παράγωγος.

- T** 49. Μάθετε γράφοντας: Κλίση γραφικής παράστασης εφαπτομένης Σχεδιάστε την $y = \tan x$ και την παράγωγό της, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Δείχνει να παίρνει μια ελάχιστη ή μια μέγιστη τιμή η κλίση της εφαπτομένης; Παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές η κλίση; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Μάθετε γράφοντας: Κλίση γραφικής παράστασης συνεφαπτομένης Σχεδιάστε την $y = \cot x$ και την παράγωγό της, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $0 < x < \pi$. Δείχνει να παίρνει μια ελάχιστη ή μια μέγιστη τιμή η κλίση της συνεφαπτομένης; Παίρνει ποτέ θετικές τιμές η κλίση; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- T** 50. Μάθετε γράφοντας: Διερεύνηση του $(\sin kx)/x$ Σχεδιάστε τις $y = (\sin x)/x$, $y = (\sin 2x)/x$, και $y = (\sin 4x)/x$, σε κοινό σχήμα, στο διάστημα $-2 \leq x \leq 2$. Σε ποια σημεία δείχνουν να τέμνουν τον άξονα y οι καμπύλες; Τον τέμνουν πραγματικά; Τι είδους συμπεριφορά των συναρτήσεων $y = (\sin 5x)/x$ και $y = (\sin(-3x))/x$ θα αναμένετε καθώς $x \rightarrow 0$; Γιατί; Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη $y = (\sin kx)/x$ για άλλες τιμές του k ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- T** 51. Ακτίνια έναντι μοιρών: παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων με όρισμα σε μοίρες Τι συμβαίνει με τις παραγώγους των $\sin x$ και $\cos x$ αν το x μετريέται σε μοίρες αντί σε ακτίνια; Για να το μάθετε, ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

- (α) Αφού προγραμματίσετε τον υπολογιστή σας να μετρά γωνίες σε μοίρες, ("degree mode") παραστήστε γραφικά την

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

και προβείτε σε μια εκτίμηση του $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$. Συγκρίνετε την απάντησή σας με τον αριθμό $\pi/180$. Υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίο το όριο οφείλει να ισούται με $\pi/180$;

- (β) Με τον υπολογιστή σας πάντα σε μοίρες, υπολογίστε κατ' εκτίμηση το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

- (γ) Επιστρέψτε στην απόδειξη του τύπου της παραγώγου του $\sin x$ στο κείμενο και επαναλάβετε τα στάδια της απόδειξης, με τον υπολογιστή σας σε μοίρες όταν υπολογίζετε όρια. Ποιος τύπος προκύπτει για την παράγωγο;

- (δ) Επαναλάβετε την απόδειξη για την παράγωγο του $\cos x$, με τον υπολογιστή σας σε μοίρες όταν υπολογίζετε όρια. Ποιος τύπος προκύπτει τώρα για την παράγωγο;

- (ε) Τα μειονεκτήματα των τύπων όπου οι γωνίες είναι σε μοίρες αναδύονται όλο και περισσότερο καθώς αρχίζετε να παίρνετε παραγώγους ανώτερης τάξεως. Δοκιμάστε το. Ποιες είναι οι δεύτερες και τρίτες παράγωγοι των $\sin x$ και $\cos x$ με το x σε μοίρες;

2.5

Κανόνας αλυσιδωτής παραγωγής και παραμετρικές εξισώσεις

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης • Παραγωγή «από έξω προς τα μέσα» • Επανειλημμένη χρήση του κανόνα παραγωγής
• Κλίσεις παραμετριοποιημένων καμπυλών • Κανόνας αλυσιδωτής παραγωγής δυνάμεων • Κύβοι πάγου που λειώνουν

Όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 3 και 4, πολλές τεχνικές εφαρμογές του απειροστικού λογισμού ενέχουν την εύρεση μιας συναρτήσεως της οποίας γνωρίζουμε την παράγωγο. Μερικές φορές η συνάρτηση αυτή βρίσκεται αμέσως. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι $\cos x$ είναι η παράγωγος του $\sin x$, ότι $2x$ είναι η παράγωγος του x^2 , και ότι το άθροισμα $\cos x + 2x$ είναι η παράγωγος του $\sin x + x^2$. Αλλά τι γίνεται όταν μας δίδεται το γινόμενο (και όχι το άθροισμα) δύο παραγώγων; Γνωρίζουμε βέβαια ότι η ζητούμενη συνάρτηση δεν είναι το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων, αφού η παράγωγος του γινομένου δεν ισούται με το γινόμενο των παραγώγων.

Από πού προέρχεται λοιπόν το γινόμενο παραγώγων; Η απάντηση έχει να κάνει με έναν κανόνα παραγωγής σύνθετων συναρτήσεων, που καλείται «κανόνας αλυσιδωτής παραγωγής». Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε τον κανόνα αυτόν και τις χρήσεις του.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Ξεκινάμε με μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 Συσχετίζοντας παραγώγους

Η συνάρτηση $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ είναι η σύνθεση των $y = 2u$ και $u = 3x - 5$. Πώς συνδέονται οι παράγωγοι των τριών αυτών συναρτήσεων;

Λύση Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2, \quad \text{και} \quad \frac{du}{dx} = 3.$$

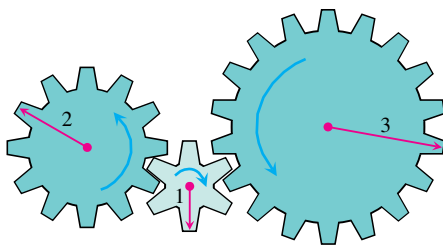
Εφόσον $6 = 2 \cdot 3$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Είναι άραγε τυχαίο το ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

Αν συλλογιστούμε ότι η παράγωγος δεν είναι παρά ένας ρυθμός μεταβολής, αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά ότι η παραπάνω σχέση είναι τουλάχιστον εύλογη. Αν η $y = f(u)$ μεταβάλλεται δύο φορές γρηγορότερα από την $u = g(x)$, η οποία μεταβάλλεται τρεις φορές γρηγορότερα από την x , τότε αναμένουμε ότι η y θα μεταβάλλεται έξι φορές γρηγορότερα από την x . Το τελικό αποτέλεσμα παραπέμπει σε ένα σύστημα οδοντωτών τροχών (Σχήμα 2.28).



C: y στροφές B: u στροφές A: x στροφές

ΣΧΗΜΑ 2.28 Όταν ο οδοντωτός τροχός A πάρει x στροφές, ο τροχός B παίρνει u στροφές και ο τροχός C παίρνει y στροφές. Αν συγκρίνουμε μεταξύ τους τις περιμέτρους ή τα γράναζια των τροχών, θα δούμε ότι $y = u/2$ και $u = 3x$, οπότε $y = 3x/2$. Συνεπώς, $dy/du = 1/2$, $du/dx = 3$, και $dy/dx = 3/2 = (dy/du)(du/dx)$.

Παράδειγμα 2 Συσχετίζοντας παραγώγους

Η συνάρτηση

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

είναι η σύνθεση των $y = u^2$ και $u = 3x^2 + 1$. Αν υπολογίσουμε τις

παραγώγους, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \quad u + 3x^2 + 1 \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

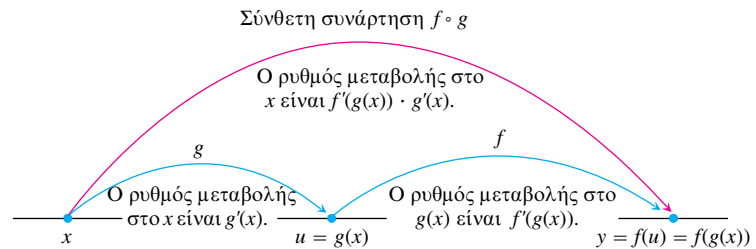
και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (9x^4 + 6x^2 + 1) = 36x^3 + 12x.$$

Και πάλι ισχύει ότι

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Η παράγωγος της σύνθετης συναρτήσεως $f(g(x))$ στο x ισούται με την παράγωγο της f στο $g(x)$ επί την παράγωγο της g στο x . Η παρατήρηση αυτή είναι γνωστή ως ο **κανόνας αλυσιδωτής παραγωγίσης** (Σχήμα 2.29).



ΣΧΗΜΑ 2.29 Οι ρυθμοί μεταβολής πολλαπλασιάζονται: Η παράγωγος της $f \circ g$ στο x ισούται με την παράγωγο της f στο σημείο $g(x)$ επί την παράγωγο της g στο σημείο x .

Θεώρημα 3 Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγωγίσης

Αν η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $u = g(x)$ και η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x , τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ θα είναι διαφορίσιμη στο x , και θα ισχύει ότι

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (1)$$

Σε συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, ισχύει ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

όπου η dy/du έχει υπολογιστεί στο σημείο $u = g(x)$.

Μια εύλογη σκέψη είναι να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τον κανόνα αυτόν γράφοντας

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

και παίρνοντας το όριο $\Delta x \rightarrow 0$. Η μέθοδος αυτή θα ήταν σωστή αν γνωρίζαμε ότι το Δu , η μεταβολή του u , είναι μη μηδενικό, πράγμα που όμως δεν μπορούμε να εγγυηθούμε. Μια μικρή μεταβολή στο x θα μπορούσε, ενδεχομένως, να μην προκαλέσει καμία μεταβολή στο u . Για την απόδειξη λοιπόν του κανόνα απαιτείται μια άλλη τακτική, και θα

κινηθούμε βάσει των εννοιών που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 3.6. (Δείτε το Παράρτημα 3.)

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης

Ένα σώμα κινείται επί του άξονα x έτσι ώστε η θέση του για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ να δίδεται από τη σχέση $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Βρείτε την ταχύτητά του συναρτήσει του t .

Λύση Όπως ξέρουμε, η ταχύτητα ισούται με dx/dt . Εδώ x είναι μια σύνθετη συνάρτηση: $x = \cos(u)$ και $u = t^2 + 1$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= -\sin(u) & x &= \cos(u) \\ \frac{du}{dt} &= 2t & u &= t^2 + 1\end{aligned}$$

Βάσει του κανόνα σύνθετης παραγωγίσης,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin(u) \cdot 2t \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1).\end{aligned}$$

Παραγωγή «από έξω προς τα μέσα»

Ένας χρήσιμος μνημονικός κανόνας για την αλυσιδωτή παραγωγή είναι ο εξής: Αν $y = f(g(x))$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι παραγωγίζουμε την «έξω» συνάρτηση f , αφήνοντας τη «μέσα» συνάρτηση $g(x)$ ως έχει και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με την παράγωγο της «μέσα» συναρτήσεως.

Παράδειγμα 4 Παραγωγή «από έξω προς τα μέσα»

Παραγωγίστε την $\sin(x^2 + x)$ ως προς x .

Λύση

$$\frac{dy}{dx} \sin(\underbrace{x^2 + x}_{\text{«μέσα» συνάρτηση}}) = \cos(\underbrace{x^2 + x}_{\text{ως έχει}}) \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{παράγωγος «μέσα» συνάρτησης}}$$

Επανελημμένη χρήση του κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης

Μερικές φορές χρειάζεται να εφαρμόσουμε επανειλημμένα τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης μέχρι να βρούμε την παράγωγο. Ιδού ένα παράδειγμα.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Johann Bernoulli
(1667-1748)

2.5. Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης και παραμετρικές εξισώσεις

Παράδειγμα 5 Μια «αλυσίδα» τριών κρίκων

Βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$.

Λύση Εδώ η εφαπτομένη ($\tan$) είναι συνάρτηση του $5 - \sin 2t$, ενώ το ημίτονο είναι συνάρτηση του $2t$, που με τη σειρά του είναι συνάρτηση του t . Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} (\tan(5 - \sin 2t)) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt} (5 - \sin 2t) && \text{Παράγωγος της } \tan u \text{ με } u = 5 - \sin 2t \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt} (2t)) && \text{Παράγωγος της } 5 - \sin u \text{ με } u = 2t \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2 (\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t). \end{aligned}$$

Κλίσεις παραμετρικοποιημένων καμπυλών

Μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη $(x(t), y(t))$ είναι **διαφορίσιμη** στο t αν οι x και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t . Αν σε ένα σημείο μιας διαφορίσιμης παραμετρικοποιημένης καμπύλης η μεταβλητή y αποτελεί επιπλέον διαφορίσιμη συνάρτηση του x , οι παράγωγοι dy/dt , dx/dt , και dy/dx σχετίζονται μέσω του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης:

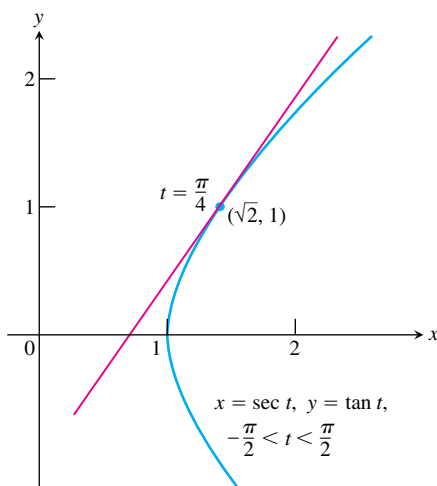
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Αν $dx/dt \neq 0$, μπορούμε διαιρώντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με το dx/dt να λύσουμε ως προς dy/dx .

Παραμετρικός τύπος της dy/dx

Αν και οι τρεις παράγωγοι υπάρχουν και είναι $dx/dt \neq 0$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad (4)$$



ΣΧΗΜΑ 2.30 Ο ένας κλάδος της υπερβολής του Παραδείγματος 6. Η Εξίσωση (4) ισχύει για όλα τα σημεία της καμπύλης, πλην του $(1, 0)$.

Παράδειγμα 6 Παραγωγή παραμετρικοποιημένης καμπύλης

Για τον δεξιό κλάδο της υπερβολής που ορίζεται παραμετρικά ως εξής:

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

να βρεθεί η εφαπτομένη στο σημείο $(\sqrt{2}, 1)$, όπου $t = \pi/4$ (Σχήμα 2.30).

Λύση Και οι τρεις παράγωγοι που εμφανίζονται στην Εξίσωση (4) υπάρχουν, και $dx/dt = \sec t \tan t \neq 0$ στο εν λόγω σημείο. Κατά συνέπεια ισχύει η Εξίσωση (4), και

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} \\ &= \frac{\sec t}{\tan t} \\ &= \csc t. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = \pi/4$ παίρνουμε

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/4} = \csc(\pi/4) = \sqrt{2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}x - 1. \end{aligned}$$

Αν το y ορίζεται παραμετρικά ως μια διπλή διαφορίσιμη συνάρτηση του x , τότε εφαρμόζοντας την Εξίσωση (4) επί της συναρτήσεως $dy/dx = y'$ μπορούμε να υπολογίσουμε το d^2y/dx^2 συναρτήσει του t :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \quad \text{Εξ. (4) με το } y' \text{ στη θέση του } y$$

Παραμετρικός τύπος της d^2y/dx^2

Αν οι εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ ορίζουν την y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x , τότε σε κάθε σημείο όπου $dx/dt \neq 0$, θα είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

Εύρεση του d^2y/dx^2 συναρτήσει του t

Βήμα 1. Εκφράζουμε το $y' = dy/dx$ συναρτήσει του t .

Βήμα 2. Βρίσκουμε το dy'/dt .

Βήμα 3. Διαιρούμε το dy'/dt με το dx/dt .

Παράδειγμα 7 Εύρεση του d^2y/dx^2 επί παραμετρικοποιημένης καμπύλης

Βρείτε το d^2y/dx^2 συναρτήσει του t αν $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Λύση

Βήμα 1: Εκφράζουμε το $y' = dy/dx$ συναρτήσει του t .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Βήμα 2: Παραγωγίζουμε το y' ως προς t .

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t} \right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2}. \quad \text{Παράγωγος πηλίκου}$$

Βήμα 3: Διαιρούμε το dy'/dt με το dx/dt .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3}$$

Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης δυνάμεων

Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της u η οποία είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x , τότε αντικαθιστώντας $y = f(u)$ στον τύπο της αλυσιδωτής παραγώγισης,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

οδηγούμαστε στη σχέση

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \frac{du}{dx}.$$

Ιδού ένα παράδειγμα εφαρμογής στην πράξη: Αν ο n είναι ακέραιος και $f(u) = u^n$, τότε οι κανόνες παραγώγισης δυνάμεων (δηλαδή οι κανόνες 2 και 7) συνεπάγονται ότι $f'(u) = nu^{n-1}$. Αν τώρα η u είναι δια-

φορίσιμη συνάρτηση του x , τότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης μπορούμε επεκτείνουμε τα παραπάνω και να πάρουμε τον **κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης δυνάμεων**:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \cdot \quad \frac{d}{du} (u^n) = nu^{n-1} \quad (5)$$

Το $\sin^n x$ αποτελεί συντομογραφία του $(\sin x)^n$, $n \neq -1$.

Παράδειγμα 8 Εύρεση κλίσεως εφαπτομένης

- (α) Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = \sin^5 x$ στο σημείο $x = \pi/3$.
- (β) Δείξτε ότι κάθε ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης $y = 1/(1-2x)^3$ έχει θετική κλίση.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \frac{dy}{dx} &= 5 \sin^4 x \cdot \frac{d}{dx} \sin x && \text{Παράγωγος δύναμης με } u = \sin x, n = 5 \\ &= 5 \sin^4 x \cos x \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη έχει κλίση

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\pi/3} = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{45}{32}.$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (1-2x)^{-3} \\ &= -3(1-2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx} (1-2x) && \text{Παράγωγος δύναμης} \\ & && \text{με } u = (1-2x), n = -3 \\ &= -3(1-2x)^{-4} \cdot (-2) \\ &= \frac{6}{(1-2x)^4} \end{aligned}$$

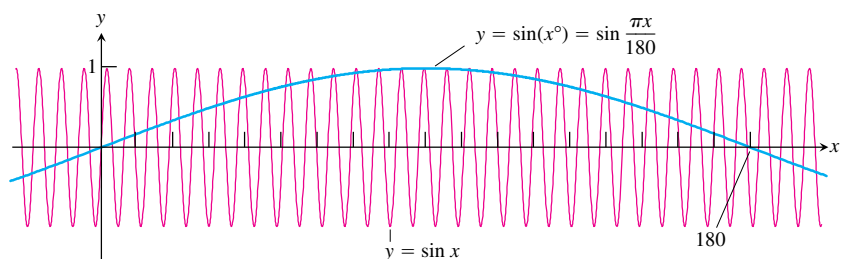
Σε τυχόν σημείο (x, y) επί της καμπύλης, $x \neq 1/2$ και η κλίση της εφαπτομένης ισούται με

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1-2x)^4},$$

δηλαδή με το πηλίκο δύο θετικών αριθμών.

Παράδειγμα 9 Ακτίνια έναντι μοιρών

Έχει σημασία να μην ξεχνούμε ότι οι τύποι των παραγώγων $\sin x$ και $\cos x$ προέκυψαν υπό την παραδοχή ότι το όρισμα x είναι εκπεφρασμένο σε ακτίνια, όχι σε μοίρες. Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης διασαφηνίζει ακόμα περαιτέρω τη διαφορά μεταξύ των δύο. Εφόσον $180^\circ = \pi$ ακτίνια, $x^\circ = \pi x/180$ ακτίνια, όπου το σύμβολο x° δηλώνει ότι η γωνία x μετριέται σε μοίρες.



ΣΧΗΜΑ 2.31 Ο όρος $\sin(x^\circ)$ ταλαντώνεται $\pi/180$ φορές λιγότερο απ'όσο ταλαντώνεται ο όρος $\sin x$. Η μέγιστη κλίση του ισούται με $\pi/180$. (Παράδειγμα 9)

Βάσει του κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης,

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ).$$

Δείτε το Σχήμα 2.31. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η παράγωγος του $\cos(x^\circ)$ θα είναι $-(\pi/180) \sin(x^\circ)$.

Κάθε περαιτέρω παραγωγή θα «επισυνάπτει» έναν επιπλέον παράγοντα $\pi/180$. Βλέπετε λοιπόν αμέσως για ποιον λόγο επιμείναμε στη χρήση των ακτινίων.

Κύβοι πάγου που λειώνουν

Η Πολιτεία της Καλιφόρνιας αντιμετωπίζει σοβαρό πρόβλημα λειψυδρίας και συνεχώς αναζητά νέους υδάτινους πόρους. Μία από τις προταθείσες λύσεις είναι να ρυμουλκηθούν παγόβουνα από πολικές περιοχές ως τα ανοιχτά της νότιας Καλιφόρνιας, όπου λειώνοντας σταδιακά θα παρέχουν το απαιτούμενο πόσιμο νερό. Ως πρώτη προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό, ας φανταστούμε ότι το παγόβουνο έχει σχήμα κύβου (ή οποιοδήποτε άλλο κανονικό σχήμα, π.χ. ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ή πυραμίδα).

Παράδειγμα 10 Κύβος πάγου που λειώνει

Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να λειώσει ένα κομμάτι πάγου κυβικού σχήματος;

Λύση Ξεκινάμε με ένα μαθηματικό μοντέλο. Υποθέτουμε ότι, καθώς λειώνει, ο κύβος διατηρεί το κυβικό σχήμα του. Αν η ακμή του έχει μήκος s , τότε ο όγκος του θα ισούται με $V = s^3$ και το εμβαδόν της επιφάνειάς του θα είναι $6s^2$. Έστω ότι οι ποσότητες V και s είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t . Έστω ακόμη ότι ο όγκος του κύβου μειώνεται με ρυθμό ανάλογο του εμβαδού της επιφάνειάς του. Η τελευταία αυτή υπόθεση φαίνεται εύλογη, αν αναλογιστούμε ότι η τήξη είναι μια διεργασία που λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια: Αν μεταβάλλουμε το εμβαδόν θα μεταβληθεί ανάλογα και το ποσό του πάγου που είναι εκτεθειμένο στον ατμοσφαιρικό αέρα και λειώνει. Αυτό στη γλώσσα των μαθηματικών σημαίνει ότι,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \quad k > 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει τη μείωση του όγκου με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής αναλογίας k είναι σταθερός. Βέβαια, στην πραγματικότητα θα πρέπει να εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως τη σχετική υγρασία του περιβάλλοντος αέρα, τη θερμοκρασία του ατμοσφαιρικού αέρα, την παρουσία ηλιοφάνειας ή όχι, κ.ά.

Τέλος, χρειαζόμαστε τουλάχιστον μία ακόμη πληροφορία: Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για την τήξη μιας δεδομένης ποσότητας του πάγου; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα χρειαστεί κανονικά να κάνουμε μια πειραματική παρατήρηση, αλλά ας υποθέσουμε εδώ ότι ο κύβος έχασε το 1/4 του όγκου του κατά την πρώτη ώρα. (Μπορείτε βέβαια να χρησιμοποιήσετε γενικά σύμβολα αντί συγκεκριμένων αριθμών, λέγοντας π.χ. ότι έλειψε το $n\%$ του κυβικού όγκου σε r ώρες. Έτσι η τελική σας απάντηση θα είναι μια συνάρτηση των n και r .) Από μαθηματική, λοιπόν, σκοπιά έχουμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα.

Δίδονται: $V = s^3$ και $\frac{dV}{dt} = -k(6s^2)$
 $V = V_0$ όταν $t = 0$
 $V = (3/4)V_0$ όταν $t = 1$ h.

Ζητούνται: Η τιμή του t όταν $V = 0$.

Παραγωγίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση $V = s^3$ ως προς t :

$$\frac{dV}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}.$$

Εξισώνουμε την παράγωγο αυτή με τον δοσμένο ρυθμό μεταβολής, $-k(6s^2)$, και παίρνουμε

$$3s^2 \frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k.$$

Το μήκος λοιπόν της ακμής *μειώνεται* με σταθερό ρυθμό $2k$ μονάδων ανά ώρα. Έτσι, αν το αρχικό μήκος της ακμής είναι s_0 , σε μία ώρα θα έχει γίνει $s_1 = s_0 - 2k$. Είναι δηλαδή

$$2k = s_0 - s_1.$$

Ο χρόνος τήξεως είναι η τιμή του χρόνου t για την οποία $2kt = s_0$. Συνεπώς,

$$t_{\text{τήξεως}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - (s_1/s_0)},$$

ενώ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{\left(\frac{3}{4} V_0\right)^{1/3}}{(V_0)^{1/3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \approx 0,91.$$

Έτσι,

$$t_{\text{τήξεως}} = \frac{1}{1 - 0,91} \approx 11 \text{ h}.$$

Δηλαδή αν το 1/4 του κύβου λειώνει σε 1 h, θα απαιτηθούν 10 h επιπλέον μέχρι να λειώσει και το υπόλοιπο.

Βέβαια τα καίρια ερωτήματα που θα κληθούμε τελικά να απαντήσουμε για τη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι τι ποσοστό του παγόβουνου θα χαθεί κατά τη μεταφορά, και πόσος χρόνος απαιτείται για να μετατρέψουμε τον πάγο σε εκμεταλλεύσιμο νερό; Αν θέλαμε να διερευνήσουμε το ζήτημα περαιτέρω, το επόμενο βήμα μας θα ήταν να ελέγξουμε πειραματικά το μοντέλο· κατόπιν, βάσει των πειραματικών μετρήσεων, θα πρέπει να επανέλθουμε και να βελτιώσουμε το μοντέλο με σκοπό να το κάνουμε ρεαλιστικότερο, προκειμένου να είμαστε σε θέση να εμπιστευθούμε τις προβλέψεις του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.5

Υπολογισμοί παραγώγων

Στις Ασκήσεις 1-6, δίδονται οι συναρτήσεις $y = f(u)$ και $u = g(x)$, και ζητείται η $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9$, $u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$
3. $y = \sin u$, $u = 3x + 1$
4. $y = \cos u$, $u = \sin x$
5. $y = \tan u$, $u = 10x - 5$
6. $y = -\sec u$, $u = x^2 + 7x$

Στις Ασκήσεις 7-12, να γραφεί η συνάρτηση στη μορφή $y = f(u)$ και $u = g(x)$. Κατόπιν να εκφραστεί η παράγωγος dy/dx ως συνάρτηση του x .

7. $y = (4 - 3x)^9$
8. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
9. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
10. $y = \sec(\tan x)$
11. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
12. $y = \sin^3 x$

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 13-26.

13. $q = \sqrt{2r - r^2}$
14. $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$
15. $r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1}$
16. $r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$
17. $y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x$
18. $y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$
19. $y = \frac{1}{21} (3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
20. $y = (4x + 3)^4 (x + 1)^{-3}$
21. $h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7$
22. $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$
23. $f(\theta) = \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}\right)^2$
24. $r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta)$
25. $r = \sec \sqrt{\theta} \tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$
26. $q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

Στις Ασκήσεις 27-32, υπολογίστε την παράγωγο dy/dt .

27. $y = \sin^2(\pi t - 2)$
28. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
29. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$
30. $y = \sin(\cos(2t - 5))$
31. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$
32. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$

Εφαπτομένες παραμετρικοποιημένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 33-40, γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που ορίζει το εκάστοτε t . Στο ίδιο σημείο να υπολογιστεί η τιμή της d^2y/dx^2 .

33. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t = \pi/4$
34. $x = \cos t$, $y = \sqrt{3} \cos t$, $t = 2\pi/3$
35. $x = t$, $y = \sqrt{t}$, $t = 1/4$
36. $x = -\sqrt{t+1}$, $y = \sqrt{3t}$, $t = 3$
37. $x = 2t^2 + 3$, $y = t^4$, $t = -1$

$$38. x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$$

$$39. x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \pi/2$$

$$40. x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$$

Δεύτερες παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 41-44, να βρεθεί η y'' .

41. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
42. $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$
43. $y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1)$
44. $y = 9 \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

Εύρεση αριθμητικών τιμών παραγώγων

Στις Ασκήσεις 45-50, να βρεθεί η τιμή της $(f \circ g)'$ για την εκάστοτε τιμή του x .

45. $f(u) = u^5 + 1$, $u = g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$
46. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}$, $u = g(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = -1$
47. $f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}$, $u = g(x) = 5\sqrt{x}$, $x = 1$
48. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}$, $u = g(x) = \pi x$, $x = 1/4$
49. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$
50. $f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2$, $u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, $x = -1$
51. Στον πίνακα που ακολουθεί δίδονται οι τιμές των συναρτήσεων f και g και των παραγώγων τους ως προς x για $x = 2$ και $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

Να βρεθούν οι τιμές των παραγώγων ως προς x των ακόλουθων συναρτήσεων, για τα x που δίδονται.

- (α) $2f(x)$, $x = 2$
- (β) $f(x) + g(x)$, $x = 3$
- (γ) $f(x) \cdot g(x)$, $x = 3$
- (δ) $f(x)/g(x)$, $x = 2$
- (ε) $f(g(x))$, $x = 2$
- (στ) $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$
- (ζ) $1/g^2(x)$, $x = 3$
- (η) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

52. Στον πίνακα που ακολουθεί δίδονται οι τιμές των συναρτήσεων f και g και των παραγώγων τους ως προς x για $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	-4	-1/3	-8/3

Να βρεθούν οι τιμές των παραγώγων ως προς x των ακόλουθων συναρτήσεων, για τα x που δίδονται.

- (α) $5f(x) - g(x)$, $x = 1$
- (β) $f(x)g^3(x)$, $x = 0$

- (γ) $\frac{f(x)}{g(x)+1}$, $x=1$ (δ) $f(g(x))$, $x=0$
 (ε) $g(f(x))$, $x=0$ (στ) $(x^{11}+f(x))^{-2}$, $x=1$
 (ζ) $f(x+g(x))$, $x=0$

53. Να βρεθεί η τιμή της παραγώγου ds/dt για $\theta = 3\pi/2$, αν $s = \cos \theta$ και $d\theta/dt = 5$.
 54. Να βρεθεί η τιμή της παραγώγου dy/dt για $x=1$, αν $y = x^2 + 7x - 5$ και $dx/dt = 1/3$.

Διαφορετικές γραφές σύνθετης συνάρτησης

Τι συμβαίνει όταν μια σύνθετη συνάρτηση μπορεί να γραφεί με περισσότερους από έναν τρόπους; Η παράγωγος της συναρτήσεως παραμένει η ίδια κάθε φορά; Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης μας λέει πως ναι. Διαπιστώστε αν έτσι έχουν τα πράγματα στις Ασκήσεις 55 και 56.

55. Να βρεθεί η παράγωγος dy/dx αν $y = x$. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης γράφοντας το y ως μια σύνθετη συνάρτηση των
 (α) $y = (u/5) + 7$ και $u = 5x - 35$
 (β) $y = 1 + (1/u)$ και $u = 1/(x-1)$.
 56. Να βρεθεί η παράγωγος dy/dx , αν $y = x^{3/2}$. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης, γράφοντας το y ως μια σύνθετη συνάρτηση των
 (α) $y = u^3$ και $u = \sqrt{x}$ (β) $y = \sqrt{u}$ και $u = x^3$.

Εφαπτομένες και κλίσεις

57. (α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης $y = 2 \tan(\pi x/4)$ στο $x=1$.
 (β) *Μάθετε γράφοντας: Κλίσεις της καμπύλης εφαπτομένης*
 Ποια η ελάχιστη τιμή της κλίσεως της καμπύλης στο διάστημα $-2 < x < 2$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 58. *Μάθετε γράφοντας: Κλίσεις της καμπύλης ημιτόνου*
 (α) Να γραφούν εξισώσεις των εφαπτομένων των καμπυλών $y = \sin 2x$ και $y = -\sin(x/2)$ στην αρχή των αξόνων. Υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των εφαπτομένων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 (β) Υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των εφαπτομένων των καμπυλών $y = \sin mx$ και $y = -\sin(x/m)$ στην αρχή των αξόνων (m είναι μια σταθερά $\neq 0$); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 (γ) Για δεδομένο m , ποιες οι μέγιστες τιμές των κλίσεων των καμπυλών $y = \sin mx$ και $y = -\sin(x/m)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 (δ) Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η συνάρτηση $y = \sin x$ συμπληρώνει μία περίοδο, η $y = \sin 2x$ συμπληρώνει δύο περιόδους, η $y = \sin(x/2)$ συμπληρώνει μισή περίοδο, κ.ο.κ. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του αριθμού των περιόδων της $y = \sin mx$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και της κλίσεως της καμπύλης $y = \sin mx$ στην αρχή των αξόνων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θεωρία, παραδείγματα, και εφαρμογές

59. *Αύξηση στροφών κινητήρα* Υποθέστε ότι ένα έμβολο που κινείται πάνω-κάτω βρίσκεται τη χρονική στιγμή t sec στη θέση

$$s = A \cos(2\pi bt),$$

όπου A και b θετικοί αριθμοί. A είναι το πλάτος της κίνησης, και b είναι η συχνότητα (πόσες φορές κινείται πάνω-κάτω το έμβολο ανά δευτερόλεπτο). Πώς θα μεταβληθούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η παράγωγος επιτάχυνσης του εμβόλου αν διπλασιάσουμε τη συχνότητά του; (Λύνοντας το πρόβλημα αυτό θα καταλάβετε γιατί ο κινητήρας του αυτοκινήτου κινδυνεύει από θραύση αν τρέχετε πολύ γρήγορα.) Δείτε το Σχήμα 2.32.

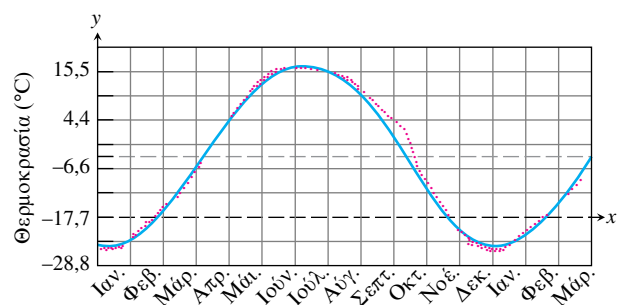


ΣΧΗΜΑ 2.32 Για υπερβολικά μεγάλες ταχύτητες, οι εσωτερικές δυνάμεις στον κινητήρα αυξάνονται τόσο πολύ, ώστε είναι ικανές να τον διατρήσουν.

60. *Θερμοκρασίες στο Fairbanks της Αλάσκας* Στο Σχήμα 2.33 φαίνεται η μέση θερμοκρασία (στην κλίμακα Κελσίου) στην πόλη Fairbanks της Αλάσκας, κατά τη διάρκεια ενός τυπικού (δηλ. αντιπροσωπευτικού) έτους 365 ημερών. Η εξίσωση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία μιας τυχούσας ημέρας x είναι

$$y = 20,5 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (x - 101) \right] - 3,8.$$

- (α) Ποια ημέρα παρουσιάζεται η μέγιστη αύξηση της θερμοκρασίας;
 (β) Κατά την περίοδο μέγιστης αύξησης της θερμοκρασίας, πόσους βαθμούς την ημέρα αυξάνεται η θερμοκρασία;



ΣΧΗΜΑ 2.33 Οι μετρήσεις της μέσης θερμοκρασίας αέρα στην πόλη Fairbanks της Αλάσκας, φαίνονται ως κόκκινα σημεία στο διάγραμμα, ενώ με μπλε έχει σχεδιαστεί η προσεγγιστική ημιτονοειδής συνάρτησή. (Ασκηση 60)

61. **Κίνηση σωματιδίου** Η θέση ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα δίδεται από την εξίσωση $s = \sqrt{1 + 4t}$, όπου s είναι σε m και t σε sec. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου για $t = 6$ sec.
62. **Σταθερή επιτάχυνση** Έστω ότι η ταχύτητα σώματος που πέφτει ελεύθερα είναι $v = k\sqrt{s}$ m/sec (k μια σταθερά) τη στιγμή που το σώμα έχει πέσει s m από το σημείο από το οποίο αφέθηκε. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή.
63. **Μετεωρίτης που πέφτει** Η ταχύτητα ενός μεγάλου μετεωρίτη που εισέρχεται στη γήινη ατμόσφαιρα είναι αντιστρόφως ανάλογη του $\sqrt{s}$ όταν αυτός απέχει s km από το κέντρο της Γης. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του μετεωρίτη είναι αντιστρόφως ανάλογη του s^2 .
64. **Επιτάχυνση σωματιδίου** Σωματίδιο κινείται επί του άξονα x με ταχύτητα $dx/dt = f(x)$. Δείξτε ότι η επιτάχυνσή του είναι $f(x)f'(x)$.
65. **Περίοδος εκκρεμούς και θερμοκρασία** Για μικρού πλάτους ταλαντώσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τη σχέση που συνδέει την περίοδο T με το μήκος L απλού εκκρεμούς. Το μοντέλο αυτό είναι η εξίσωση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

όπου g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο όπου βρίσκεται το εκκρεμές. Αν το g εκφράζεται σε cm ανά sec², τότε το L εκφράζεται σε cm και το T σε sec. Αν το εκκρεμές είναι μεταλλικό, το μήκος του θα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία και συγκεκριμένα θα αυξάνεται ή θα μειώνεται με ρυθμό που είναι περίπου ανάλογος του L . Αν u είναι η θερμοκρασία και k η σταθερά της εν λόγω αναλογίας, τότε θα ισχύει

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Αν έτσι έχουν τα πράγματα, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου ως προς τη θερμοκρασία ισούται με $kT/2$.

66. **Μάθετε γράφοντας: Κανόνας αλυσιδωτής παραγωγής** Έστω ότι $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$. Οι σύνθετες συναρτήσεις $(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2$ και $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ είναι αμφότερες διαφορίσιμες στο $x = 0$ παρά το ότι η ίδια η g δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$. Αντιβαίνει αυτό τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγής; Εξηγήστε.

67. **Μάθετε γράφοντας: Εφαπτομένης** Έστω ότι η $u = g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = 1$ και η $y = f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο $u = g(1)$. Αν γνωρίζουμε ότι το γράφημα της $y = f(g(x))$ διαθέτει μια οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 1$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την εφαπτομένη του γραφήματος της g στο $x = 1$ ή για την εφαπτομένη του γραφήματος της f στο $u = g(1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

68. **Μάθετε γράφοντας** Έστω ότι η $u = g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = -5$, η $y = f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο $u = g(-5)$, ενώ η $(f \circ g)'(-5)$ είναι αρνητική. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις τιμές των $g'(-5)$ και $f'(g(-5))$;

69. **Η παράγωγος του $\sin 2x$** Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = 2 \cos 2x$ για $-2 \leq x \leq 3,5$. Κατόπιν σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την

$$y = \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

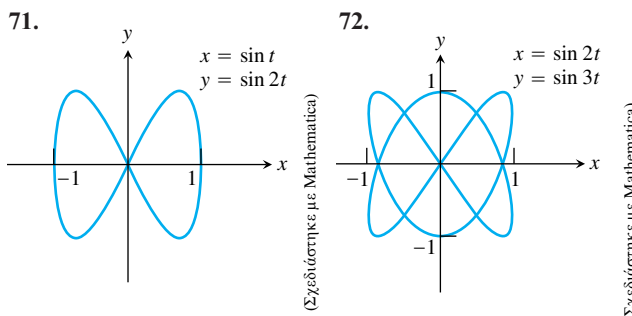
για $h = 1, 0, 0,5$ και $0,2$. Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του h , συμπεριλαμβάνοντας και αρνητικές τιμές στις δοκιμές σας. Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0$; Εξηγήστε τη συμπεριφορά αυτή.

70. **Η παράγωγος του $\cos(x^2)$** Σχεδιάστε στον υπολογιστή σας τη συνάρτηση $y = -2x \sin(x^2)$ για $-2 \leq x \leq 3$. Κατόπιν, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

για $h = 1, 0, 0,7$ και $0,3$. Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του h . Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει καθώς $h \rightarrow 0$; Εξηγήστε τη συμπεριφορά αυτή.

71. Οι καμπύλες που εμφανίζονται στις Ασκήσεις 71 και 72 καλούνται *καμπύλες Bowditch* ή *σχήματα Lissajous*. Για καθεμία από αυτές να βρεθεί το σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης είναι οριζόντια. Επίσης, να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο εφαπτομένων στην αρχή των αξόνων.



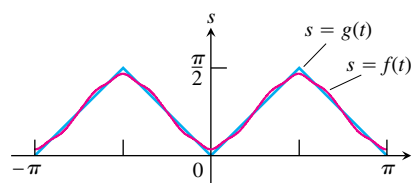
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

73. Όπως δείχνει το Σχήμα 2.34, το τριγωνομετρικό «πολυώνυμο»

$$s = f(t) = 0,78540 - 0,63662 \cos 2t - 0,07074 \cos 6t - 0,02546 \cos 10t - 0,01299 \cos 14t$$

αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της πριονωτής συναρτήσεως $s = g(t)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Πόσο καλά προσεγγίζει η παράγωγος της f την παράγωγο της g στα σημεία όπου ορίζεται η dg/dt ; Για να το μάθετε, εκτελέστε τα παρακάτω βήματα.



ΣΧΗΜΑ 2.34 Προσεγγίζοντας μια πριονωτή συνάρτηση με ένα τριγωνομετρικό «πολυώνυμο». (Ασκηση 73)

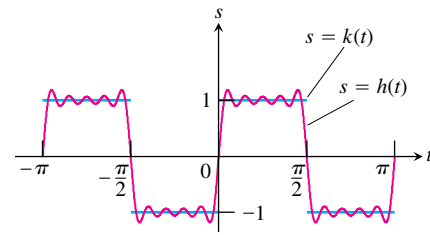
- (α) Σχεδιάστε την dg/dt (όπου αυτή ορίζεται) στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
- (β) Βρείτε την df/dt .
- (γ) Σχεδιάστε την df/dt . Σε ποια σημεία δείχνει να αποδίδει καλύτερα η προσέγγιση της dg/dt από την df/dt ; Σε ποια σημεία αποδίδει χειρότερα; Τέτοιου είδους προσεγγίσεις μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκουν εφαρμογές στη θεωρία της θερμότητας και των ταλαντώσεων – αν και δεν θα πρέπει να έχουμε παράλογες προσδοκίες από αυτές, όπως θα δούμε στην επόμενη άσκηση.

74. (Συνέχεια της Ασκήσεως 73) Στην Άσκηση 73, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $f(t)$ που χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγιστεί η πριονωτή συνάρτηση $g(t)$ στο $[-\pi, \pi]$ είχε παράγωγο που προσέγγιζε την παράγωγο της πριονωτής συναρτήσεως. Ωστόσο, είναι δυνατόν ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο να προσεγγίζει ικανοποιητικά μια συνάρτηση χωρίς ταυτόχρονα η παράγωγός του να προσεγγίζει την παράγωγο της προσεγγισθείσας συναρτήσεως. Για παράδειγμα, το «πολυώνυμο»

$$s = h(t) = 1,2732 \sin 2t + 0,4244 \sin 6t + 0,25465 \sin 10t + 0,18189 \sin 14t + 0,14147 \sin 18t$$

που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.35 προσεγγίζει την κλιμακωτή συνάρτηση $s = k(t)$ που επίσης φαίνεται. Ωστόσο η παράγωγος της συναρτήσεως h δεν έχει καμία σχέση με την παράγωγο της k .

- (α) Σχεδιάστε την dk/dt (όπου αυτή ορίζεται) στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
- (β) Βρείτε την dh/dt .
- (γ) Σχεδιάστε την dh/dt για να διαπιστώσετε πόσο λίγο ταιριάζει το γράφημα αυτό με το γράφημα της dk/dt . Σχολιάστε αυτό που βλέπετε.



ΣΧΗΜΑ 2.35 Προσεγγίζοντας μια κλιμακωτή συνάρτηση με ένα τριγωνομετρικό «πολυώνυμο». (Άσκηση 74)

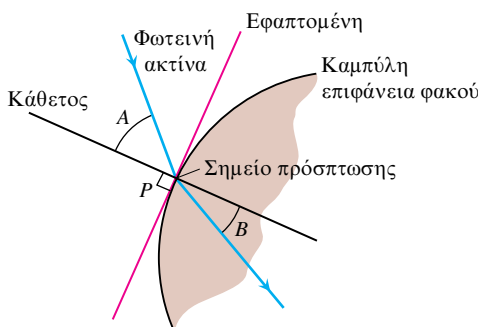
Παραμετροποιημένες καμπύλες

Χρησιμοποιώντας υπολογιστή, εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα για κάθε παραμετροποιημένη καμπύλη των Ασκήσεων 75-80.

- (α) Σχεδιάστε την καμπύλη για το διάστημα τιμών t που δίδεται.
- (β) Βρείτε τις dy/dx και d^2y/dx^2 στο σημείο t_0 .
- (γ) Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο t_0 . Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα την καμπύλη και την εφαπτομένη της.
75. $x = \frac{1}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2, 0 \leq t \leq 1, t_0 = 1/2$
76. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, y = t^2 + t - 3, 0 \leq t \leq 6, t_0 = 3/2$
77. $x = e^t - t^2, y = t + e^{-t}, -1 \leq t \leq 2, t_0 = 1$
78. $x = t - \cos t, y = 1 + \sin t, -\pi \leq t \leq \pi, t_0 = \pi/4$
79. $x = e^t + \sin 2t, y = e^t + \cos(t^2), -\sqrt{2}\pi \leq t \leq \pi/4, t_0 = -\pi/4$
80. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq \pi, t_0 = \pi/2$

2.6

Παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως



ΣΧΗΜΑ 2.36 Πλάγια όψη φακού, όπου φαίνεται η αλλαγή της διεύθυνσης διάδοσης (διάθλαση) μιας φωτεινής ακτίνας καθώς αυτή διασχίζει την επιφάνεια του φακού.

Πεπλεγμένες συναρτήσεις • Παράγωγοι υψηλότερης τάξεως
• Ρητές δυνάμεις διαφορίσιμων συναρτήσεων

Στον νόμο που περιγράφει πώς αλλάζει διεύθυνση το φως καθώς εισέρχεται σε φακό, οι γωνίες που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με την κάθετο στην επιφάνεια του φακού στο σημείο προσπτώσεως (οι γωνίες A και B του Σχήματος 2.36). Στην κατατομή (πλάγια όψη) του Σχήματος 2.36, η κάθετος στην επιφάνεια είναι η κάθετος στην εφαπτομένη της καμπύλης του φακού στο σημείο πρόσπτωσης.

Οι καμπύλες που περιγράφουν την κατατομή των φακών παριστάνονται συχνά από εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$. Για την εύρεση της καθέτου σε σημείο της καμπύλης, θα πρέπει πρώτα να βρούμε την κλίση της εκεί εφαπτομένης dy/dx . Αλλά τι γίνεται αν δεν μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση στην επιθυμητή μορφή $y = f(x)$, ώστε να παραγωγίσουμε; Στην περίπτωση αυτή ενδέχεται να μπορούμε ακόμη να βρούμε την dy/dx μέσω μιας διαδικασίας που καλείται *παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως*. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε την

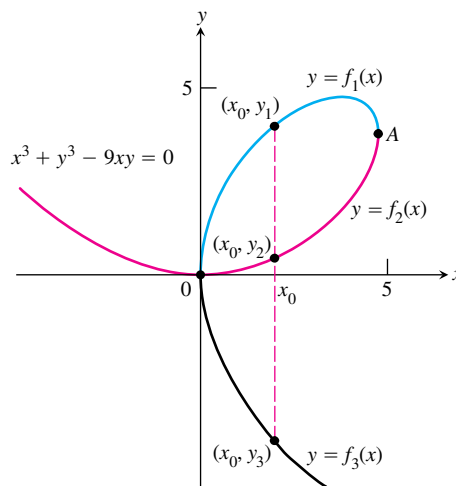
Πότε είναι διαφορίσιμες οι συναρτήσεις που ορίζονται μέσω της $F(x, y) = 0$;

Για να νομιμοποιηθεί η παραγωγή της πεπλεγμένης συναρτήσεως, θα πρέπει να ξέρουμε ότι οι παράγωγοι που ζητούμε όντως υπάρχουν. Με άλλα λόγια, χρειάζεται να γνωρίζουμε πότε είναι διαφορίσιμες οι συναρτήσεις που ορίζονται από τη σχέση $F(x, y) = 0$. Υπάρχει ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού που εγγυάται τη διαφορισιμότητα, αν πληρούνται ορισμένες συνθήκες από τη συνάρτηση F . Όλες οι συναρτήσεις που θα συναντήσουμε στην παρούσα ενότητα πληρούν τις συνθήκες αυτές.

τεχνική αυτή και θα την εφαρμόσουμε, ώστε να επεκτείνουμε τον κανόνα παραγωγισής δυνάμεων σε περιπτώσεις ρητών εκθετών.

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ (Σχήμα 2.37) έχει καλώς ορισμένη κλίση σχεδόν σε κάθε της σημείο, αφού είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, και $y = f_3(x)$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες παντού πλην της αρχής και του σημείου A . Αλλά πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση όταν δεν μπορούμε (όχι χωρίς κόπο, τουλάχιστον) να λύσουμε την εξίσωση και να βρούμε τις εκφράσεις των επιμέρους συναρτήσεων; Η απάντηση είναι να θεωρήσουμε το y ως μια διαφορίσιμη συνάρτηση του x και να παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x , εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγωγισής αθροίσματος, πηλίκου, γινομένου, καθώς και τον κανόνα παραγωγισής σύνθετης συνάρτησης. Κατόπιν να λύσουμε ως προς dy/dx συνάρτησε των x και y μαζί εξαγάγοντας έτσι έναν τύπο για την κλίση στο σημείο (x, y) του γραφήματος συναρτήσε των εκεί τιμών x και y . Η διαδικασία αυτή εύρεσης της dy/dx καλείται **παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως**, διότι η εξίσωση $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ορίζει τις συναρτήσεις f_1 , f_2 , και f_3 κατά τρόπο πεπλεγμένο, χωρίς να μας δίδονται άμεσες, αναλυτικές εκφράσεις για καθεμία από αυτές. [Σ.τ.Μ. Οι συναρτήσεις που ορίζονται μέσω της κοινής εξίσωσης, έχουν την εύλογη ονομασία *πεπλεγμένες*.]



ΣΧΗΜΑ 2.37

Η καμπύλη $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ δεν αποτελεί τη γραφική παράσταση συνάρτησης του x . Ωστόσο, μπορούμε να χωρίσουμε την καμπύλη σε διαφορετικά τόξα (μέρη) τα οποία είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x . Η συγκεκριμένη καμπύλη, που καλείται *φύλλο (folium) του Καρτέσιου*, χρονολογείται από το 1638.

Παράδειγμα 1 Παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως

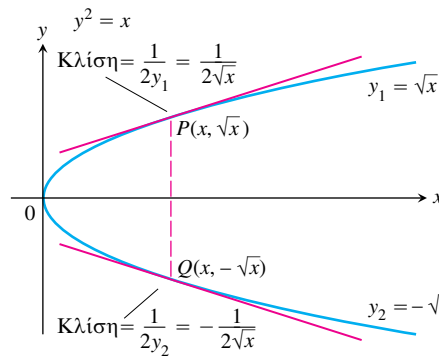
Βρείτε την dy/dx αν $y^2 = x$.

Λύση Η εξίσωση $y^2 = x$ ορίζει δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις του x που βρίσκονται εύκολα: Πρόκειται για τις $y_1 = \sqrt{x}$ και $y_2 = -\sqrt{x}$ (Σχήμα 2.38). Για $x > 0$, οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών είναι:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Αλλά ας υποθέσουμε ότι γνωρίζαμε μόνον ότι η εξίσωση $y^2 = x$ ορίζει μία ή περισσότερες διαφορίσιμες συναρτήσεις του x για $x > 0$ τις οποίες δεν μπορούσαμε να απομονώσουμε. Μπορούμε και τώρα να βρούμε την dy/dx ;

Η απάντηση είναι καταφατική. Για να βρούμε την dy/dx , παραγωγίζουμε απλώς κάθε μέλος της εξίσωσης $y^2 = x$ ως προς x , θεωρώντας ότι η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x :



ΣΧΗΜΑ 2.38

Η εξίσωση $y^2 - x = 0$, ή $y^2 = x$, όπως συνηθέστερα λέμε, ορίζει δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις του x στο διάστημα $x \geq 0$. Το Παράδειγμα 1 δείχνει πώς να βρούμε τις παραγώγους των συναρτήσεων αυτών χωρίς να λύσουμε την εξίσωση $y^2 = x$ ως προς y .

$$y^2 = x \quad \text{Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγωγής δίδει}$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} [f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

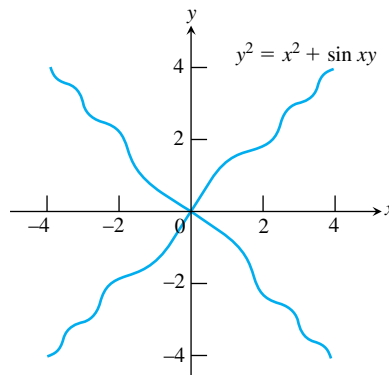
Ο τελευταίος τύπος μας δίδει την παράγωγο και των δύο αναλυτικών λύσεων που βρήκαμε πιο πάνω, δηλαδή των $y_1 = \sqrt{x}$ και $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων άλλων πεπλεγμένων συναρτήσεων, εργαζόμαστε όπως στο Παράδειγμα 1. Θεωρούμε δηλαδή ότι το y είναι μια διαφορίσιμη πεπλεγμένη συνάρτηση του x και παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ορισμού βάσει των γνωστών κανόνων παραγωγισής.

Παράδειγμα 2 Παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως

Να βρεθεί η dy/dx αν $y^2 = x^2 + \sin xy$ (Σχήμα 2.39).



ΣΧΗΜΑ 2.39 Γραφική παράσταση της $y^2 = x^2 + \sin xy$ του Παραδείγματος 2. Στο παράδειγμα επεξηγείται η εύρεση κλίσεων πεπλεγμένων καμπυλών.

Λύση

$$y^2 = x^2 + \sin xy$$

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (\sin xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy) \frac{d}{dx} (xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$2y \frac{dy}{dx} - (\cos xy) \left(x \frac{dy}{dx} \right) = 2x + (\cos xy) y$$

Παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς x . . .
 . . . θεωρώντας την y ως συνάρτηση του x και εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγισής..

Συγκεντρώνουμε τους όρους που περιέχουν την παράγωγο dy/dx . . .

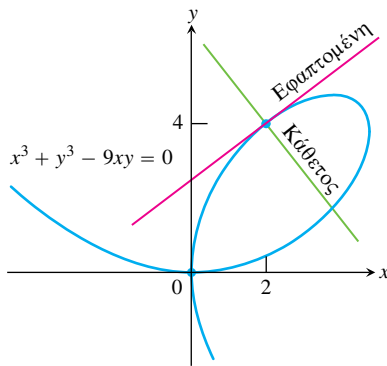
Τα τέσσερα βήματα της παραγωγισής πεπλεγμένης συναρτήσεως

Βήμα 1. Παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x , θεωρώντας τη μεταβλητή y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x .

Βήμα 2. Συγκεντρώνουμε στο ένα μέλος όλους τους όρους που περιέχουν την παράγωγο dy/dx .

Βήμα 3. Βγάζουμε κοινό παράγοντα την παράγωγο dy/dx .

Βήμα 4. Λύνουμε ως προς dy/dx .



ΣΧΗΜΑ 2.40 Στο Παράδειγμα 3 επεξηγείται η εύρεση εξισώσεων της εφαπτομένης και της καθέτου στην καμπύλη στο σημείο $(2, 4)$.

$$(2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} = 2x + y \cos xy$$

... βγάζοντας κοινό παράγοντα το dy/dx .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

Λύνουμε ως προς dy/dx .

Σημειώστε ότι ο τύπος της dy/dx ισχύει για κάθε σημείο όπου η πεπλεγμένη συνάρτηση διαθέτει κλίση. Επίσης ότι η παράγωγος περιέχει τόσο τη μεταβλητή x όσο και την y , και όχι μονάχα τη x .

Παράδειγμα 3 Εφαπτομένη και κάθετος στο φύλλο του Καρτέσιου

Δείξτε ότι το σημείο $(2, 4)$ κείται επί της καμπύλης $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Κατόπιν βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη, στο σημείο αυτό (Σχήμα 2.40).

Λύση Το σημείο $(2, 4)$ ανήκει στην καμπύλη διότι οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Για να βρούμε την κλίση της καμπύλης στο $(2, 4)$, παραγωγίζουμε πρώτα έμμεσα για να βρούμε την dy/dx :

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

Παραγωγίζουμε κάθε μέλος ως προς x .

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9 \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) = 0$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγισίας γινομένου στο xy θεωρώντας την y ως συνάρτηση του x .

$$(3y^2 - 9x) \frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

Συγκεντρώνουμε ομοειδείς όρους.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

Λύνουμε ως προς dy/dx .

Κατόπιν υπολογίζουμε την παράγωγο στο σημείο $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,4)} = \left. \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(2, 4)$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(2, 4)$ με κλίση $4/5$:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Η κάθετος στην καμπύλη στο σημείο $(2, 4)$ είναι η κάθετος στην εφαπτομένη, δηλαδή η ευθεία που διέρχεται από το $(2, 4)$ με κλίση $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξεως

Η παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση παραγώγων υψηλότερης τάξεως. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4 Εύρεση δεύτερης παραγώγου με παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως

Βρείτε την d^2y/dx^2 αν $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Λύση Κατ' αρχάς, παραγωγίζουμε κατά τα γνωστά κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x προκειμένου να βρούμε την $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \text{ για } y \neq 0$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου για να βρούμε την y'' .

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y'$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την $y' = x^2/y$ ώστε να πάρουμε μια έκφραση για την y'' συναρτήσει των x και y .

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \text{ για } y \neq 0.$$

Ρητές δυνάμεις διαφορίσιμων συναρτήσεων

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε ότι ο κανόνας

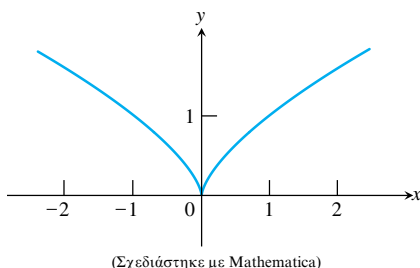
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ισχύει για n ακέραιο. Με παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι ο κανόνας ισχύει και για τυχόντα ρητό αριθμό n .

Θεώρημα 4 Παράγωγος ρητής δύναμης

Αν n είναι ρητός αριθμός, τότε η x^n είναι διαφορίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x^{n-1} , και ισχύει ότι

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$



ΣΧΗΜΑ 2.41 Η γραφική παράσταση της $y = x^{2/3}$ έχει ένα σημείο ανακάμψεως στο $x = 0$. (Παράδειγμα 5)

Παράδειγμα 5 Χρησιμοποιώντας τον τύπο παραγώγου ρητής δύναμης

$$(a) \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}$ ορίζεται στο $x = 0$, ενώ η $1/(2\sqrt{x})$ όχι.

$$(b) \quad \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}(x^{-1/3}) = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

Η αρχική συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, αλλά η παράγωγός της δεν ορίζεται στο $x = 0$. Η γραφική της παράσταση έχει σημείο ανακάμψεως στο $x = 0$ (Σχήμα 2.41).

Απόδειξη του θεωρήματος 4 Έστω p και q ακέραιοι με $q > 0$ και $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Θα είναι τότε

$$y^q = x^p.$$

Εφόσον οι p και q είναι ακέραιοι (για τους οποίους ισχύει ήδη ο κανόνας παραγωγίσης ακέραιας δύναμης), μπορούμε να παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x και να πάρουμε

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Αν $y \neq 0$, διαιρούμε κάθε μέλος με qy^{q-1} για να λύσουμε ως προς dy/dx , οπότε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Ιδιότητα εκθετικών} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1}, \end{aligned}$$

ό.έ.δ.

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με τον κανόνα σύνθετης παραγωγίσης, μπορούμε να επεκτείνουμε τον κανόνα αυτό σε ρητές δυνάμεις του u : Αν ο n είναι ρητός αριθμός και u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x , τότε η u^n θα είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x και θα ισχύει

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

δεδομένου ότι $u \neq 0$ για $n < 1$.

Η απαγορευτική συνθήκη $u \neq 0$ όταν $n < 1$ είναι απαραίτητη, αφού το 0 ενδέχεται να ανήκει στο πεδίο ορισμού της u^n , αλλά δεν μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της u^{n-1} , όπως θα δούμε στο ακόλουθο Παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 Συνδυάζοντας την παράγωγο ρητής δύναμης με τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης

συνάρτηση ορισμένη στο $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/4} &= \frac{1}{4} (1-x^2)^{-3/4} (-2x) && \text{Εξ. (2) με } u = 1-x^2 \text{ και } n = 1/4 \\ &= \frac{-x}{2(1-x^2)^{3/4}} \\ &&& \text{η παράγωγος ορίζεται μόνο στο } (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{5} (\sin x)(\cos x)^{-6/5} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.6

Παράγωγοι ρητών δυνάμεων

Να βρεθεί η dy/dx στις Ασκήσεις 1-6.

1. $y = x^{9/4}$
2. $y = \sqrt[3]{2x}$
3. $y = 7\sqrt{x+6}$
4. $y = (1-6x)^{2/3}$
5. $y = x(x^2+1)^{1/2}$
6. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

Να βρεθούν οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 7-12.

7. $s = \sqrt[4]{t^2}$
8. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$
9. $y = \sin((2t+5)^{-2/3})$
10. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
11. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$
12. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

Παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως

Με τη μέθοδο παραγωγής πεπλεγμένης συναρτήσεως βρείτε την dy/dx στις Ασκήσεις 13-22.

13. $x^2y + xy^2 = 6$
14. $2xy + y^2 = x + y$
15. $x^3 - xy + y^3 = 1$
16. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$
17. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
18. $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$
19. $x = \tan y$
20. $x + \sin y = xy$
21. $y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$
22. $y^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

Βρείτε την $dr/d\theta$ στις Ασκήσεις 23-26.

23. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
24. $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$
25. $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$
26. $\cos r + \cos \theta = r\theta$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Στις Ασκήσεις 27-30, εφαρμόστε παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως για να βρείτε την dy/dx και κατόπιν την d^2y/dx^2 .

27. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
28. $y^2 = x^2 + 2x$
29. $2\sqrt{y} = x - y$
30. $xy + y^2 = 1$
31. Αν $x^3 + y^3 = 16$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(2, 2)$.
32. Αν $xy + y^2 = 1$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(0, -1)$.

Παραμετροποιήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα

Αν οι εξισώσεις των Ασκήσεων 33-36 ορίζουν τις πεπλεγμένες και διαφορίσιμες συναρτήσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$, να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$ για την τιμή t που δίδεται κάθε φορά.

33. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4$, $2y^3 - 3t^2 = 4$, $t = 2$
34. $x = \sqrt{5-\sqrt{t}}$, $y(t-1) = \ln y$, $t = 1$
35. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t$, $y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4$, $t = 0$
36. $x \sin t + 2x = t$, $t \sin t - 2t = y$, $t = \pi$

Κλίσεις, εφαπτόμενες, και κάθετες

Στις Ασκήσεις 37 και 38, βρείτε την κλίση της καμπύλης στα σημεία που δίδονται.

37. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ στα σημεία $(-2, 1)$ και $(-2, -1)$

38. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(1, -1)$

Στις Ασκήσεις 39-46, αφού βεβαιωθείτε ότι το σημείο που δίδεται ανήκει στην καμπύλη, βρείτε (α) την εφαπτομένη και (β) την κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

39. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$

40. $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

41. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $(-2, 1)$

42. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$

43. $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$

44. $x \sin 2y = y \cos 2x$, $(\pi/4, \pi/2)$

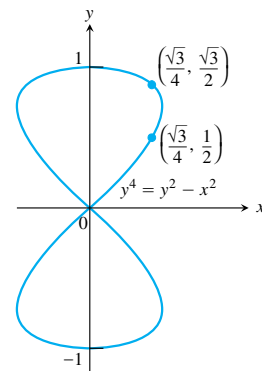
45. $y = 2 \sin(\pi x - y)$, $(1, 0)$

46. $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0$, $(0, \pi)$

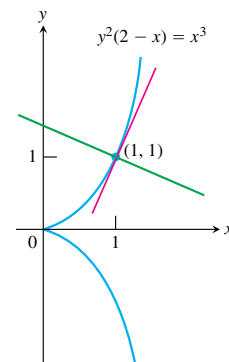
47. **Παράλληλες εφαπτόμενες** Να βρείτε τα δύο σημεία τομής της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ με τον άξονα x και να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης στα σημεία αυτά είναι παράλληλες. Ποια η κοινή κλίση των εφαπτομένων αυτών;

48. **Εφαπτόμενες παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων** Βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ (α) η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα x και (β) η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα y . Στην τελευταία περίπτωση, η dy/dx δεν ορίζεται, ορίζεται όμως η dx/dy . Ποιες τιμές παίρνει η dx/dy στα σημεία αυτά;

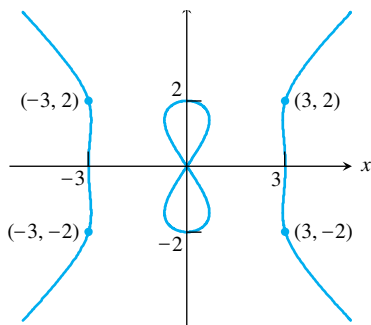
49. **Η καμπύλη του οκτώ** Βρείτε την κλίση της καμπύλης $y^4 = y^2 - x^2$ στα δύο σημεία της που σημειώνονται στο σχήμα.



50. **Κισσοειδής του Διοκλή (περίπου 200 π.Χ.)** Βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην κισσοειδή του Διοκλή $y^2(2-x) = x^3$ στο σημείο $(1, 1)$.



51. Η «καμπύλη του ... διαβόλου» (του Gabriel Cramer, γνωστού και από τον ομώνυμο κανόνα, 1750) Βρείτε την κλίση της «καμπύλης του διαβόλου» $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ στα τέσσερα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα.



52. Το φύλλο του Καρτέσιου (Δείτε το Σχήμα 2.37)

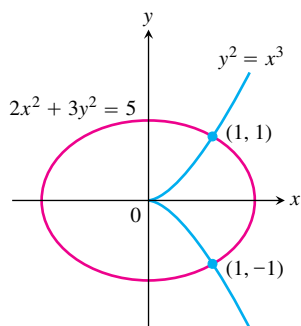
- (α) Βρείτε την κλίση του φύλλου του Καρτέσιου, $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ στα σημεία $(4, 2)$ και $(2, 4)$.
 (β) Σε ποια σημεία, πλην της αρχής των αξόνων, έχει οριζόντια εφαπτομένη η καμπύλη;
 (γ) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α στο Σχήμα 2.37, όπου η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

Θεωρία και παραδείγματα

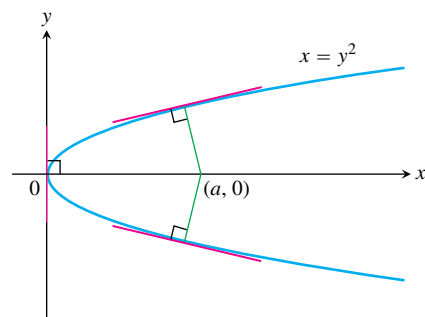
53. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύει αν $f''(x) = x^{-1/3}$;

- (α) $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ (β) $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$
 (γ) $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ (δ) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

54. Μάθετε γράφοντας Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζουν οι εφαπτομένες των καμπυλών $2x^2 + 3y^2 = 5$ και $y^2 = x^3$ στα σημεία $(1, \pm 1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



55. Τέμνουσα κάθετος Σε ποιο άλλο σημείο τέμνει την καμπύλη $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ η κάθετος σε αυτήν στο σημείο $(1, 1)$;
 56. Κάθετες παράλληλες σε ευθεία Να βρεθούν οι κάθετες στην καμπύλη $xy + 2x - y = 0$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $2x + y = 0$.
 57. Κάθετες σε παραβολή Δείξτε ότι αν είναι δυνατόν να φέρουμε τρεις καθέτους από το σημείο $(a, 0)$ στην παραβολή $x = y^2$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα, τότε το a οφείλει να είναι μεγαλύτερο του $1/2$. Μια από τις καθέτους αυτές είναι ο άξονας x . Για ποια τιμή του a είναι κάθετες μεταξύ τους οι άλλες δύο κάθετες στην παραβολή;



58. Μάθετε γράφοντας Ποιες γεωμετρικές θεωρήσεις υπογορεύουν τους περιορισμούς επί των πεδίων ορισμού των παραγώγων στα Παραδείγματα 5 και 6(α);

Τ Στις Ασκήσεις 59 και 60, να βρεθούν αμφότερες οι παράγωγοι dy/dx (όπου η y θεωρείται διαφορίσιμη συνάρτηση του x) και dx/dy (όπου η x θεωρείται διαφορίσιμη συνάρτηση του y). Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των dy/dx και dx/dy ; Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής.

59. $xy^3 + x^2y = 6$

60. $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

61. (α) Δεδομένου ότι $x^4 + 4y^2 = 1$, βρείτε την dy/dx με δύο τρόπους: (1) λύνοντας ως προς y και παραγωγίζοντας τις προκύπτουσες συναρτήσεις κατά τα συνήθη και (2) με παραγωγήση πεπλεγμένης συναρτήσεως. Συμφωνούν τα δύο αποτελέσματα μεταξύ τους;

- (β) Μάθετε γράφοντας Λύστε την εξίσωση $x^4 + 4y^2 = 1$ ως προς y και σχεδιάστε τις προκύπτουσες συναρτήσεις σε ενιαίο σχήμα ώστε να πάρετε ένα πλήρες γράφημα της εξίσωσης $x^4 + 4y^2 = 1$. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε τα γραφήματα των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων. Θα μπορούσατε άραγε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά των γραφημάτων των παραγώγων κάνοντας απλώς μια επόπτευση του γραφήματος της $x^4 + 4y^2 = 1$; Αντιστρόφως, θα μπορούσατε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά του γραφήματος της $x^4 + 4y^2 = 1$ με απλή επόπτευση των γραφημάτων των παραγώγων; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

62. (α) Δεδομένου ότι $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, βρείτε την dy/dx με δύο τρόπους: (1) λύνοντας ως προς y και παραγωγίζοντας τις προκύπτουσες συναρτήσεις κατά τα συνήθη και (2) με παραγωγήση πεπλεγμένης συναρτήσεως. Συμφωνούν τα δύο αποτελέσματα μεταξύ τους;

- (β) Μάθετε γράφοντας Λύστε την εξίσωση $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ως προς y και σχεδιάστε τις προκύπτουσες συναρτήσεις σε ενιαίο σχήμα ώστε να πάρετε ένα πλήρες γράφημα της εξίσωσης $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε τα γραφήματα των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων. Θα μπορούσατε άραγε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά των γραφημάτων των παραγώγων κάνοντας

απλώς μια επόπτευση του γραφήματος της $(x-2)^2 + y^2 = 4$; Αντιστρόφως, θα μπορούσατε να είχατε προβλέψει τη γενική συμπεριφορά του γραφήματος της $(x-2)^2 + y^2 = 4$ με απλή επόπτευση των γραφημάτων των παραγώγων; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Στις Ασκήσεις 63-70, χρησιμοποιήστε υπολογιστή για να εκτελέσετε τα εξής:

- (α) Σχεδιάστε την εξίσωση με τον υπολογιστή σας στην επιλογή «πεπλεγμένης σχεδίασης» (“implicit plotting”). Βεβαιωθείτε ότι το σημείο P όντως ικανοποιεί την εξίσωση.
- (β) Με παραγωγήιση πεπλεγμένης συναρτήσεως βρείτε μια έκφραση για την παράγωγο dy/dx και υπολογίστε την στο σημείο P .

(γ) Χρησιμοποιώντας την κλίση που βρήκατε στο (β), βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο P . Κατόπιν σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα την πεπλεγμένη καμπύλη και την εφαπτομένη της.

$$63. x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$$

$$64. x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$$

$$65. y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad P(0, 1)$$

$$66. y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$$

$$67. x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$68. xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$69. 2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$$

$$70. x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$$

2.7

Συναφείς ρυθμοί

Εξισώσεις συναφών ρυθμών • Στρατηγική επίλυσης

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητάται να μετρήσουμε την ταχύτητα προωθήσεως ενός πυραύλου ο οποίος ανέρχεται κατακόρυφα μετά την εκτόξευσή του. Θα μπορούσαμε βέβαια μέσω μιας περίπλοκης και πολυδάπανης διάταξης να τοποθετήσουμε κάποιον μηχανισμό στην άτρακτο του πυραύλου ο οποίος θα λαμβάνει τις απαραίτητες μετρήσεις. Θα ήταν όμως ασφαλέστερο –και πολύ οικονομικότερο– να σταθούμε σε κάποια απόσταση d από το σημείο εκτόξευσης και να μετρήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ανυψώσεως θ . Κατόπιν, με χρήση απλής τριγωνομετρίας, θα εκφράζαμε το ύψος του πυραύλου h συναρτήσει της γωνίας και της απόστασης ως $h = d \tan \theta$. Παραγωγίζοντας κάθε μέλος της εξίσωσης αυτής ως προς t θα παίρναμε το ζητούμενο dh/dt , συναρτήσει του ρυθμού $d\theta/dt$, ο οποίος είναι εύκολα μετρήσιμος. Το πρόβλημα προσδιορισμού ενός μη εύκολα μετρήσιμου ρυθμού μέσω ενός άλλου ρυθμού που μπορούμε να μετρήσουμε, καλείται *πρόβλημα συναφών ρυθμών*. Η παρούσα ενότητα πραγματεύεται τέτοια προβλήματα συναφών ρυθμών.

Εξισώσεις συναφών ρυθμών

Έστω ότι το σωματίδιο $P(x, y)$ κινείται επί της καμπύλης C στο επίπεδο κατά τρόπο ώστε οι συντεταγμένες του x και y να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t . Αν D είναι η απόσταση του P από την αρχή των αξόνων, τότε μπορούμε εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιστικής παραγωγίσης να βρούμε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς dD/dt , dx/dt , και dy/dt .

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} \left(2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \right)$$

Από κάθε εξίσωση η οποία περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες μεταβλητές που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t μπορούμε να εξαγάγουμε μια εξίσωση που να συνδέει τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής.

Παράδειγμα 1 Εύρεση εξισώσεων συναφών ρυθμών

Έστω ότι η ακτίνα r και το ύψος h ενός κώνου είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t και ότι V είναι ο όγκος του κώνου. Βρείτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς dV/dt , dr/dt , και dh/dt .

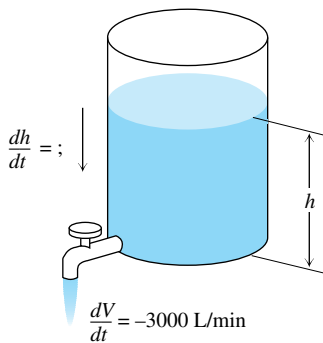
Λύση

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad \text{Τύπος όγκου κώνου}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left(r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + 2r \frac{dr}{dt} \cdot h \right) = \frac{\pi}{3} \left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right)$$

Στρατηγική επίλυσης

Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του υγρού σε μια κλειστή κατακόρυφη δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος, από την οποία αντλούμε υγρό με σταθερό ρυθμό; Τέτοιου είδους ερωτήματα μας ζητούν να υπολογίσουμε έναν ρυθμό μεταβολής που δεν μετρείται άμεσα, συναρτήσει ενός άλλου ρυθμού τον οποίο μπορούμε να μετρήσουμε. Θα βρούμε λοιπόν μια εξίσωση που να συνδέει τις σχετικές μεταβλητές και θα την παραγωγίσουμε, ώστε να προκύψει μια εξίσωση με τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής.



ΣΧΗΜΑ 2.42 Η κυλινδρική δεξαμενή του Παραδείγματος 2.

Παράδειγμα 2 Άντληση από δεξαμενή

Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του υγρού σε μια κλειστή κατακόρυφη δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος, από την οποία αντλούμε υγρό με σταθερό ρυθμό 3000 L/min;

Λύση Σχεδιάζουμε την κυλινδρική δεξαμενή σε μια τυχούσα χρονική στιγμή στην οποία το ύψος της στάθμης του υγρού είναι h και ο όγκος του είναι V . Η ακτίνα της κυκλικής βάσεως είναι r (Σχήμα 2.42).

Καθώς ο χρόνος περνά, η ακτίνα παραμένει σταθερή, αλλά τα V και h μεταβάλλονται. Θεωρούμε ότι οι V και h είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου, τον οποίο συμβολίζουμε με t . Μας δίδεται ο ρυθμός

$$\frac{dV}{dt} = -3000.$$

Ο ρυθμός άντλησης είναι 3000 L/min. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι ο όγκος μειώνεται.

Μας ζητείται ο ρυθμός

$$\frac{dh}{dt}.$$

Πόσο γρήγορα κατέρχεται η στάθμη του υγρού στη δεξαμενή;

Για να βρούμε το dh/dt , χρειαζόμαστε πρώτα μια εξίσωση που να συνδέει τα h και V . Η ακριβής μορφή της εξισώσεως εξαρτάται από τις μονάδες που θα επιλέξουμε για τα V , r , και h . Αν εκφράσουμε το V σε λίτρα και τα r και h σε μέτρα, η εξίσωση του όγκου του κυλίνδρου παίρνει τη μορφή

$$V = 1000\pi r^2 h \quad \text{Η ακτίνα } r \text{ παραμένει σταθερή.}$$

αφού ένα κυβικό μέτρο περιέχει 1000 L.

Εφόσον οι V και h είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t , θα παραγωγίσουμε κάθε μέλος της εξίσωσης $V = 1000\pi r^2 h$ ως προς t για να πάρουμε μια εξίσωση που συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dh/dt και dV/dt :

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

Από τα δεδομένα, αντικαθιστούμε $dV/dt = -3000$ και λύνουμε ως προς dh/dt :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}.$$

Η στάθμη του υγρού θα μειώνεται λοιπόν με ρυθμό $3/(\pi r^2)$ m/min.

Ερμηνεία

Η εξίσωση $dh/dt = -3/(\pi r^2)$ μας δείχνει την εξάρτηση του ρυθμού μείωσης της στάθμης του υγρού από την ακτίνα βάσεως. Για μικρές ακτίνες r , το dh/dt είναι μεγάλο· για μεγάλες ακτίνες r , το dh/dt μειώνεται.

$$\text{Για } r = 1 \text{ m: } \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0,95 \text{ m/min} = -95 \text{ cm/min.}$$

$$\text{Για } r = 10 \text{ m: } \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0,0095 \text{ m/min} = -0,95 \text{ cm/min.}$$

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων συναφών ρυθμών

Βήμα 1. Κάνετε σχήμα και σημειώστε σε αυτό τις μεταβλητές και τις σταθερές ποσότητες. Συμβολίστε με t τον χρόνο. Υποθέστε ότι όλες οι μεταβλητές είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t .

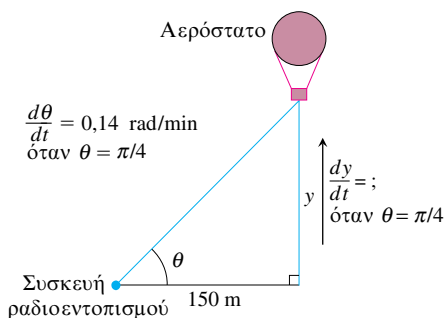
Βήμα 2. Σημειώστε στο σχήμα όποια άλλα δεδομένα υπάρχουν (συναρτήσει των συμβόλων που έχετε επιλέξει).

Βήμα 3. Σημειώστε το ζητούμενο (συνήθως κάποιος ρυθμός, εκπεφρασμένος ως παράγωγος).

Βήμα 4. Γράψτε την εξίσωση που συνδέει τις μεταβλητές. Ίσως χρειαστεί να συνδυάσετε δύο ή περισσότερες εξισώσεις προκειμένου να βρείτε μια τελική εξίσωση που συσχετίζει τη μεταβλητή της οποίας τον ρυθμό ζητάτε με τις άλλες μεταβλητές των οποίων τους ρυθμούς γνωρίζετε.

Βήμα 5. Παραγωγίστε ως προς t . Κατόπιν εκφράστε τον ζητούμενο ρυθμό, συναρτήσει των γνωστών μεταβλητών (ή των ρυθμών μεταβολής τους).

Βήμα 6. Υπολογίστε. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα βρείτε τον ρυθμό μεταβολής που ζητάτε.



ΣΧΗΜΑ 2.43 Το αερόστατο του Παραδείγματος 3.

Παράδειγμα 3 Ανυψούμενο αερόστατο

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή εντοπίζεται από μια συσκευή ραδιοεντοπισμού που απέχει 150 m από το σημείο απογειώσης. Τη στιγμή που η γωνία ανύψωσης (ως προς τη συσκευή ραδιοεντοπισμού) είναι $\pi/4$, ο ρυθμός αύξησης της γωνίας αυτής ισούται με 0,14 rad/min. Πόση είναι τότε η ταχύτητα ανύψωσης του αερόστατου;

Λύση Ακολουθούμε τα έξι βήματα της στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων συναφών ρυθμών.

Βήμα 1: Κάνουμε σχήμα στο οποίο σημειώνουμε τις μεταβλητές και τις

σταθερές ποσότητες (Σχήμα 2.43). Μεταβλητές είναι οι
 θ = ακτινικό μέτρο της γωνίας ανυψώσεως του αερόστατου
 y = ύψος (σε μέτρα) του αερόστατου.

Έστω t ο χρόνος σε λεπτά (min) και έστω ότι οι θ και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t .

Η μόνη σταθερή ποσότητα του σχήματος είναι η απόσταση της συσκευής ραδιοεντοπισμού από το σημείο απογείωσης (150 m). Δεν υπάρχει λόγος να της δώσουμε ιδιαίτερο σύμβολο.

Βήμα 2: Σημειώνουμε στο σχήμα όποια άλλα δεδομένα υπάρχουν.

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,14 \text{ rad/min} \quad \text{όταν} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Βήμα 3: Σημειώνουμε το ζητούμενο. Εδώ μας ζητείται το dy/dt όταν $\theta = \pi/4$.

Βήμα 4: Γράφουμε μια εξίσωση που περιέχει τα y και θ .

$$\frac{y}{150} = \tan \theta \quad \text{δηλαδή} \quad y = 150 \tan \theta$$

Βήμα 5: Παραγωγίζουμε ως προς t βάσει του κανόνα αλυσιδωτής παραγωγής. Έτσι βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ του dy/dt (που ζητούμε) και του $d\theta/dt$ (που γνωρίζουμε).

$$\frac{dy}{dt} = 150(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

Βήμα 6: Υπολογίζουμε με $\theta = \pi/4$ και $d\theta/dt = 0,14$, βρίσκοντας έτσι το dy/dt .

$$\frac{dy}{dt} = 150(\sqrt{2})^2(0,14) = 42 \quad \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Ερμηνεία

Κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή, το αερόστατο ανυψώνεται με ταχύτητα 42 m/min.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Sylvestre Francois
Lacroix
(1765-1843)

Παράδειγμα 4 Καταδίωξη στην εθνική οδό

Περιπολικό της αστυνομίας καταδιώκει ένα ταχέως κινούμενο προπορνούμενο όχημα. Το περιπολικό κινείται προς νότο πλησιάζοντας διασταύρωση στην οποία το ύποπτο αυτοκίνητο έχει ήδη στρίψει και κινείται ανατολικά. Τη στιγμή που το περιπολικό βρίσκεται 1 km βόρεια της διασταύρωσης και το αυτοκίνητο 1,3 km ανατολικά της, αστυνομικός του περιπολικού προσδιορίζει με ραντάρ ότι η απόσταση που τον χωρίζει από το καταδιωκόμενο όχημα αυξάνεται με ρυθμό 30 km/h. Αν η ταχύτητα του περιπολικού τη στιγμή της μέτρησης είναι 100 km/h, ποια η ταχύτητα του καταδιωκόμενου αυτοκινήτου;

Λύση Ακολουθούμε και πάλι τα βήματα της στρατηγικής επίλυσης.

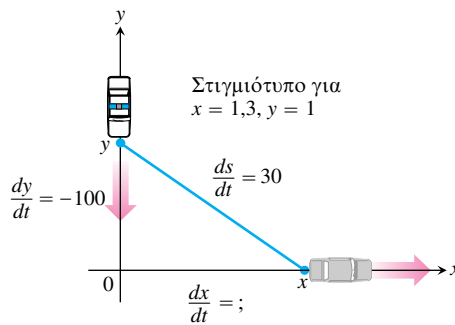
Βήμα 1: Σχήμα και μεταβλητές. Σχεδιάζουμε στο επίπεδο το καταδιωκόμενο όχημα και το περιπολικό, με τον θετικό ημιάξονα x να δείχνει ανατολικά και τον θετικό ημιάξονα y να δείχνει βόρεια (Σχήμα 2.44). Έστω t ο χρόνος. Θέτουμε

x = θέση καταδιωκόμενου οχήματος τη στιγμή t

y = θέση περιπολικού τη στιγμή t

s = απόσταση μεταξύ οχήματος και περιπολικού τη στιγμή t

Υποθέτουμε ότι οι x , y , και s είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t .



ΣΧΗΜΑ 2.44 Το σχήμα του Παραδείγματος 4.

Βήμα 2: *Αριθμητικά δεδομένα.* Τη χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει, είναι

$$x = 1,3 \text{ km}, \quad y = 1 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -100 \text{ km/h}, \quad \frac{ds}{dt} = 30 \text{ km/h}.$$

Ο ρυθμός dy/dt είναι αρνητικός εφόσον το y μειώνεται.

Βήμα 3: *Ζητούμενο:* dx/dt .

Βήμα 4: *Σχέση μεταξύ μεταβλητών:*

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πάρουμε την $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.)

Βήμα 5: *Παραγωγίζουμε ως προς t .*

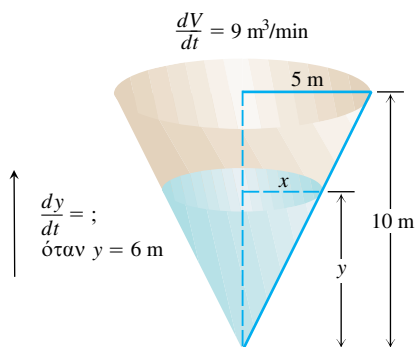
$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Βήμα 6: *Υπολογίζουμε.* Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα $x = 1,3$, $y = 1$, $dy/dt = -100$, $ds/dt = 30$, και λύνουμε ως προς dx/dt .

$$\begin{aligned} 30 &= \frac{1}{\sqrt{1,3^2 + 1^2}} \left(1,3 \frac{dx}{dt} + 1(-100) \right) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{30 \sqrt{1,3^2 + 1} + 100}{1,3} \cong 114 \end{aligned}$$

Ερμηνεία

Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, η ταχύτητα του καταδιωκόμενου οχήματος είναι 114 km/h.



ΣΧΗΜΑ 2.45 Η κωνική δεξαμενή του Παραδείγματος 5.

Παράδειγμα 5 Γεμίζοντας μια κωνική δεξαμενή

Νερό εισρέει σε μια κωνική δεξαμενή με ρυθμό $9 \text{ m}^3/\text{min}$. Η δεξαμενή είναι κατακόρυφη με το μυτερό της άκρο προς τα κάτω. Έχει ύψος 10 m και ακτίνα κυκλικής βάσης 5 m. Πόσο γρήγορα ανέρχεται η στάθμη όταν το νερό έχει βάθος 6 m;

Λύση Ακολουθούμε τα βήματα της στρατηγικής επίλυσης.

Βήμα 1: *Σχήμα και μεταβλητές.* Το Σχήμα 2.45 δείχνει την κωνική δεξαμενή ενώ γεμίζει. Μεταβλητές ποσότητες είναι οι

$V = \text{όγκος (m}^3\text{) νερού στη δεξαμενή τη στιγμή } t \text{ (min)}$

$x = \text{ακτίνα (m) υδάτινης επιφάνειας τη στιγμή } t$

$y = \text{βάθος (m) νερού στη δεξαμενή τη στιγμή } t$.

Υποθέτουμε ότι οι V , x , και y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t . Οι σταθερές του προβλήματος είναι οι διαστάσεις της δεξαμενής.

Βήμα 2: *Αριθμητικά δεδομένα.* Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει,

$$y = 6 \text{ m} \quad \text{και} \quad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Βήμα 3: *Ζητούμενο:* dy/dt .

Βήμα 4: *Σχέση μεταξύ μεταβλητών:* Το νερό σχηματίζει κώνο όγκου

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει τις ποσότητες x , V και y . Επειδή όμως δεν έχουμε πληροφορίες ούτε για το x ούτε για την παράγωγό του dx/dt τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, χρειάζεται να απαλείψουμε το x . Όντως, από τα όμοια τρίγωνα του Σχήματος 2.45 βλέπουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το x συναρτήσει του y :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{y}{2}.$$

Έτσι,

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12} y^3.$$

Βήμα 5: *Παραγωγίζουμε ως προς t .*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

Βήμα 6: *Υπολογίζουμε.* Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα $y = 6$ και $dV/dt = 9$, και λύνουμε ως προς dy/dt .

$$9 = \frac{\pi}{4} (6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32 \text{ m/min}$$

Ερμηνεία

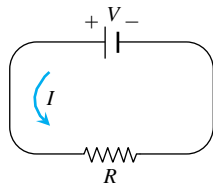
Τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, η υδάτινη στάθμη ανέρχεται με ρυθμό 0,32 m/min.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.7

1. **Εμβαδόν** Έστω ότι η ακτίνα r και το εμβαδόν $A = \pi r^2$ ενός κύκλου είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t . Γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dA/dt και dr/dt .
2. **Εμβαδόν επιφανείας** Έστω ότι η ακτίνα r και το εμβαδόν της επιφάνειας $S = 4\pi r^2$ μιας σφαίρας είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t . Γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής dS/dt και dr/dt .
3. **Όγκος** Η ακτίνα r και το ύψος h ενός ορθού κυλίνδρου συνδέονται με τον όγκο του, V , μέσω της σχέσης $V = \pi r^2 h$.
 - (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dh/dt αν το r είναι σταθερό;
 - (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dr/dt αν το h είναι σταθερό;
 - (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt , dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;
4. **Όγκος** Η ακτίνα r και το ύψος h ενός ορθού κυκλικού κώνου συνδέονται με τον όγκο του, V , μέσω της σχέσης $V = (1/3)\pi r^2 h$.
 - (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dh/dt αν το r είναι σταθερό;

- (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt και dr/dt αν το h είναι σταθερό;
 (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dV/dt , dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

5. **Μεταβαλλόμενη τάση** Η τάση V (Volt, V), το ρεύμα I (Ampère, A), και η αντίσταση R (Ohm, Ω) του ηλεκτρικού κυκλώματος που φαίνεται στο σχήμα συνδέονται μέσω της σχέσης $V = IR$. Έστω ότι το V αυξάνεται με ρυθμό 1 V/sec ενώ το I μειώνεται με ρυθμό $1/3 \text{ A/sec}$. Έστω t ο χρόνος σε sec.



- (α) Ποια η τιμή του dV/dt ;
 (β) Ποια η τιμή του dI/dt ;
 (γ) Ποια σχέση συνδέει τους ρυθμούς dR/dt , dV/dt και dI/dt ;
 (δ) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του R , όταν $V = 12 \text{ V}$ και $I = 2 \text{ A}$. Αυξάνεται ή μειώνεται τότε το R ;
 6. **Ηλεκτρική ισχύς** Η ισχύς P (Watt, W) ενός ηλεκτρικού κυκλώματος συνδέεται με την αντίσταση του κυκλώματος R (Ω) και το ρεύμα που το διαρρέει i (A) μέσω της εξίσωσης $P = Ri^2$.
 (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dP/dt , dR/dt , και di/dt αν κανένα εκ των P , R , και i δεν είναι σταθερό;
 (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dR/dt και di/dt αν το P είναι σταθερό;
 7. **Απόσταση** Έστω x και y διαφορίσιμες συναρτήσεις του t και έστω $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση μεταξύ των σημείων $(x, 0)$ και $(0, y)$ στο επίπεδο xy .
 (α) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt και dx/dt αν το y είναι σταθερό;
 (β) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt , dx/dt και dy/dt αν ούτε το x ούτε το y είναι σταθερό;
 (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dx/dt και dy/dt αν το s είναι σταθερό;
 8. **Διαγώνισι** Αν x , y , και z είναι τα μήκη των ακμών ενός ορθογώνιου κιβωτίου, τότε το κοινό μήκος των διαγωνίων του κιβωτίου είναι $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 (α) Αν τα x , y , και z είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t , ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt , dx/dt , dy/dt , και dz/dt ;
 (β) Ποια η σχέση μεταξύ των ds/dt , dy/dt και dz/dt αν το x είναι σταθερό;
 (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dx/dt , dy/dt , και dz/dt αν το s είναι σταθερό;
 9. **Εμβαδόν** Το εμβαδόν A τριγώνου με μήκη πλευρών a και b και περιεχόμενη γωνία μέτρου θ ισούται με

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta.$$

- (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt και $d\theta/dt$ αν τα a και b είναι σταθερά;

- (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt , $d\theta/dt$ και da/dt αν μόνο το b είναι σταθερό;
 (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dA/dt , $d\theta/dt$, da/dt , και db/dt αν κανένα εκ των a , b , και θ δεν είναι σταθερό;

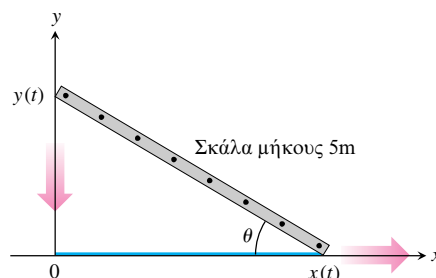
10. **Θερμαίνοντας ένα πιάτο** Καθώς θερμαίνεται στον φούρνο ένα μεταλλικό πιάτο κυκλικού σχήματος, η ακτίνα του αυξάνεται με ρυθμό $0,01 \text{ cm/min}$. Ποιος ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού του πιάτου τη στιγμή που η ακτίνα του έχει γίνει ίση με 50 cm ;
 11. **Μεταβαλλόμενες διαστάσεις ορθογωνίου** Το μήκος l ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec ενώ το πλάτος του w αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec . Τη στιγμή που είναι $l = 12 \text{ cm}$ και $w = 5 \text{ cm}$, να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής (α) του εμβαδού, (β) της περιμέτρου, και (γ) των μηκών των διαγωνίων του ορθογωνίου. Ποιες από τις ποσότητες αυτές μειώνονται, και ποιες αυξάνονται;

12. **Μεταβαλλόμενες διαστάσεις ορθογωνίου κιβωτίου** Ας υποθέσουμε ότι τα μήκη των ακμών x , y , και z ενός κλειστού ορθογωνίου κιβωτίου μεταβάλλονται ως ακολούθως:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sec}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}.$$

Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής (α) του όγκου, (β) του εμβαδού της επιφάνειας, και (γ) του μήκους της διαγωνίου $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ τη στιγμή που $x = 4$, $y = 3$, και $z = 2$.

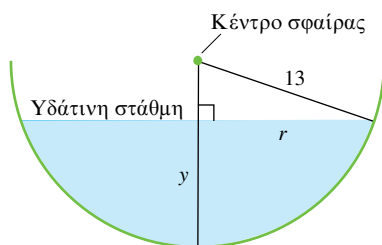
13. **Σκάλα που ολισθαίνει** Μια σκάλα μήκους 5 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν τοίχο όταν η βάση της αρχίζει να ολισθαίνει. Τη στιγμή που η βάση απέχει 4 m από τον τοίχο, η ταχύτητα ολίσθησης της βάσης είναι $1,5 \text{ m/sec}$.



- (α) Με ποια ταχύτητα κινείται εκείνη τη στιγμή η κορυφή της σκάλας;
 (β) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο, και το έδαφος;
 (γ) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος;
 14. **Εναέρια κυκλοφορία** Δυο αεροσκάφη της πολιτικής αεροπορίας πετούν στα 40.000 πόδια σε ευθείες τροχιές που τέμνονται κάθετα. Το αεροσκάφος A πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 442 κόμβων ($1 \text{ κόμβος} = 1 \text{ ναυτικό μίλι την ώρα} \approx 1852 \text{ m}$). Το αεροσκάφος B πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 481 κόμβων. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης μεταξύ των αεροσκαφών τη στιγμή που τα A και B απέχουν 5 και 12 ναυτικά μίλια, αντίστοιχα, από το σημείο τομής;
 15. **Χαρταετός** Η Ελένη πετά τον χαρταετό της σε ύψος 100

m, και ο αέρας τον παρασύρει οριζόντια μακριά από αυτήν με ταχύτητα 7 m/sec. Πόσο γρήγορα θα πρέπει να ξετυλίγει τον σπάγγο η Ελένη τη στιγμή που ο χαρταετός απέχει 150 m από αυτήν;

16. **Διαπλάτυνση κυλίνδρου** Οι μηχανικοί της Lincoln Automotive διαπλάτνουν την κοιλότητα ενός κυλίνδρου κινητήρα βάθους 6 cm προκειμένου να εφαρμόζει σε ένα καινούριο έμβολο. Το μηχανήμα που χρησιμοποιούν μεγαλώνει την ακτίνα του κυλίνδρου κατά ένα χιλιοστό του cm κάθε 3 min. Πόσο γρήγορα αυξάνεται ο όγκος του κυλίνδρου όταν η διάμετρος του είναι 3.800 cm;
17. **Σωρός άμμου που μεγαλώνει** Από έναν ιμάντα μεταφοράς προστίθεται άμμος σε σωρό κωνικού σχήματος με ρυθμό $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Το ύψος του κωνικού σωρού ισούται πάντα με τρία όγδοα της διαμέτρου βάσεως. Πόσο γρήγορα μεταβάλλονται (α) το ύψος και (β) η ακτίνα τη στιγμή που ο σωρός έχει 4 m ύψος; Δώστε τις απαντήσεις σας σε cm/min.
18. **Κωνικού σχήματος δεξαμενή που αδειάζει** Από μια ρηχή κωνικού σχήματος τσιμεντένια δεξαμενή (με την κορυφή της προς τα κάτω) χύνεται νερό με ρυθμό $50 \text{ m}^3/\text{min}$. Η δεξαμενή έχει ακτίνα βάσεως 45 m και ύψος 6 m.
- (α) Πόσο γρήγορα (cm/min) πέφτει η στάθμη του νερού όταν το νερό έχει βάθος 5 m;
- (β) Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται την ίδια στιγμή η ακτίνα της κυκλικής υδάτινης επιφάνειας; Δώστε την απάντησή σας σε cm/min.
19. **Ημισφαιρικού σχήματος δεξαμενή που αδειάζει** Νερό χύνεται με ρυθμό $6 \text{ m}^3/\text{min}$ από μια ημισφαιρικού σχήματος δεξαμενή ακτίνας 13 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, δεδομένου ότι ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι ανά πάσα στιγμή $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ όπου R η ακτίνα της δεξαμενής και y βάθος του νερού σε m.

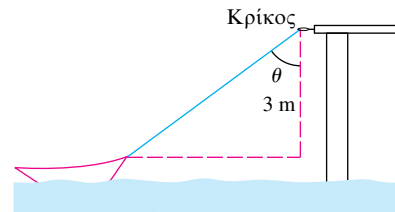


- (α) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το ύψος της υδάτινης στάθμης όταν το νερό έχει βάθος 8 m;
- (β) Ποια η ακτίνα r της υδάτινης επιφάνειας όταν το νερό έχει βάθος y m;
- (γ) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η ακτίνα r όταν το νερό έχει βάθος 8 m;
20. **Μια δροσοσταγόνα που διογκώνεται** Έστω ότι μια σταγόνα της πρωινής δροσιάς έχει τέλει σφαιρικό σχήμα και ότι, εξαιτίας της συμπύκνωσης, η σταγόνα προσλαμβάνει μόρια υγρασίας από το περιβάλλον της με ρυθμό ανάλογο του εμβαδού της επιφάνειάς της. Δείξτε ότι υπό τις συνθήκες αυτές η ακτίνα της σταγόνας θα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.
21. **Η ακτίνα ενός μπαλονιού που φουσκώνει** Ένα σφαιρικό μπαλόνι γεμίζεται με το στοιχείο ήλιο με ρυθμό 10π

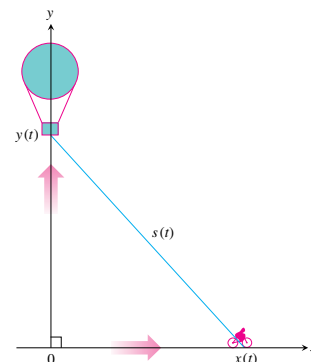
m^3/min . Πόσο γρήγορα μεγαλώνει η ακτίνα του μπαλονιού τη στιγμή που αυτή ισούται με 5 m; Πόσο γρήγορα αυξάνεται το εμβαδόν της σφαιρικής του επιφάνειας;

22. **Βαρκάκι** Ένα μικρό βαρκάκι τραβιέται με σκοινί προς την αποβάθρα. Το σκοινί, που είναι περασμένο σε έναν κρίκο στερεωμένο 3 m ψηλότερα από την πλώρη, τραβιέται με ρυθμό 1 m/sec.

- (α) Πόσο γρήγορα πλησιάζει το βαρκάκι την αποβάθρα όταν το μήκος του σχοινιού είναι 5 m;
- (β) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η γωνία θ ;

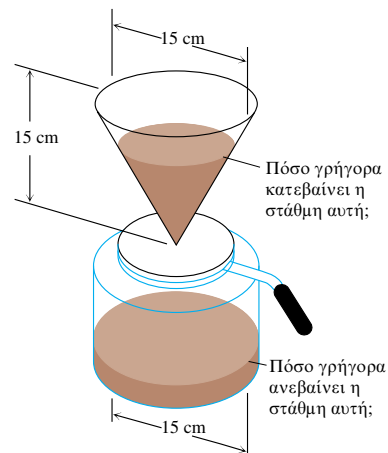


23. **Αερόστατο και ποδήλατο** Αερόστατο ανυψώνεται κατακόρυφα πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο, με σταθερό ρυθμό ανύψωσης 1 m/sec. Τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 65 m, ένα μοτοποδήλατο που κινείται με 17 m/sec περνά ακριβώς κάτω από το αερόστατο. Πόσο γρήγορα θα αυξάνεται η απόσταση $s(t)$ μεταξύ ποδηλάτου και αερόστατου μετά από 3 sec;



24. **Καφές φίλτρου** Από ένα κωνικό φίλτρο χύνεται καφές σε μια κυλινδρική καφετιέρα με ρυθμό $100 \text{ cm}^3/\text{min}$.

- (α) Πόσο γρήγορα ανεβαίνει η στάθμη του καφέ στην καφετιέρα τη στιγμή που στο φίλτρο ο καφές έχει βάθος 5 cm;
- (β) Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του καφέ στο φίλτρο τότε;



25. **Καρδιακός ρυθμός άντλησης** Στα τέλη της δεκαετίας του 1860, ο Adolf Fick, καθηγητής φυσιολογίας στην Ιατρική Σχολή του Πανεπιστημίου του Würzburg της Γερμανίας, ανέπτυξε μια μέθοδο που χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα για τη μέτρηση της ποσότητας του αίματος που αντλείται από τους καρδιακούς μυς ανά δευτερόλεπτο. Καθώς διαβάζετε αυτή τη φράση η καρδιά σας αντλεί αίμα με ρυθμό μάλλον κοντά στα 7 L/min. Όταν αναπαύεστε ο ρυθμός αυτός πέφτει λίγο κάτω από 6 L/min. Αν είστε ασκημένος μαραθωνοδρόμος, τη στιγμή που τρέχετε στον μαραθώνιο η καρδιά σας μπορεί να αντλεί ακόμα και 30 L/min.

Ο καρδιακός σας ρυθμός άντλησης αίματος υπολογίζεται από τον τύπο

$$y = \frac{Q}{D},$$

όπου Q η ποσότητα (σε ml) CO_2 που εκπνέετε ανά λεπτό και D η διαφορά μεταξύ των συγκεντρώσεων CO_2 (ml/L) στο αίμα που πηγαίνει στους πνεύμονες και στο αίμα που επιστρέφει από αυτούς. Με τιμές $Q = 233$ ml/min και $D = 97 - 56 = 41$ ml/L, βρίσκουμε

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5,68 \text{ L/min},$$

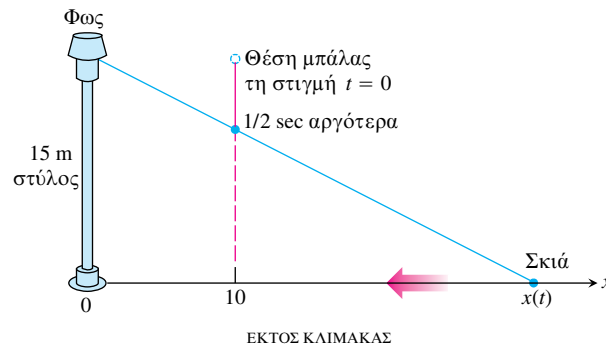
αποτέλεσμα το οποίο πλησιάζει τα 6 L/min που αντλεί η καρδιά των περισσότερων ανθρώπων σε συνθήκες ανάπαυσης (ύπνου). (Ευχαριστούμε τον J. Kenneth Herd, M.D., του Quillan College of Medicine, East Tennessee State University για τα αριθμητικά δεδομένα.)

Έστω τώρα ότι γνωρίζουμε πως για $Q = 233$ και $D = 41$, η ποσότητα D μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδων ανά λεπτό, ενώ η ποσότητα Q παραμένει αμετάβλητη. Πώς μεταβάλλεται τότε ο καρδιακός ρυθμός άντλησης;

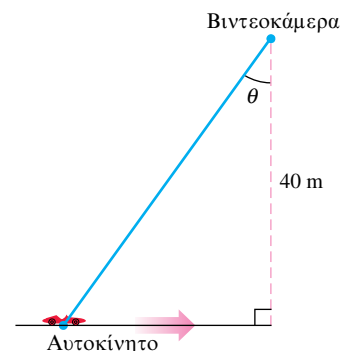
26. **Κόστος, έσοδα, και κέρδος** Μια επιχείρηση παράγει x τεμάχια κάποιου προϊόντος συνολικού κόστους $c(x)$ χιλιάδων ευρώ, εξασφαλίζοντας έτσι έσοδα από πωλήσεις $r(x)$ χιλιάδων ευρώ, και καθαρό κέρδος $p(x) = r(x) - c(x)$ χιλιάδων ευρώ. Να βρεθούν οι ρυθμοί dc/dt , dr/dt , και dp/dt που αντιστοιχούν στις ακόλουθες τιμές των x και dx/dt .
- (α) $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, και $dx/dt = 0,1$ για $x = 2$
- (β) $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$, και $dx/dt = 0,05$ για $x = 1,5$
27. **Κίνηση σε παραβολική τροχιά** Σωματίδιο κινείται επί της παραβολής $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο έτσι ώστε η συντεταγμένη x της θέσης του (που μετρείται σε m) να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 10 m/sec. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ την οποία σχηματίζει με τον άξονα x η ευθεία που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων για $x = 3$ m;
28. **Κίνηση σε παραβολική τροχιά** Σωματίδιο κινείται με κατεύθυνση από δεξιά προς αριστερά επί της παραβολής $y = \sqrt{-x}$ έτσι ώστε η συντεταγμένη x της θέσης του (που μετρείται σε m) να μειώνεται με ρυθμό 8 m/sec. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ την οποία σχηματίζει με τον άξονα x η ευθεία που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων για $x = -4$ m;
29. **Κίνηση στο επίπεδο** Οι συντεταγμένες θέσεως σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t με $dx/dt = -1$ m/sec και

$dy/dt = -5$ m/sec. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων καθώς αυτό περνά από το σημείο (5, 12);

30. **Σκιά διαβάτη** Διαβάτης ύψους 2 m κινείται με ταχύτητα 2 m/sec προς έναν φανοστάτη που έχει λάμπα σε ύψος 5 m. Με ποιον ρυθμό κινείται η άκρη της σκιάς του διαβάτη; Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το μήκος της σκιάς του διαβάτη όταν αυτός απέχει 5 m από τη βάση του φανοστάτη;
31. **Σκιά μπάλας** Μια λάμπα ανάβει σε φανοστάτη ύψους 15 m. Από το ίδιο ύψος αλλά σε απόσταση 10 m αφήνουμε μια μπάλα να πέσει. (Δείτε το ακόλουθο σχήμα.) Πόσο γρήγορα κινείται η σκιά της μπάλας επί του εδάφους 1/2 sec αργότερα; (Υποθέστε ότι σε χρόνο t sec η μπάλα διανύει πέφτοντας απόσταση $s = 4,9t^2$ m.)

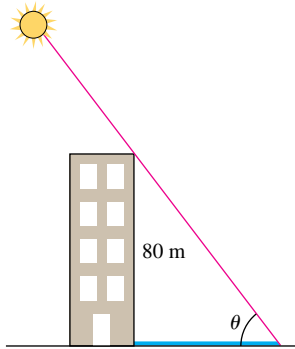


32. **Μαγνητοσκόπηση κινούμενου οχήματος** Έστω ότι μαγνητοσκοπείτε έναν αγώνα αυτοκινήτων σε απόσταση 40 m από τον δρόμο, και παρακολουθείτε ένα αμάξι που κινείται με 288 km/h (80 m/sec). Πόσο γρήγορα θα πρέπει να περιστρέφετε τη βιντεοκάμερα τη στιγμή που το αμάξι αυτό βρίσκεται ακριβώς μπροστά σας; Το ίδιο ερώτημα για μισό δευτερόλεπτο αργότερα.

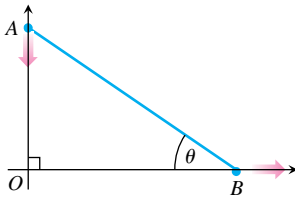


33. **Στρώμα πάγου που λειώνει** Μια σφαιρική μπάλα από σίδηρο διαμέτρου 8 cm καλύπτεται από ομοιόμορφο στρώμα πάγου. Αν ο πάγος λειώνει με ρυθμό $10 \text{ cm}^3/\text{min}$, τότε πόσο γρήγορα μειώνεται το πάχος του πάγου όταν αυτό ισούται με 2 cm; Πόσο γρήγορα μειώνεται το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας του πάγου τότε;
34. **Περιοπλία στην εθνική οδό** Ένα μικρό αεροσκάφος περιπολεί στην εθνική οδό σε ύψος 3 km πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο, πετώντας με ταχύτητα 120 km/h. Ο πιλότος βλέπει ένα όχημα και με το ραντάρ του προσδιορίζει ότι τη στιγμή που η απόσταση αεροπλάνου-οχήματος είναι 5 km, η απόσταση αυτή μειώνεται με ρυθμό 160 km/h. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος ως προς το έδαφος.

35. **Σκιά κτηρίου** Το πρωί μιας μέρας που ο ήλιος θα περάσει ακριβώς κατακόρυφα, η σκιά ενός κτηρίου ύψους 80 m έχει μήκος 60 m. Την ίδια στιγμή, η γωνία θ που σχηματίζει ο ήλιος με το επίπεδο έδαφος αυξάνεται με ρυθμό $0,27^\circ/\text{min}$. Με τι ρυθμό μειώνεται η σκιά του κτηρίου τότε; (Θυμηθείτε να χρησιμοποιήσετε ακτίνα. Εκφράστε τη λύση σας σε cm ανά λεπτό, με προσέγγιση χιλιοστού.)

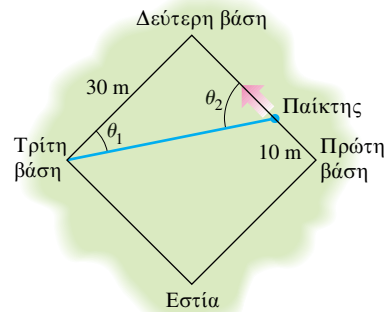


36. **Διαβάτες** Οι A και B κινούνται σε δύο κάθετους δρόμους. Ο A πλησιάζει τη διασταύρωση με ταχύτητα 2 m/sec, ενώ ο B απομακρύνεται από αυτήν με ταχύτητα 1 m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ τη στιγμή που οι A και B απέχουν 10 m και 20 m αντίστοιχα από τη διασταύρωση; Εκφράστε τη λύση σας σε μοίρες ανά sec, με προσέγγιση μίας μοίρας.



37. **Παίκτες του μπέιζμπολ** Το «διαμάντι» του μπέιζμπολ είναι μια τετράγωνη περιοχή πλευράς 30 m. Ένας παίκτης τρέχει από την πρώτη στη δεύτερη «βάση» με ταχύτητα 5 m/sec (δείτε το σχήμα).

- (α) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του παίκτη από την τρίτη βάση τη στιγμή που απέχει 10 m από την πρώτη βάση;
- (β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής των γωνιών θ_1 και θ_2 (δείτε το σχήμα) την ίδια στιγμή;
- (γ) Τη στιγμή που ο παίκτης φθάνει στη δεύτερη βάση τρέχει με 4 m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής των γωνιών θ_1 και θ_2 τη στιγμή εκείνη;



38. **Πλοία** Δύο πλοία αποπλέουν από το σημείο O και κινούνται σε ευθείες πορείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120° . Το πλοίο A πλέει με ταχύτητα 14 κόμβων (1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι την ώρα· 1 ναυτικό μίλι ≈ 1852 m). Το πλοίο B κινείται με ταχύτητα 21 κόμβων. Πόσο γρήγορα απομακρύνονται μεταξύ τους τα πλοία τη στιγμή που $OA = 5$ και $OB = 3$ ναυτικά μίλια;

Επαναληπτικές ερωτήσεις

- Τι είναι η παράγωγος συναρτήσεως f ; Πώς σχετίζεται το πεδίο ορισμού της με αυτό της f ; Δώστε παραδείγματα.
- Τι ρόλο παίζει η παράγωγος στον ορισμό της κλίσης, της εφαπτομένης, και του ρυθμού μεταβολής;
- Πώς μπορούμε μερικές φορές να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συναρτήσεως βάσει του πίνακα τιμών της συναρτήσεως;
- Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ανοιχτό διάστημα; Το ίδιο ερώτημα για κλειστό διάστημα.
- Ποια η σχέση μεταξύ παραγώγων και πλευρικών παραγώγων;
- Περιγράψτε γεωμετρικά μια χαρακτηριστική περίπτωση στην οποία μια συνάρτηση δεν έχει παράγωγο σε ένα σημείο.
- Ποια σχέση υπάρχει (εφόσον υπάρχει) μεταξύ της διαφορισιμότητας και της συνέχειας συναρτήσεως σε σημείο;

8. Θα μπορούσε η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

να είναι η παράγωγος κάποιας άλλης συνάρτησης στο διάστημα $[-1, 1]$; Εξηγήστε.

9. Ποιους κανόνες υπολογισμού παραγώγων γνωρίζετε; Δώστε μερικά παραδείγματα.
10. Εξηγήστε πώς οι ακόλουθοι τρεις τύποι

$$(α) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad (β) \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

$$(γ) \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

μας επιτρέπουν την παραγωγή οποιοδήποτε πολυωνύμου.

11. Ποιον επιπλέον τύπο χρειαζόμαστε ώστε μαζί με αυτούς της Ερωτήσεως 10 να μπορούμε να παραγωγίζουμε ρητές συναρτήσεις;

12. Τι είναι η δεύτερη παράγωγος; Τι η τρίτη παράγωγος; Πόσες παραγώγους έχουν οι συναρτήσεις που γνωρίζετε; Δώστε μερικά παραδείγματα.
13. Ποια η σχέση μεταξύ του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής μιας συναρτήσεως; Δώστε ένα παράδειγμα.
14. Πώς προκύπτουν οι παράγωγοι στη μελέτη της κίνησης; Τι πληροφορία μεταφέρουν για την κίνηση σώματος σε ευθεία οι παράγωγοι της συναρτήσεως θέσεως του σώματος; Δώστε παραδείγματα.
15. Πώς προκύπτουν οι παράγωγοι στα οικονομικά;
16. Δώστε κι άλλα παραδείγματα εφαρμογής των παραγώγων.
17. Τι σχέση έχουν τα όρια $\lim_{h \rightarrow 0} ((\sin h)/h)$ και $\lim_{h \rightarrow 0} ((\cos h - 1)/h)$ με τις παραγώγους των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου; Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών;
18. Πώς μπορείτε, αν γνωρίζετε τις παραγώγους των $\sin x$ και $\cos x$, να υπολογίσετε τις παραγώγους των $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, και $\csc x$; Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών;
19. Ποια είναι τα σημεία συνέχειας των έξι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Πώς το ξέρετε;
20. Με ποιον κανόνα βρίσκουμε την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως που προκύπτει από δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις; Πώς υπολογίζουμε την τιμή αυτής της παραγώγου; Δώστε παραδείγματα.
21. Με ποιον κανόνα βρίσκουμε την κλίση dy/dx μιας παραμετρικοποιημένης καμπύλης $x = f(t)$, $y = g(t)$; Πότε ισχύει ο κανόνας αυτός; Πότε περιμένουμε να είμαστε σε θέση να βρούμε και τη δεύτερη παράγωγο d^2y/dx^2 ; Δώστε παραδείγματα.
22. Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x , πώς υπολογίζουμε την $(d/dx)(u^n)$ για n ακέραιο; Για n ρητό; Δώστε παραδείγματα.
23. Τι είναι η παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως; Πότε αποβαίνει χρήσιμη; Δώστε παραδείγματα.
24. Πώς προκύπτουν τα προβλήματα συναφών ρυθμών; Δώστε παραδείγματα.
25. Περιγράψτε μια μέθοδο λύσεως προβλημάτων συναφών ρυθμών. Επεξηγήστε με ένα παράδειγμα.

Ασκήσεις κεφαλαίου

Παράγωγοι συναρτήσεων

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 1-40.

1. $y = x^5 - 0,125x^2 + 0,25x$
2. $y = 3 - 0,7x^3 + 0,3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \frac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec \theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \frac{\csc \theta}{2} - \frac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$
11. $y = 2 \tan^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta \sin \theta}$
18. $r = 2\theta \sqrt{\cos \theta}$
19. $r = \sin \sqrt{2\theta}$
20. $r = \sin(\theta + \sqrt{\theta + 1})$
21. $y = \frac{1}{2}x^2 \csc \frac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2} \sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x} \csc(x + 1)^3$
25. $y = 5 \cot x^2$
26. $y = x^2 \cot 5x$
27. $y = x^2 \sin^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2} \sin^2(x^3)$
29. $s = \left(\frac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \frac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$
35. $r = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1}\right)^2$
36. $r = \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2$
37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$
38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$
39. $y = \frac{3}{(5x^2 + \sin 2x)^{3/2}}$
40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως

Στις Ασκήσεις 41-48, βρείτε την dy/dx .

41. $xy + 2x + 3y = 1$
42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
45. $\sqrt{xy} = 1$
46. $x^2y^2 = 1$
47. $y^2 = \frac{x}{x + 1}$
48. $y^2 = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

Στις Ασκήσεις 49 και 50, βρείτε την dp/dq .

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$ 50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

Στις Ασκήσεις 51 και 52, βρείτε την dr/ds .

51. $r \cos 2s + \sin^2 s = \pi$ 52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Βρείτε την d^2y/dx^2 με παραγωγήσι πεπλεγμένης συνάρτησεως:

(α) $x^3 + y^3 = 1$ (β) $y^2 = 1 - \frac{2}{x}$

54. (α) Παραγωγίστε τη σχέση $x^2 - y^2 = 1$, για να δείξετε ότι $dy/dx = x/y$.

(β) Κατόπιν δείξτε ότι $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Αριθμητικές τιμές παραγώγων

55. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και οι πρώτες τους παράγωγοι έχουν τις ακόλουθες τιμές στα $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	-3	1/2
1	3	5	1/2	-4

Βρείτε τις πρώτες παραγώγους των ακόλουθων συνδυασμών για την τιμή του x που δίδεται.

(α) $6f(x) - g(x)$, $x = 1$ (β) $f(x)g^2(x)$, $x = 0$

(γ) $\frac{f(x)}{g(x) + 1}$, $x = 1$ (δ) $f(g(x))$, $x = 0$

(ε) $g(f(x))$, $x = 0$ (στ) $(x + f(x))^{3/2}$, $x = 1$

(ζ) $f(x + g(x))$, $x = 0$

56. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ και η πρώτη της παράγωγος έχουν τις ακόλουθες τιμές στα $x = 0$ και $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	1/5

Βρείτε τις πρώτες παραγώγους των ακόλουθων συνδυασμών για την τιμή του x που δίδεται.

(α) $\sqrt{x} f(x)$, $x = 1$ (β) $\sqrt{f(x)}$, $x = 0$

(γ) $f(\sqrt{x})$, $x = 1$ (δ) $f(1 - 5 \tan x)$, $x = 0$

(ε) $\frac{f(x)}{2 + \cos x}$, $x = 0$ (στ) $10 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) f^2(x)$, $x = 1$

57. Βρείτε την τιμή της dy/dt για $t = 0$ αν $y = 3 \sin 2x$ και $x = t^2 + \pi$.

58. Βρείτε την τιμή της ds/du για $u = 2$ αν $s = t^2 + 5t$ και $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.

59. Βρείτε την τιμή της dw/ds για $s = 0$ αν $w = \sin(\sqrt{r} - 2)$ και $r = 8 \sin(s + \pi/6)$.

60. Βρείτε την τιμή της dr/dt για $t = 0$ αν $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ και $\theta^2 t + \theta = 1$.

61. Αν $y^3 + y = 2 \cos x$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(0, 1)$.

62. Αν $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, βρείτε την τιμή της d^2y/dx^2 στο σημείο $(8, 8)$.

Ορισμός παραγώγων

Στις Ασκήσεις 63 και 64, βρείτε την παράγωγο εφαρμόζοντας τον ορισμό.

63. $f(t) = \frac{1}{2t + 1}$

64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 0$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

66. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ \tan x, & 0 \leq x \leq \pi/4. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 0$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

67. *Μάθετε γράφοντας*

(α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 1$;

(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο $x = 1$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

68. *Μάθετε γράφοντας* Για ποια τιμή ή τιμές της σταθεράς m , αν υπάρχουν, είναι η

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

(α) συνεχής στο $x = 0$;

(β) διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Κλίσεις, εφαπτόμενες και κάθετες

69. *Εφαπτομένες με καθορισμένη κλίση* Υπάρχουν σημεία της καμπύλης $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ με κλίση $-3/2$; Αν ναι, βρείτε τα.

70. *Εφαπτομένες με καθορισμένη κλίση* Υπάρχουν σημεία της καμπύλης $y = x - 1/(2x)$ με κλίση 3; Αν ναι, βρείτε τα.

71. *Οριζόντιες εφαπτομένες* Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ όπου η εφαπτομένη γίνεται παράλληλη στον άξονα x .

72. *Τετμημένες και τεταγμένες εφαπτομένων* Βρείτε την τετμημένη και την τεταγμένη της ευθείας που εφάπτεται της καμπύλης $y = x^3$ στο σημείο $(-2, -8)$.

73. *Εφαπτομένες κάθετες ή παράλληλες σε ευθείες* Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ όπου η εφαπτομένη είναι

(α) κάθετη στην ευθεία $y = 1 - (x/24)$

(β) παράλληλη στην ευθεία $y = \sqrt{2} - 12x$.

74. **Εφαπτομένες που τέμνονται** Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της καμπύλης $y = (\pi \sin x)/x$ στα $x = \pi$ και $x = -\pi$ τέμνονται κάθετα.

75. **Κάθετες παράλληλες σε ευθεία** Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, όπου η κάθετος είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x/2$. Σχεδιάστε πρόχειρα σε κοινό σχήμα την καμπύλη και τις καθέτους της, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

76. **Εφαπτομένες και κάθετες** Βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη $y = 1 + \cos x$ στο σημείο $(\pi/2, 1)$. Σχεδιάστε πρόχειρα σε κοινό σχήμα την καμπύλη, την εφαπτομένη και την κάθετο, ονομάζοντας την καθεμία με την εξίσωσή της.

77. **Εφαπτόμενη παραβολή** Η παραβολή $y = x^2 + C$ εφάπτεται της ευθείας $y = x$. Βρείτε το C .

78. **Κλίση εφαπτομένης** Δείξτε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^3$ σε τυχόν σημείο της (a, a^3) τέμνει την καμπύλη σε σημείο στο οποίο η κλίση είναι τετραπλάσια της κλίσης στο (a, a^3) .

79. **Εφαπτόμενη υπερβολή** Για ποια τιμή του c εφάπτεται η καμπύλη $y = c/(x+1)$ της ευθείας που διέρχεται από τα $(0, 3)$ και $(5, -2)$;

80. **Κάθετος σε κύκλο** Δείξτε ότι η κάθετος σε τυχόν σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$ διέρχεται από την αρχή.

Εφαπτομένες και κάθετες πεπλεγμένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 81-86, βρείτε εξισώσεις για την εφαπτομένη και την κάθετο στην καμπύλη στο σημείο που δίδεται.

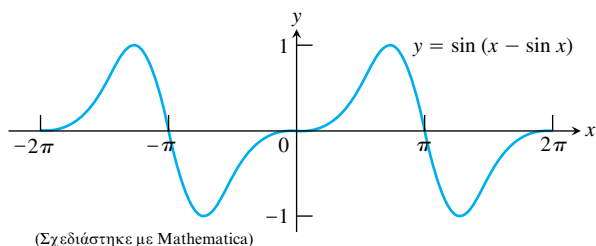
81. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$ 82. $x^3 + y^2 = 2$, $(1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$ 84. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$ 86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$

87. Βρείτε την κλίση της καμπύλης $x^3y^3 + y^2 = x + y$ στα σημεία $(1, 1)$ και $(1, -1)$.

88. **Μάθετε γράφοντας** Στην ακόλουθη γραφική παράσταση η καμπύλη $y = \sin(x - \sin x)$ μοιάζει να έχει οριζόντιες εφαπτομένες στον άξονα x . Αληθεύει αυτό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Εφαπτομένες παραμετροποιημένων καμπυλών

Στις Ασκήσεις 89 και 90, βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία του επιπέδου xy η οποία εφάπτεται της καμπύλης στο

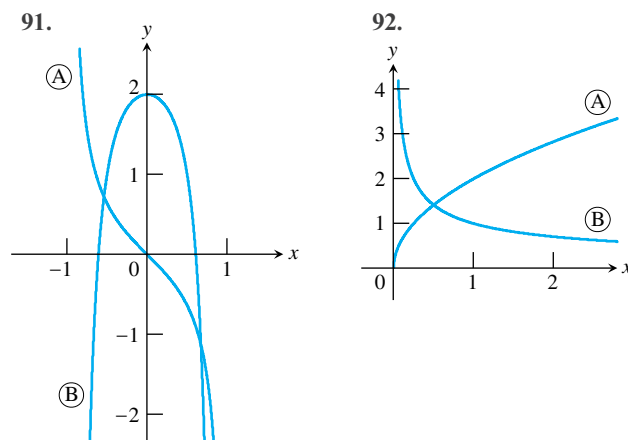
σημείο που αντιστοιχεί στο t που δίδεται. Στο ίδιο σημείο βρείτε την d^2y/dx^2 .

89. $x = (1/2) \tan t$, $y = (1/2) \sec t$, $t = \pi/3$

90. $x = 1 + 1/t^2$, $y = 1 - 3/t$, $t = 2$

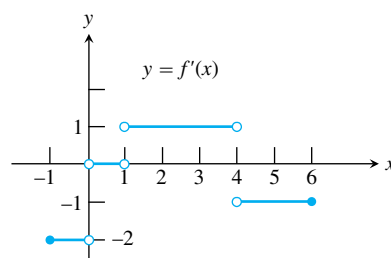
Ανάλυση γραφικών παραστάσεων

Κάθε σχήμα στις Ασκήσεις 91 και 92 δείχνει δύο γραφήματα: το γράφημα της συνάρτησεως $y = f(x)$ μαζί με αυτό της παραγώγου της $f'(x)$. Εξηγήστε πώς μπορούμε να ξεχωρίσουμε το γράφημα της καθεμίας.



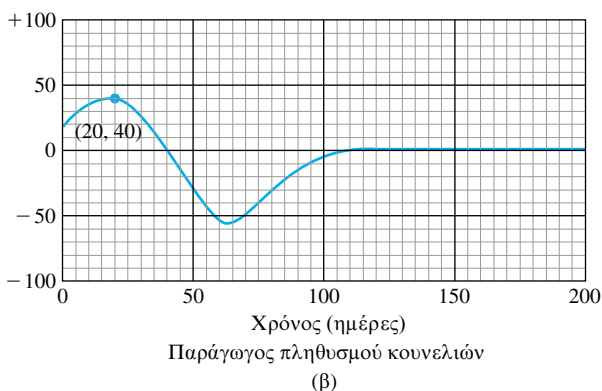
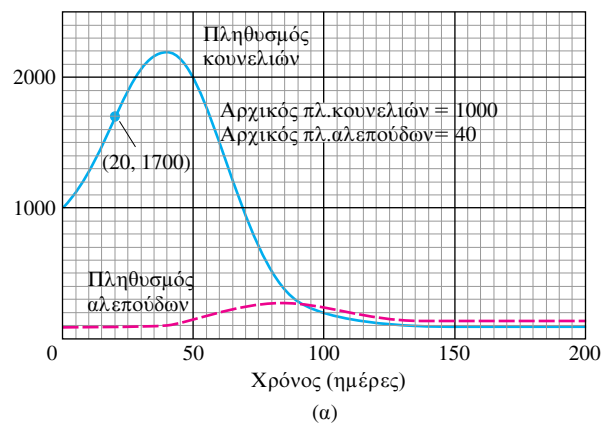
93. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες πληροφορίες για να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $y = f(x)$ για $-1 \leq x \leq 6$.

- Το γράφημα της f αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα ενωμένα στα άκρα τους.
- Το γράφημα αρχίζει στο σημείο $(-1, 2)$.
- Η παράγωγος της f , στα σημεία όπου ορίζεται, ισούται με την κλιμακωτή συνάρτηση που παρατίθεται.



94. Επαναλάβετε την Άσκηση 93, υποθέτοντας ότι το γράφημα αρχίζει από το σημείο $(-1, 0)$ αντί του $(-1, 2)$.

Οι Ασκήσεις 95 και 96 αναφέρονται στα διαγράμματα του Σχήματος 2.46. Στο σχήμα (α) φαίνονται οι πληθυσμοί κουνελιών και αλεπούδων ενός μικρού οικοσυστήματος στην Αρκτική. Οι πληθυσμοί είναι σχεδιασμένοι συναρτήσει του χρόνου, για ένα διάστημα 200 ημερών. Ο πληθυσμός των κουνελιών αρχικά αυξάνεται, καθώς αυτά αναπαράγονται. Όμως οι αλεπούδες τρέφονται με τα κουνέλια και, καθώς ο πληθυσμός των αλεπούδων αυξάνεται, ο πληθυσμός των κουνελιών σταθεροποιείται και κατόπιν αρχίζει να μειώνεται. Στο Σχήμα 2.46β φαίνεται η παράγωγος του πληθυσμού των κουνελιών· κάναμε τη σχεδίαση αυτή υπολογίζοντας κλίσεις στο σχήμα (α).



ΣΧΗΜΑ 2.46 Πληθυσμοί κουνελιών (θηραμάτων) και αλεπούδων (θηρευτών), στην τροφική αλυσίδα μιας αρκτικής περιοχής.

95. (α) Ποια τιμή της παραγωγής του πληθυσμού των κουνελιών αντιστοιχεί στον μέγιστο πληθυσμό κουνελιών; Ποια στον ελάχιστο;
- (β) Ποιος πληθυσμός κουνελιών στο Σχήμα 2.46 αντιστοιχεί στη μέγιστη παραγωγή; Ποιος στην ελάχιστη (αρνητική);
96. Σε τι μονάδες μετρώνται οι κλίσεις των καμπυλών που αντιστοιχούν στους πληθυσμούς αλεπούδων και κουνελιών;

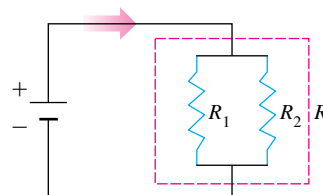
Συναφείς ρυθμοί

97. **Ορθός κυκλικός κύλινδρος** Το ολικό εμβαδόν επιφάνειας S κυλίνδρου εξαρτάται από την ακτίνα βάσης r και το ύψος h βάσει της εξίσωσης $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
- (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dr/dt για h σταθερό;
- (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dh/dt για r σταθερό;
- (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt , dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;
- (δ) Ποια η σχέση μεταξύ των dr/dt και dh/dt για S σταθερό;
98. **Ορθός κυκλικός κώνος** Το εμβαδόν της πλευρικής επιφάνειας S ενός κώνου εξαρτάται από την ακτίνα βάσης r και το ύψος h βάσει της εξίσωσης $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

- (α) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dr/dt για h σταθερό;
- (β) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt και dh/dt για r σταθερό;
- (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των dS/dt , dr/dt και dh/dt αν ούτε το r ούτε το h είναι σταθερό;

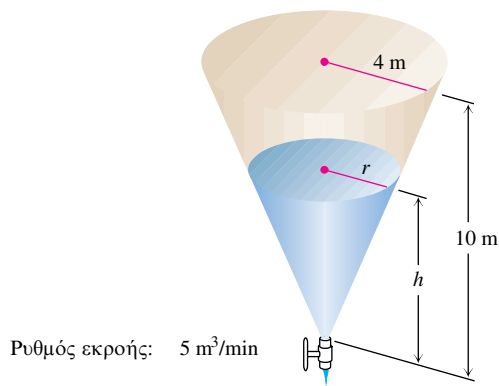
99. **Μεταβαλλόμενο εμβαδόν κύκλου** Η ακτίνα κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό $-2/\pi$ m/sec. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του κύκλου όταν $r = 10$ m;
100. **Μεταβαλλόμενες ακμές κύβου** Ο όγκος κύβου αυξάνεται με ρυθμό $1200 \text{ cm}^3/\text{min}$ τη στιγμή που το μήκος μιας ακμής του είναι 20 cm. Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το μήκος της ακμής;
101. **Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων** Αν δύο αντιστάτες των R_1 και R_2 Ω συνδεθούν παράλληλα σε ηλεκτρικό κύκλωμα, η ισοδύναμη ολική αντίσταση R δίδεται από τη σχέση

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Αν το R_1 μειώνεται με ρυθμό $1 \Omega/\text{sec}$ και το R_2 αυξάνεται με ρυθμό $0,5 \Omega/\text{sec}$, τότε ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του R για $R_1 = 75 \Omega$ και $R_2 = 50 \Omega$;

102. **Εμπέδηση κυκλώματος σε σειρά** Η εμπέδηση Z (Ω) ενός κυκλώματος σε σειρά συνδέεται με την αντίσταση R (Ω) και την άεργη αντίσταση X (Ω) μέσω της εξίσωσης $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Αν το R αυξάνεται με ρυθμό $3 \Omega/\text{sec}$ και το X μειώνεται με ρυθμό $2 \Omega/\text{sec}$, τότε με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το Z όταν $R = 10 \Omega$ και $X = 20 \Omega$;
103. **Ταχύτητα κινούμενου σωματιδίου** Οι συντεταγμένες θέσεως ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t με $dx/dt = 10 \text{ m/sec}$ και $dy/dt = 5 \text{ m/sec}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται το σωματίδιο από την αρχή καθώς περνά από το σημείο $(3, -4)$;
104. **Κίνηση σωματιδίου** Σωματίδιο κινείται επί της καμπύλης $y = x^{3/2}$ στο πρώτο τεταρτημόριο, έτσι ώστε η απόστασή του από την αρχή να αυξάνεται με ρυθμό 11 μονάδες ανά sec. Βρείτε το dx/dt για $x = 3$.
105. **Δεξαμενή που αδειάζει** Από την κωνική δεξαμενή του Σχήματος 2.47 χύνεται νερό με ρυθμό $5 \text{ m}^3/\text{min}$.
- (α) Ποια η σχέση μεταξύ των μεταβλητών h και r στο σχήμα;
- (β) Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η υδάτινη στάθμη όταν $h = 6 \text{ m}$;

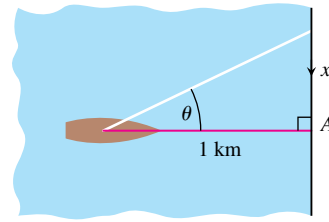


ΣΧΗΜΑ 2.47 Η κωνική δεξαμενή της Άσκησης 105.

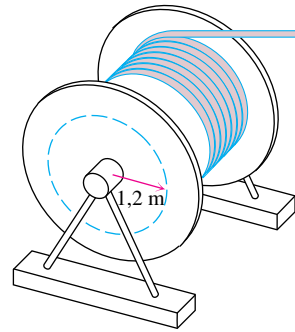
106. **Περιστρεφόμενο καρούλι** Κατά μήκος ενός δρόμου ξετυλίγεται καλώδιο για να τοποθετηθεί σε στύλους. Το ξετύλιγμα γίνεται από καρούλι όπου το καλώδιο ήταν τυλιγμένο ομοιόμορφα, σε επιστρώσεις σταθερής ακτίνας (δείτε το Σχήμα 2.48). Αν το φορτηγό που τραβά το καλώδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec (δηλαδή λίγο παραπάνω από 7 km/h), χρησιμοποιήστε την εξίσωση $s = r\theta$ για να βρείτε πόσο γρήγορα (σε rad/sec) γυρίζει το καρούλι τη στιγμή που ξετυλίγεται η επίστρωση ακτίνας 1,2 m.

107. **Προβολέας που σαρώνει** Το σχήμα δείχνει σκάφος σε απόσταση 1 km από την ακτή, την οποία σαρώνει με προβολέα. Ο προβολέας περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό, $d\theta/dt = -0,6$ rad/sec.

- (α) Με τι ταχύτητα κινείται το φως του προβολέα στην ακτή όταν το σκάφος φθάνει στο σημείο A ;
 (β) Ρυθμός περιστροφής 0,6 rad/sec πόσες περιστροφές ανά λεπτό σημαίνει;



108. **Σημεία κινούμενα στους άξονες συντεταγμένων** Τα σημεία A και B κινούνται στους άξονες x και y, αντίστοιχα, κατά τρόπο ώστε η απόσταση r (σε m) της ευθείας AB από την αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μήκος OA (αυξάνεται ή μειώνεται;) τη στιγμή που $OB = 2r$ και το B πλησιάζει την αρχή O με ταχύτητα 0,3 m/sec ;



ΣΧΗΜΑ 2.48 Το τηλεφωνικό καλώδιο της Άσκησης 106.

1. Η εξίσωση $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ καλείται **ταυτότητα** εφό-

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

σον ισχύει για όλες τις τιμές του θ . Η εξίσωση $\sin \theta = 0,5$ δεν είναι ταυτότητα διότι ισχύει μονάχα για συγκεκριμένες τιμές του θ , όχι για όλες. Αν παραγωγίσετε ως προς θ και τα δύο μέλη μιας τριγωνομετρικής ταυτότητας του θ , η καινούρια εξίσωση θα είναι επίσης ταυτότητα.

Παραγωγίστε τις ακόλουθες ταυτότητες ώστε να δείξετε ότι οι προκύπτουσες εξισώσεις ισχύουν για κάθε θ .

- (α) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 (β) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

2. **Μάθετε γράφοντας** Αν η ταυτότητα $\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ παραγωγιστεί ως προς x, η εξίσωση που προκύπτει είναι ταυτότητα; Μπορούμε να πούμε το ίδιο για την εξίσωση $x^2 - 2x - 8 = 0$; Εξηγήστε.

3. (α) Βρείτε τις τιμές των σταθερών a, b, και c ώστε οι

$$f(x) = \cos x \quad \text{και} \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad \text{και} \quad f''(0) = g''(0).$$

(β) Βρείτε τις τιμές των σταθερών b και c ώστε οι

$$f(x) = \sin(x+a) \quad \text{και} \quad g(x) = b \sin x + c \cos x$$

να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$f(0) = g(0) \quad \text{και} \quad f'(0) = g'(0).$$

(γ) Για τις τιμές των a, b, και c που βρήκατε στα (α) και (β), τι προκύπτει για την τρίτη και τέταρτη παράγωγο των f και g ;

4. **Λύσεις διαφορικών εξισώσεων**

(α) Δείξτε ότι οι $y = \sin x$, $y = \cos x$, και $y = a \cos x + b \sin x$ (a και b σταθερές) ικανοποιούν την εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

(β) Πώς θα τροποποιούσατε τις συναρτήσεις στο (α) ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$y'' + 4y = 0;$$

Γενικεύστε το αποτέλεσμα αυτό.

5. **Συνεφαπτόμενος κύκλος** Βρείτε τις τιμές των h, k, και a για τις οποίες ο κύκλος $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ εφάπτεται

της παραβολής $y = x^2 + 1$ στο σημείο $(1, 2)$ και επιπλέον οι δεύτερες παράγωγοι κύκλου και παραβολής d^2y/dx^2 έχουν την ίδια τιμή. Τέτοιου είδους κύκλοι που εφάπτονται μιας καμπύλης και έχουν ίδια δεύτερη παράγωγο με την καμπύλη στο σημείο επαφής καλούνται *συνεφαπτόμενοι*. Θα τους ξαναδούμε στο Κεφάλαιο 10.

6. **Οριακό έσοδο** Ένα λεωφορείο χωρά 60 άτομα. Ο αριθμός x των ανά διαδρομή επιβατών που χρησιμοποιούν το λεωφορείο συνδέεται με το αντίτιμο του εισιτηρίου p (σε ευρώ) μέσω της σχέσης $p = [3 - (x/40)]^2$. Γράψτε μια εξίσωση για το συνολικό έσοδο ανά διαδρομή $r(x)$ που εισπράττεται από την εταιρεία που εκμεταλλεύεται τη διαδρομή. Με πόσους επιβάτες ανά διαδρομή μηδενίζεται ο ρυθμός dr/dx ; Ποιο είναι τότε το αντίτιμο του εισιτηρίου; (Το αντίτιμο αυτό μεγιστοποιεί τα έσοδα, προτρέποντας την εταιρεία να επαναπροσδιορίσει το τιμολόγιό της.)

7. **Βιομηχανική παραγωγή**

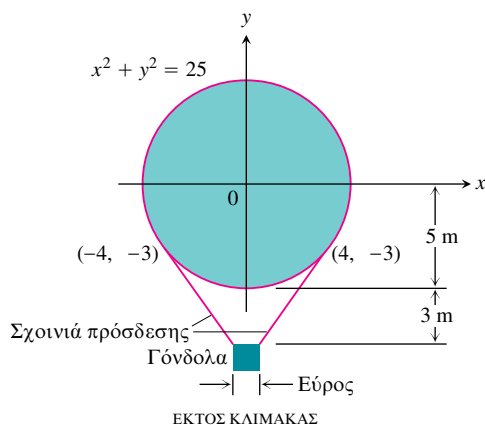
- (α) Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν συχνά τον όρο «ρυθμός αύξησης» κατά σχετική έννοια. Για παράδειγμα, έστω $u = f(t)$ ο αριθμός των εργατών τη χρονική στιγμή t σε μια βιομηχανία. (Θεωρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι διαφορίσιμη παρά το ότι παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, έχει δηλαδή κλιμακωτό χαρακτήρα.)

Έστω $v = g(t)$ η μέση παραγωγή ανά εργάτη τη στιγμή t . Η συνολική παραγωγή ισούται τότε με $y = uv$. Αν το εργατικό δυναμικό αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 4% ($du/dt = 0,04u$) και η παραγωγή ανά εργάτη αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 5% ($dv/dt = 0,05v$), να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της συνολικής παραγωγής, y .

- (β) Έστω ότι το εργατικό δυναμικό στο ερώτημα (α) μειώνεται με ετήσιο ρυθμό 2% ενώ η παραγωγή ανά εργάτη αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 3%. Η συνολική παραγωγή αυξάνεται τότε ή μειώνεται, και με τι ρυθμό;

8. **Σχεδιάζοντας μια γόνδολα** Ο σχεδιαστής ενός σφαιρικού αερόστατου διαμέτρου 10 m θέλει να μεταφέρει με αυτό μια γόνδολα. Με σχοινιά που εφάπτονται του μπλονιού προσδένει τη γόνδολα (δείτε το σχήμα) 3 m χαμηλότερα από το κατώτατο σημείο του αερόστατου. Στο σχήμα φαίνονται δύο από τα σχοινιά πρόσδεσης, τα οποία εφάπτονται της σφαιρικής επιφάνειας στα σημεία $(-4, -3)$ και $(4, -3)$. Πόσο φαρδιά πρέπει να είναι η γόνδολα;

9. **Πτώση με αλεξίπτωτο από την Πίζα** Στη φωτογραφία είκο-



νίζεται ο Mike McCarthy ενώ πέφτει με αλεξίπτωτο από τον Πύργο της Πίζας στις 5 Αυγούστου του 1988. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της ταχύτητας που είχε κατά την πτώση του.

10. **Κίνηση σωματιδίου** Για χρονικές στιγμές $t \geq 0$ η θέση



Ο Λονδρέζος Mike McCarthy πήδηξε από τον Πύργο της Πίζας, κάνοντας παγκόσμιο ρεκόρ πτώσεως με αλεξίπτωτο από χαμηλό ύψος (55 m).

Πηγή: *Boston Globe*, Aug. 6, 1988.)

ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα δίδεται από τη σχέση

$$s = 10 \cos(t + \pi/4).$$

- (α) Ποια η αρχική θέση του σωματιδίου (για $t = 0$);
- (β) Ποια τα ακρότατα σημεία (εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων) της κίνησης του σωματιδίου;
- (γ) Στα σημεία του ερωτήματος (β) να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου.
- (δ) Πότε διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχή των αξόνων το σωματίδιο; Ποια είναι τη στιγμή εκείνη η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνσή του;
11. **Εκτοξεύοντας έναν συνδετήρα** Πάνω στη Γη μπορείτε εύκολα να εκτοξεύσετε κατακόρυφα έναν συνδετήρα σε ύψος 20 m με ένα λαστιχάκι. Σε χρόνο t sec μετά την εκτόξευσή του ο συνδετήρας βρίσκεται σε ύψος $s = 20t - 4,9t^2$ m πάνω από το κεφάλι σας.
- (α) Πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος ο συνδετήρας; Με πόση ταχύτητα φεύγει από το χέρι σας;
- (β) Πάνω στη Σελήνη, η ίδια αρχική επιτάχυνση από το λαστιχάκι θα εκσφενδονίσει τον συνδετήρα σε ύψος $s = 20t - 0,8t^2$ m μέσα σε t sec. Περίπου πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να φθάσει σε μέγιστο ύψος ο συνδετήρας, και ποιο είναι αυτό;
12. **Ταχύτητες δύο σωματιδίων** Τη χρονική στιγμή t sec, οι θέσεις δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m και $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m. Πότε έχουν ίσες ταχύτητες τα σωματίδια;
13. **Ταχύτητα σωματιδίου** Ένα σωματίδιο σταθερής μάζας m

κινείται επί του άξονα x . Η ταχύτητα v και η θέση του x ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} k(x_0^2 - x^2),$$

όπου k , v_0 , και x_0 είναι σταθερές. Δείξτε ότι για $v \neq 0$, θα ισχύει

$$m \frac{dv}{dt} = -kx.$$

14. Μέση και στιγμιαία ταχύτητα

(α) Δείξτε ότι αν η θέση x ενός κινητού δίδεται από τη δευτεροβάθμια συνάρτηση του t , $x = At^2 + Bt + C$, τότε η μέση ταχύτητα στο τυχόν χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα στον μέσον του χρονικού διαστήματος.

(β) Ποια η γεωμετρική σημασία του αποτελέσματος (α);

15. Να βρεθούν όλες οι τιμές των σταθερών m και b για τις οποίες η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{για } x < \pi \\ mx + b, & \text{για } x \geq \pi \end{cases}$$

είναι

(α) συνεχής στο $x = \pi$.

(β) διαφορίσιμη στο $x = \pi$.

16. Μάθετε γράφοντας

Εξηγήστε αν και γιατί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

διαθέτει παράγωγο στο $x = 0$.

17. (α) Για ποιες τιμές των a και b είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

διαφορίσιμη για κάθε x ;

(β) Μάθετε γράφοντας

Εξηγήστε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης της f .

18. (α) Για ποιες τιμές των a και b είναι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

διαφορίσιμη για κάθε x ;

(β) Μάθετε γράφοντας

Εξηγήστε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης της g .

19. Περιττές διαφορίσιμες συναρτήσεις

Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζει η παράγωγος μιας περιττής διαφορίσιμης συναρτήσεως του x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

20. Άρτιες διαφορίσιμες συναρτήσεις

Τι το αξιοσημείωτο παρουσιάζει η παράγωγος μιας άρτιας διαφορίσιμης συναρτήσεως του x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

21. Ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος

που περιέχει το σημείο x_0 . Έστω ακόμη ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 , ότι $f(x_0) = 0$, και ότι η g είναι συνεχής στο x_0 . Δείξτε ότι το γινόμενο fg είναι διαφορίσιμο στο x_0 . Βλέπετε έτσι ότι, ενώ η $|x|$ (για παράδειγμα) δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$, το γινόμενο $x|x|$ είναι διαφορίσιμο στο $x = 0$.

22. (Συνέχεια της Άσκησης 21)

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Ασκήσεως 21 για να αποδείξετε τη διαφορισμότητα των παρακάτω συναρτήσεων στο $x = 0$.

(α) $|x| \sin x$ (β) $x^{2/3} \sin x$ (γ) $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

(δ) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. Μάθετε γράφοντας

Βρείτε αν η παράγωγος της συναρτήσεως

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x = 0$. Το ίδιο για την παράγωγο της $k(x) = xh(x)$. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

24. Έστω ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες για όλες τις τιμές των x και y :

i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, όπου $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Δείξτε ότι η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x και ότι $f'(x) = f(x)$.

25. Ο γενικευμένος τύπος της παραγώγου γινομένου

Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής (Παράρτημα 1) δείξτε ότι αν $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο διαφορίσιμων συναρτήσεων, τότε η συνάρτηση y είναι διαφορίσιμη στο κοινό πεδίο ορισμού τους και ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

26. Ο κανόνας του Leibniz για υψηλότερης τάξης παραγώγους γινομένων

Ο κανόνας του Leibniz για παραγώγους υψηλότερης τάξης γινομένων διαφορίσιμων συναρτήσεων λέει ότι

(α) $\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} v + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2v}{dx^2}$

(β) $\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3} v + 3 \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dv}{dx} + 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} + u \frac{d^3v}{dx^3}$

(γ) $\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} v + n \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + \cdots$

$$+ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} \frac{d^k v}{dx^k}$$

$$+ \cdots + u \frac{d^n v}{dx^n}.$$

Οι εξισώσεις (α) και (β) αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (γ). Αποδείξτε τη (γ) με μαθηματική επαγωγή, κάνοντας χρήση της πρότασης

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

3

Εφαρμογές των παραγώγων

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις παραγώγους για την εύρεση μέγιστων και ελάχιστων τιμών συναρτήσεων, για την πρόβλεψη και την ερμηνεία του σχήματος γραφικών παραστάσεων, και τέλος για την κατανόηση της συμπεριφοράς συναρτήσεων που ικανοποιούν διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε επίσης πώς η εφαπτόμενη ευθεία αναπαράγει το σχήμα της καμπύλης κοντά στο σημείο επαφής και πώς χρησιμεύει για την αριθμητική εύρεση των ριζών μιας συναρτήσεως. Σε πολλές από τις εφαρμογές αυτές κεντρικό ρόλο παίζει το θεώρημα μέσης τιμής, τα πορίσματα του οποίου «δείχνουν τον δρόμο» για την είσοδό μας στον ολοκληρωτικό λογισμό, στο Κεφάλαιο 4.

3.1

Ακρότατα συναρτήσεων

Το πρόβλημα της πλατφόρμας γεωτρήσεως

- Ολικά (απόλυτα) ακρότατα
- Τοπικά (σχετικά) ακρότατα
- Εύρεση ακροτάτων

Μια από τις χρησιμότερες εφαρμογές των παραγώγων είναι η απάντηση στο ερώτημα αν μια συνάρτηση εμφανίζει μέγιστες ή ελάχιστες τιμές σε κάποιο διάστημα και πού βρίσκονται αυτές. Έτσι μπορούμε να λύνουμε προβλήματα όπως το ακόλουθο.

Το πρόβλημα της πλατφόρμας γεωτρήσεως

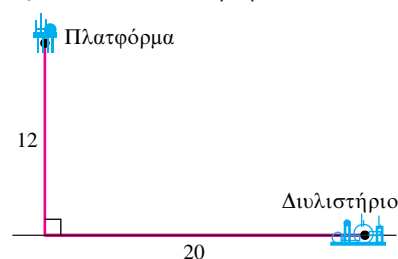
Παράδειγμα 1 Αγωγός πετρελαίου από την πλατφόρμα γεωτρήσεως ως το διυλιστήριο

Μια πλατφόρμα γεωτρήσεως που απέχει από την ακτή 12 km πρόκειται να συνδεθεί μέσω αγωγού με παράκτιο διυλιστήριο, το οποίο βρίσκεται 20 km μακρύτερα από το εγγύτερο στην πλατφόρμα σημείο της ακτής. Αν το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 50.000 € ανά km και το κόστος του επίγειου αγωγού είναι 30.000 € ανά km, τότε ποιος συνδυασμός των δύο τύπων αγωγών θα δώσει τη λιγότερο δαπανηρή σύνδεση;

Προκαταρκτική ανάλυση

Κάνουμε μερικές δοκιμές για να αποκτήσουμε μια πρώτη αίσθηση του προβλήματος:

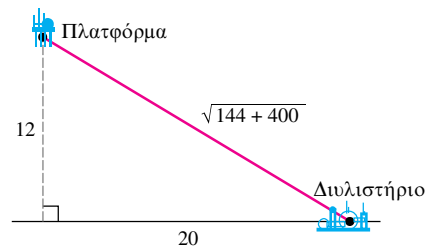
(α) Ελάχιστο μήκος υποθαλάσσιου αγωγού



Εφόσον ο υποθαλάσσιος αγωγός είναι ακριβότερος, ας δοκιμάσουμε να τον χρησιμοποιήσουμε όσο λιγότερο γίνεται. Έτσι επιλέγουμε την πλησιέστερη διαδρομή προς την ακτή (12 km) και κατόπιν χρησιμοποιούμε επίγειο αγωγό για τα υπόλοιπα 20 km ως το διυλιστήριο.

$$\begin{aligned}\text{Κόστος} &= 12(50.000) + 20(30.000) \\ &= 1.200.000\end{aligned}$$

(β) Όλος ο αγωγός υποθαλάσσιος (ευθεία σύνδεση)

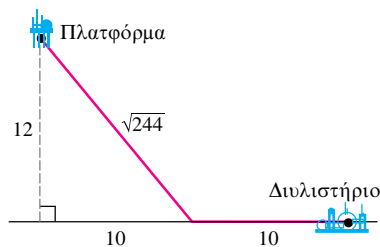


Εδώ επιλέγουμε την ευθεία διαδρομή (όλη υποθαλάσσια) από την πλατφόρμα ως το διυλιστήριο.

$$\begin{aligned}\text{Κόστος} &= \sqrt{544} (50.000) \\ &= 1.166.190\end{aligned}$$

Πρόκειται για φθηνότερη επιλογή απ' ό,τι η (α).

(γ) Κάτι ενδιάμεσο

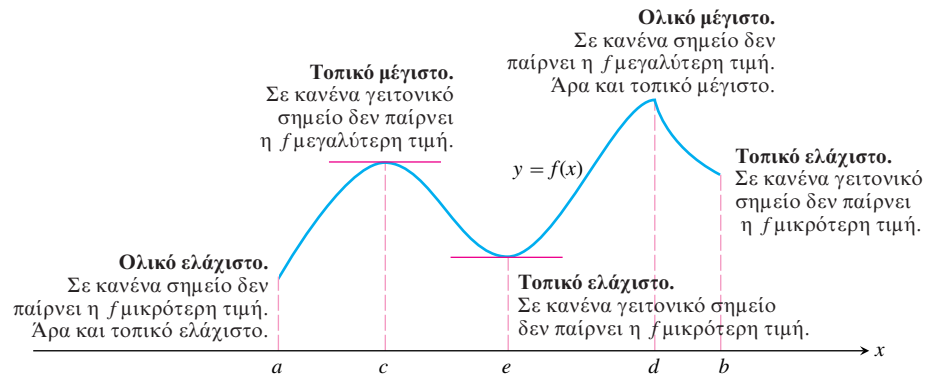


Εδώ ο υποθαλάσσιος αγωγός φθάνει ως το ενδιάμεσο σημείο που απέχει 10 km από το διυλιστήριο, και κατόπιν συνεχίζει ο επίγειος αγωγός.

$$\begin{aligned}\text{Κόστος} &= \sqrt{244} (50.000) + 10(30.000) \\ &\approx 1.081.025\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καμία από τις δύο ακραίες περιπτώσεις (ελάχιστη υποθαλάσσια διαδρομή ή όλος ο αγωγός υποθαλάσσιος) δεν δίνει τη βέλτιστη λύση. Μια ενδιάμεση κατάσταση είναι προτιμότερη.

Το σημείο που απέχει 10 km από το διυλιστήριο ήταν μια τυχαία επιλογή. Υπάρχει άραγε καλύτερη; Κι αν ναι, πώς θα τη βρούμε; Υπάρχει κάποια μέθοδος λύσεως; Τα μαθηματικά εργαλεία που θα αναπτύξουμε θα δώσουν απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήματα. Στο τέλος της ενότητας θα επανέλθουμε για να λύσουμε το πρόβλημα του παρόντος παραδείγματος.



ΣΧΗΜΑ 3.1 Ταξινόμηση μεγίστων και ελαχίστων.

Ολικά (απόλυτα) ακρότατα

Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησεως, τόσο σε τοπική όσο και σε συνολική κλίμακα (δείτε το Σχήμα 3.1), παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον.

Ορισμός Ολικά ακρότατα

Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D . Η τιμή $f(c)$ είναι

(α) **ολικό (ή απόλυτο) μέγιστο** στο D αν και μόνο αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε x στο D ,

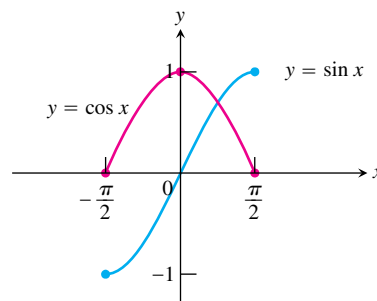
(β) **ολικό (ή απόλυτο) ελάχιστο** στο D αν και μόνο αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε x στο D .

Συχνά παραλείπουμε τον προσδιορισμό «ολικά» και κάνουμε λόγο απλώς για «ακρότατα».

Το Παράδειγμα 2 δείχνει ότι τα ακρότατα μπορεί να προκύψουν τόσο σε εσωτερικά σημεία όσο και σε άκρα διαστημάτων.

Παράδειγμα 2 Διερεύνηση ακροτάτων

Στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$, η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ έχει μέγιστη τιμή 1 (μία φορά) και ελάχιστη τιμή 0 (δύο φορές). Η συνάρτηση $g(x) = \sin x$ έχει μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1 (Σχήμα 3.2).



ΣΧΗΜΑ 3.2 Οι γραφικές παραστάσεις του Παραδείγματος 2.

Συναρτήσεις που δίδονται από τον ίδιο μαθηματικό τύπο αλλά διαθέτουν διαφορετικά πεδία ορισμού, μπορεί να έχουν διαφορετικά ακρότατα.

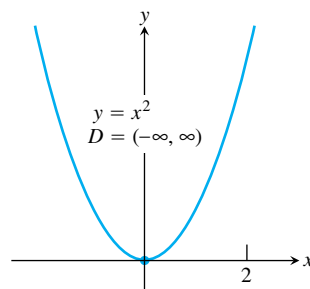
Παράδειγμα 3 Διερεύνηση ολικών ακροτάτων

Τα ολικά ακρότατα που εμφανίζουν στα πεδία ορισμού τους οι ακόλουθες συναρτήσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.3.

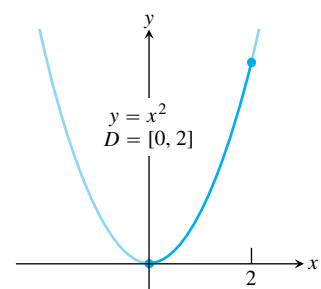
Τύπος συναρτήσεως	Πεδίο ορισμού D	Ολικά ακρότατα στο D
(α) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$.
(β) $y = x^2$	$[0, 2]$	Ολικό μέγιστο 4 στο $x = 2$. Ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$.
(γ) $y = x^2$	$(0, 2]$	Ολικό μέγιστο 4 στο $x = 2$. Δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο.
(δ) $y = x^2$	$(0, 2)$	Δεν υπάρχουν ολικά ακρότατα.

CD-ROM**Δικτυότοπος****Βιογραφικά στοιχεία**

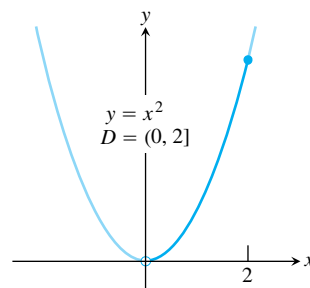
Daniel Bernoulli
(1700-1789)



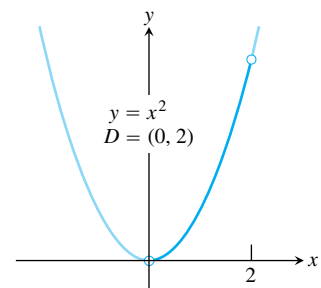
(α) ολικό ελάχιστο μόνο



(β) ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο



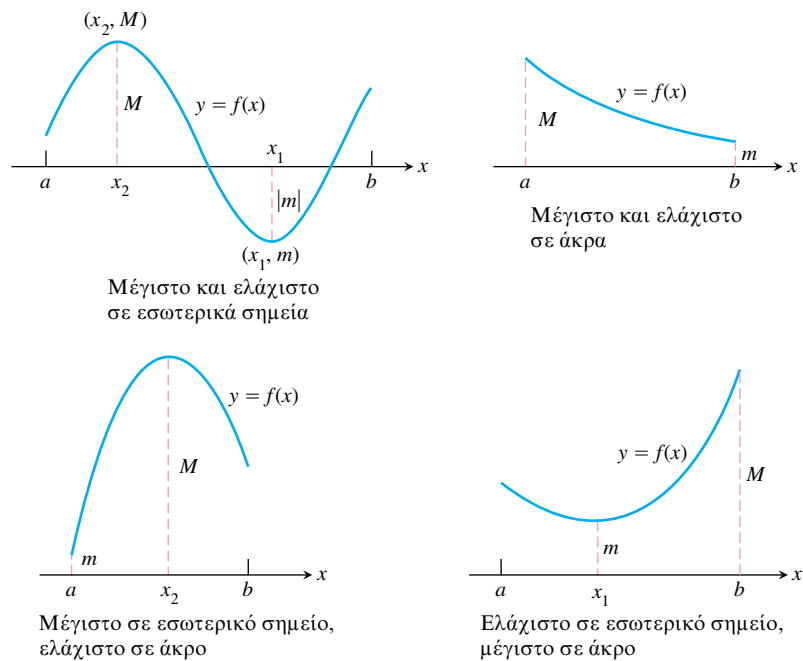
(γ) ολικό μέγιστο μόνο

(δ) ούτε ολικό μέγιστο
ούτε ολικό ελάχιστο**ΣΧΗΜΑ 3.3** Οι γραφικές παραστάσεις του Παραδείγματος 3.

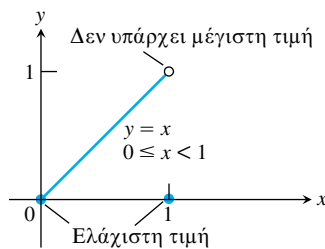
Το Παράδειγμα 3 δείχνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην διαθέτει μέγιστο ή ελάχιστο. Βεβαίως, αυτό δεν ισχύει για συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε πεπερασμένο κλειστό διάστημα.

Θεώρημα 1 Θεώρημα ακροτάτων για συνεχείς συναρτήσεις

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος I , τότε θα διαθέτει ολικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο I . Δηλαδή, θα υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 στο I τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε άλλο x στο I (Σχήμα 3.4).



ΣΧΗΜΑ 3.4 Τα ακρότατα συναρτήσεως που είναι συνεχής και ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ μπορεί να προκύπτουν σε εσωτερικά σημεία ή στα άκρα του διαστήματος.



ΣΧΗΜΑ 3.5 Αρκεί ένα σημείο ασυνέχειας για να αναιρέσει την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου σε κλειστό διάστημα. Η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 1]$ πλην του $x = 1$, συνεπώς η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 1]$ δεν έχει μέγιστο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 απαιτεί λεπτομερή γνώση του συστήματος των πραγματικών αριθμών, και παραλείπεται εδώ.

Παράδειγμα 4 Τα ακρότατα εξαρτώνται από τη συνέχεια

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.5, οι απαιτήσεις του Θεωρήματος 1 περί κλειστότητας του διαστήματος και συνέχειας της συναρτήσεως είναι ουσιώδεις. Χωρίς αυτές, τα συμπεράσματα του θεωρήματος δεν ισχύουν κατ' ανάγκην.

Τοπικά (σχετικά) ακρότατα

Το Σχήμα 3.1 δείχνει μια γραφική παράσταση με πέντε ακρότατα μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της $[a, b]$. Το ολικό (απόλυτο) ελάχιστο της συναρτήσεως προκύπτει στο a παρά το ότι η τιμή της συνάρτησης στο e είναι μικρότερη από τις τιμές των γειτονικών της σημείων. Κοιτάζοντας την καμπύλη από αριστερά βλέπουμε ότι αρχικά ανέρχεται, ενώ μετά το c κατέρχεται, ώστε η τιμή $f(c)$ να αποτελεί μέγιστο σε τοπική κλίμακα. Η συνάρτηση εμφανίζει ολικό μέγιστο στο d .

Ορισμός Τοπικά ακρότατα

Έστω c εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f . Η τιμή $f(c)$ είναι

(α) **τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο** στο c αν και μόνο αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε x που ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c

(β) **τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο** στο c αν και μόνο αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε x που ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c .

Μπορούμε να επεκτείνουμε τους ορισμούς των τοπικών ακρότατων και στα άκρα διαστημάτων. Μια συνάρτηση f θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο άκρο c αν ισχύει η κατάλληλη ανισότητα για όλα τα x που ανήκουν σε ένα ημιανοιχτό διάστημα που περιέχει το c .

Ένα ολικό ακρότατο είναι και τοπικό ακρότατο, αφού όντας ακρότατο σε όλο το πεδίο ορισμού θα είναι ακρότατο και στην άμεση γειτονιά του. Έτσι, ο κατάλογος όλων των τοπικών ακρότατων θα συμπεριλαμβάνει αυτομάτως και όποια ολικά ακρότατα υπάρχουν.

Εύρεση ακρότατων

Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου η συνάρτηση του Σχήματος 3.1 παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, είναι σημεία όπου η f' είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει. Η πρόταση αυτή έχει γενική ισχύ, όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2 Τοπικά ακρότατα

Αν μια συνάρτηση f εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου ορισμού της, και αν υπάρχει η f' στο c , τότε

$$f'(c) = 0.$$

Το Θεώρημα 2 μας λέει ότι η πρώτη παράγωγος μιας συναρτήσεως μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού όπου υπάρχει τοπικό ακρότατο και όπου η παράγωγος ορίζεται. Έτσι, τα μόνα σημεία στα οποία μια συνάρτηση f μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο (τοπικό ή ολικό) είναι τα

1. εσωτερικά σημεία όπου $f' = 0$
2. εσωτερικά σημεία όπου η f' δεν ορίζεται
3. άκρα του πεδίου ορισμού της f .



Στις περισσότερες εφαρμογές ζητούμε τα ολικά ακρότατα συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα. Το Θεώρημα 1 μας εγγυάται ότι τα ακρότατα αυτά υπάρχουν και το Θεώρημα 2 μας λέει πού να τα βρούμε. Ο ακόλουθος ορισμός συνοψίζει όσα είπαμε.

Ορισμός Κρίσιμο σημείο

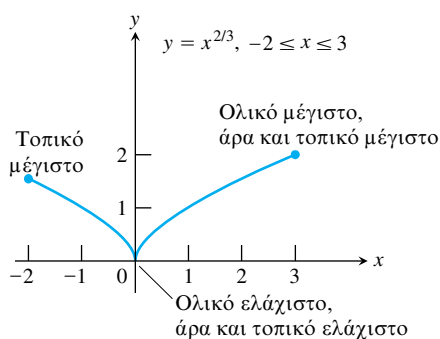
Ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f όπου η f' είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει είναι **κρίσιμο σημείο** της f .

Μπορούμε λοιπόν, συνοψίζοντας, να πούμε ότι τα ακρότατα θα εμφανίζονται μονάχα σε κρίσιμα σημεία και σε άκρα διαστημάτων.

Παράδειγμα 5 Εύρεση ολικών ακρότατων σε κλειστό διάστημα

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x) = x^{2/3}$ στο διάστημα $[-2, 3]$.

Λύση Το Σχήμα 3.6 δείχνει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο περίπου ίσο με 2 στο $x = 3$, και ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$. Επαληθεύουμε τις παρατηρήσεις αυτές υπολογίζοντας τη συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος, και επιλέγοντας τη μέγιστη και την ελάχιστη από τις τιμές που θα βρούμε.

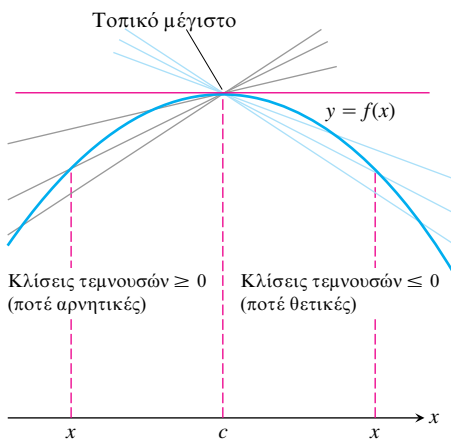


ΣΧΗΜΑ 3.6 Τα ακρότατα της $f(x) = x^{2/3}$ στο διάστημα $[-2, 3]$ προκύπτουν για $x = 0$ και $x = 3$. (Παράδειγμα 5)

Πώς Βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα συνεχούς συναρτήσεως f σε κλειστό διάστημα

Βήμα 1. Υπολογίζουμε την f σε όλα τα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Βήμα 2. Από τις τιμές που βρήκαμε επιλέγουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη.



ΣΧΗΜΑ 3.7 Καμπύλη με τοπικό μέγιστο. Η τιμή της κλίσης στο c αποτελεί ταυτόχρονα το όριο μη θετικών και μη αρνητικών αριθμών, και συνεπώς μηδενίζεται.

Η πρώτη παράγωγος

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

δεν μηδενίζεται πουθενά, ενώ για $x = 0$ δεν ορίζεται. Οι τιμές της f στο κρίσιμο αυτό σημείο και στα άκρα του διαστήματος είναι:

$$\text{Τιμή στο κρίσιμο σημείο: } f(0) = 0$$

$$\text{Τιμές στα άκρα: } f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

$$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ολικό μέγιστο της συναρτήσεως είναι $\sqrt[3]{9} \approx 2,08$, και ότι προκύπτει στο δεξιό άκρο $x = 3$. Το ολικό ελάχιστο είναι 0, και προκύπτει στο εσωτερικό σημείο $x = 0$.

Απόδειξη Θεωρήματος 2 Για να δείξουμε ότι η $f'(c)$ μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό τοπικό ακρότατο, δείχνουμε πρώτα ότι η $f'(c)$ δεν μπορεί να είναι θετική και κατόπιν ότι δεν μπορεί να είναι αρνητική. Ο μόνος αριθμός που δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός είναι το μηδέν, άρα αυτή πρέπει να είναι και η τιμή της $f'(c)$.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$ (Σχήμα 3.7) ούτως ώστε $f(x) - f(c) \leq 0$ για κάθε x αρκούντως κοντά στο c . Αφού το c είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f , η $f'(c)$ ορίζεται ως το αμφίπλευρο όριο

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Συνεπώς, θα υπάρχουν στο $x = c$ τόσο το δεξιό όσο και το αριστερό όριο και θα ισούνται με $f'(c)$. Ας δούμε το καθένα από τα όρια αυτά χωριστά, αρχίζοντας από το δεξιό:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad \text{Εφόσον } (x - c) > 0 \text{ και } f(x) \leq f(c) \quad (1)$$

Ομοίως, για το αριστερό όριο έχουμε

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad \text{Εφόσον } (x - c) < 0 \text{ και } f(x) \leq f(c) \quad (2)$$

Συνδυαζόμενες, οι (1) και (2) συνεπάγονται ότι $f'(c) = 0$.

Έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα για τοπικά μέγιστα. Για να το αποδείξουμε και για τοπικά ελάχιστα, όπου $f(x) \geq f(c)$, αρκεί να αλλάξουμε στην παραπάνω απόδειξη τη φορά των ανισοτήτων (1) και (2).

Στο Παράδειγμα 6, εξετάζουμε τη συνάρτηση της οποίας τη γραφική παράσταση σχεδιάσαμε στο Παράδειγμα 3 της Ενότητας 2 του Κεφαλαίου 0.

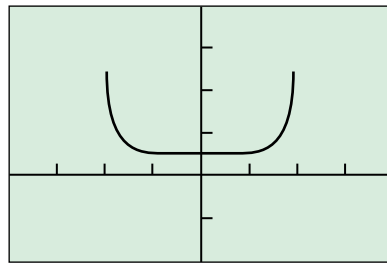
Παράδειγμα 6 Εύρεση ακροτάτων

Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Λύση Το Σχήμα 3.8 υποδεικνύει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο περίπου ίσο με 0,5 στο $x = 0$. Φαίνεται ακόμη να υπάρχουν τοπικά μέγιστα για $x = -2$ και $x = 2$. Στα σημεία αυτά, ωστόσο, η f δεν ορίζεται. Άλλα μέγιστα δεν φαίνεται να υπάρχουν.

Ας επαληθεύσουμε τώρα τις γραφικές αυτές παρατηρήσεις. Η



ΣΧΗΜΑ 3.8 Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

(Παράδειγμα 6)

συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $4 - x^2 > 0$, συνεπώς πεδίο ορισμού της είναι το ανοιχτό διάστημα $(-2, 2)$. Το πεδίο ορισμού δεν έχει άκρα, κι έτσι όλα τα ακρότατα οφείλουν να εμφανίζονται σε κρίσιμα σημεία. Παραγωγίζουμε την

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = (4-x^2)^{-1/2},$$

για να βρούμε την f' :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/2}(-2x) = \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Το μόνο κρίσιμο σημείο στο πεδίο ορισμού $(-2, 2)$ είναι το $x = 0$. Η τιμή

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{4-0^2}} = \frac{1}{2}$$

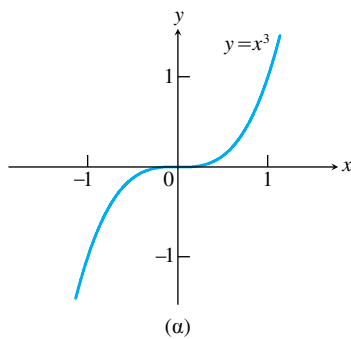
είναι λοιπόν η μόνη υποψήφια για ακρότατο.

Προσδιορίζουμε αν το $1/2$ είναι όντως ακρότατο της f , εξετάζοντας τον τύπο

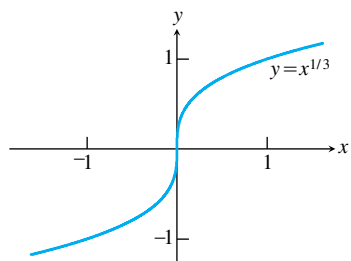
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Καθώς το x απομακρύνεται από το 0 προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, ο παρονομαστής μειώνεται, η τιμή της f αυξάνεται, και η γραφική παράσταση ανέρχεται. Υπάρχει λοιπόν, ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι ολικό.

Δεν υπάρχουν μέγιστα, τοπικά ή ολικά. Αυτό δεν παραβιάζει το Θεώρημα 1 (θεώρημα ακροτάτων) αφού εδώ η f ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα. Το Θεώρημα 1 εγγυάται την ύπαρξη ακροτάτων υπό την προϋπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα.



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 3.9 Κρίσιμα σημεία που δεν είναι ακρότατα. (α) Η $y' = 3x^2$ μηδενίζεται στο $x = 0$, αλλά η $y = x^3$ δεν παρουσιάζει ακρότατο εκεί. (β) Η $y' = (1/3)x^{-2/3}$ δεν ορίζεται για $x = 0$, αλλά η $y = x^{1/3}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο εκεί.

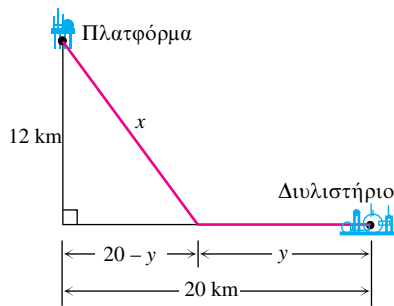
Παράδειγμα 7 Ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι πάντα και ακρότατο

Τα ακρότατα προκύπτουν μόνο σε κρίσιμα σημεία και σε άκρα, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Ένα κρίσιμο σημείο ή ένα άκρο δεν είναι κατ' ανάγκην και ακρότατο. Η πρόταση αυτή επικυρώνεται από το Σχήμα 3.9 για εσωτερικά σημεία, και από την Άσκηση 56 για τα άκρα του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 8 Λύση του προβλήματος της πλατφόρμας γεωτρήσεως

Αποτυπώνουμε σε πρόχειρο σχήμα τη γεωμετρία και τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος. Θεωρούμε ως μεταβλητές το μήκος x του υποθαλάσσιου αγωγού και το μήκος y του επίγειου αγωγού (Σχήμα 3.10).

Το σημείο-κλειδί είναι να αναγνωρίσουμε από το σχήμα ότι απέ-



ΣΧΗΜΑ 3.10 Το σχήμα για την επίλυση του προβλήματος με την πλατφόρμα γεωτρήσεως.

ναντι από την πλατφόρμα σχηματίζεται ορθή γωνία. Έτσι μπορούμε να συνδέσουμε τα x και τα y βάσει του Πυθαγόρειου Θεωρήματος:

$$\begin{aligned}x^2 &= 12^2 + (20 - y)^2 \\x &= \sqrt{144 + (20 - y)^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Μόνο η θετική ρίζα έχει νόημα εδώ.

Το κόστος του αγωγού είναι η συνάρτηση

$$c = 50.000x + 30.000y.$$

Για να εκφράσουμε το c συναρτήσει μόνο της μιας μεταβλητής, αντικαθιστούμε το x κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (3):

$$c = 50.000 \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 30.000y.$$

Πρέπει τώρα να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως $c(y)$ στο διάστημα $0 \leq y \leq 20$. Η πρώτη παράγωγος της c ως προς y είναι

$$\begin{aligned}c' &= 50.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 30.000 \\&= -50.000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 30.000.\end{aligned}$$

Θέτουμε το c' ίσο με μηδέν και παίρνουμε

$$\begin{aligned}50.000(20 - y) &= 30.000 \sqrt{144 + (20 - y)^2} \\ \frac{5}{3}(20 - y) &= \sqrt{144 + (20 - y)^2} \\ \frac{25}{9}(20 - y)^2 &= 144 + (20 - y)^2 \\ \frac{16}{9}(20 - y)^2 &= 144 \\ (20 - y) &= \pm \frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9 \\ y &= 20 \pm 9 \\ y &= 11 \quad \text{ή} \quad y = 29.\end{aligned}$$

Μόνο η ρίζα $y = 11$ ανήκει στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Στο κρίσιμο αυτό σημείο καθώς και στα άκρα του διαστήματος η c παίρνει τις εξής τιμές:

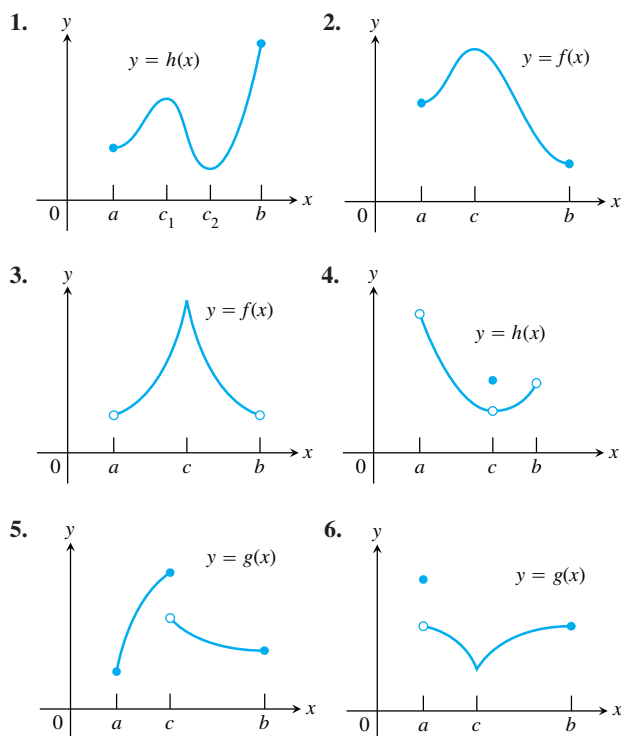
$$\begin{aligned}c(11) &= 1.080.000 \\ c(0) &= 1.166.190 \\ c(20) &= 1.200.000.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η λιγότερο δαπανηρή σύνδεση στοιχίζει 1.080.000 € και επιτυγχάνεται μέσω υποθαλάσσιου αγωγού που φτάνει στην ακτή σε σημείο το οποίο απέχει 11 km από το διυλιστήριο.

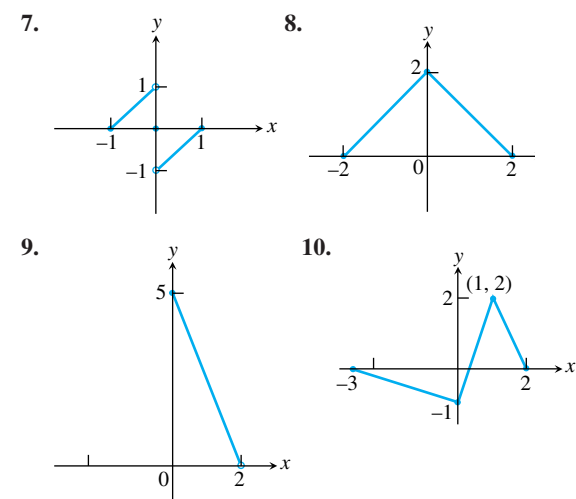
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1

Γραφική εύρεση ακροτάτων

Στις Ασκήσεις 1-6, προσδιορίστε από τη γραφική παράσταση αν η συνάρτηση παρουσιάζει ολικά ακρότατα στο $[a, b]$. Κατόπιν εξηγήστε γιατί η απάντησή σας είναι συμβατή με το Θεώρημα 1.



Στις Ασκήσεις 7-10, βρείτε πού προκύπτουν ακρότατα και ποια είναι αυτά.



Στις Ασκήσεις 11-14, αντιστοιχίστε κάθε γραφική παράσταση με έναν πίνακα τιμών.

11.

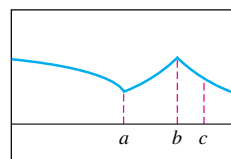
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

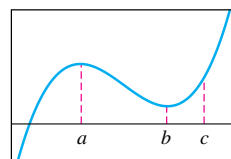
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

x	$f'(x)$
a	δεν υπάρχει
b	0
c	-2



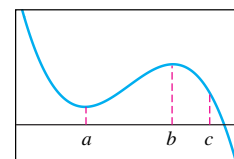
(α)



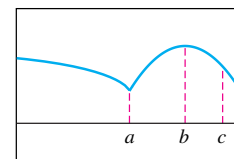
(γ)

14.

x	$f'(x)$
a	δεν υπάρχει
b	δεν υπάρχει
c	-1,7



(β)



(δ)

Ολικά ακρότατα

Στις Ασκήσεις 15-20, βρείτε τα ολικά ακρότατα κάθε συνάρτησεως στο αναγραφόμενο διάστημα. Κατόπιν σχεδιάστε τη συνάρτηση. Εντοπίστε σε ποια σημεία του γραφήματος προκύπτουν ολικά ακρότατα και καταγράψτε τις συντεταγμένες τους.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

16. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

17. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

18. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0,5 \leq x \leq 2$

20. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

Εύρεση ακροτάτων

Στις Ασκήσεις 21-30, βρείτε πού υπάρχουν και ποια είναι τα ακρότατα της συνάρτησεως.

21. $y = 2x^2 - 8x + 9$

22. $y = x^3 - 2x + 4$

23. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

24. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

25. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

26. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

28. $y = \sqrt{3+2x-x^2}$

29. $y = \frac{x}{x^2+1}$

30. $y = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

Τοπικά ακρότατα και κρίσιμα σημεία

Στις Ασκήσεις 31-38, βρείτε την παράγωγο σε κάθε κρίσιμο σημείο και προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα.

31. $y = x^{2/3}(x + 2)$

32. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

33. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

34. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

35. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

36. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

37. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

38. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

Απαντήστε στα ερωτήματα των Ασκήσεων 39 και 40, αιτιολογώντας κάθε απάντησή σας.

39. **Μάθετε γράφοντας** Έστω $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

- (α) Υπάρχει $f'(2)$;
- (β) Δείξτε ότι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της f εμφανίζεται για $x = 2$.
- (γ) Αντιτίθεται το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) στο θεώρημα ακροτάτων;
- (δ) Επαναλάβετε τα (α) και (β) για την $f(x) = (x - a)^{2/3}$, δηλαδή με το a στη θέση του 2.

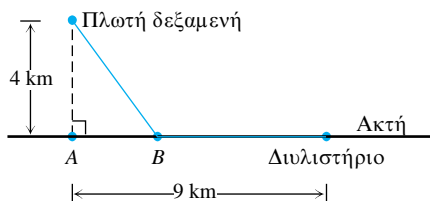
40. **Μάθετε γράφοντας** Έστω $f(x) = |x^3 - 9x|$.

- (α) Υπάρχει $f'(0)$;
- (β) Υπάρχει $f'(3)$;
- (γ) Υπάρχει $f'(-3)$;
- (δ) Προσδιορίστε όλα τα ακρότατα της f .

Εφαρμογές Βελτιστοποίησης

Όταν ζητάτε τα μέγιστα ή τα ελάχιστα συναρτήσεως μιας μεταβλητής, καλό είναι να σχεδιάζετε πρώτα τη συνάρτηση σε κάποιο κατάλληλο διάστημα. Αυτό θα σας βοηθήσει να αντιληφθείτε καλύτερα το πρόβλημα, προτού μπειτε στις λεπτομέρειες των υπολογισμών· αλλά και θα έχετε έναν εποπτικό έλεγχο της λύσης που βρήκατε.

41. **Κατασκευή αγωγού** Ένα δεξαμενόπλοιο εφοδιάζει με πετρέλαιο μια πλωτή δεξαμενή που απέχει 4 km από την ακτή. Το πλησιέστερο διυλιστήριο βρίσκεται 9 km ανατολικά του σημείου της ακτής ακριβώς απέναντι από τη δεξαμενή. Είναι απαραίτητο να κατασκευαστεί ένας αγωγός σύνδεσης της δεξαμενής με το διυλιστήριο. Η κατασκευή στοιχίζει 300.000 € ανά km διά θαλάσσης και 200.000 € ανά km διά ξηράς.



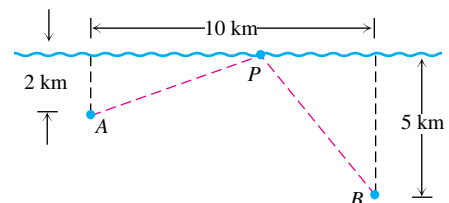
- (α) Εντοπίστε το σημείο B που ελαχιστοποιεί το κατασκευαστικό κόστος.

(β) Το κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής αναμένεται να αυξηθεί, ενώ το κόστος της επίγειας κατασκευής αναμένεται να μείνει σταθερό. Για ποιο κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής συμφέρει πλέον περισσότερο να κατασκευαστεί ο αγωγός απευθείας στο σημείο A;

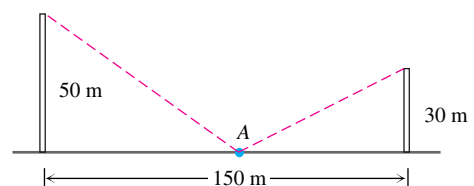
42. **Εθνική οδός** Τα χωριά A και B πρόκειται να συνδεθούν μέσω εθνικής οδού. Σε απόσταση 50 km νότια της ευθείας που συνδέει τα χωριά, υπάρχει ένας επαρχιακός δρόμος ο οποίος μπορεί να αναβαθμιστεί σε εθνική οδό. Το κόστος αναβαθμίσεως του υπάρχοντος δρόμου είναι 300.000 € ανά km, ενώ το κόστος κατασκευής νέας εθνικής οδού είναι 500.000 € ανά km. Βρείτε ποιος συνδυασμός αναβαθμίσεως και νέας κατασκευής ελαχιστοποιεί το κόστος οδικής σύνδεσης των δύο χωριών. Χαράξτε επακριβώς στο σχήμα τον σχεδιασμό της εθνικής οδού που προτείνετε.



43. **Τοποθεσία σταθμού άντλησης** Δύο πόλεις βρίσκονται στα νότια ενός ποταμού. Για τις ανάγκες ύδρευσης των πόλεων πρόκειται να κατασκευαστεί στον ποταμό ένας σταθμός άντλησεως ύδατος, απ' όπου θα ξεκινούν δύο αγωγοί που θα φέρνουν το νερό στην κάθε πόλη. Κάθε αγωγός θα κατασκευαστεί επί της ευθείας που συνδέει τον σταθμό με την αντίστοιχη πόλη. Βρείτε την τοποθεσία του σταθμού άντλησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος των αγωγών ύδρευσης.



44. **Μήκος καλωδίου** Δύο πύργοι έχουν ύψος 50 m και 30 m αντίστοιχα, και απέχουν 150 m. Ένα καλώδιο πρόκειται να συνδέσει το σημείο A με την κορυφή κάθε πύργου.



- (α) Εντοπίστε τη θέση του A που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος του καλωδίου.
- (β) Δείξτε γενικά ότι, ανεξαρτήτως του ύψους των πύργων, το μήκος του καλωδίου ελαχιστοποιείται αν οι γωνίες με κορυφή το σημείο A γίνουν ίσες.

45. **Μάθετε γράφοντας** Η συνάρτηση

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5,$$

αναπαριστά τον όγκο κάποιου κιβωτίου.

- (α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης V .

- (β) Τι σημαίνουν για τον όγκο του κιβωτίου οι τιμές που βρήκατε στο (α);

46. Μάθετε γράφοντας Η συνάρτηση

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad 0 < x < \infty,$$

αναπαριστά την περίμετρο ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαστάσεων x επί $100/x$.

- (α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης P .

- (β) Τι σημαίνουν για την περίμετρο του ορθογώνιου οι τιμές που βρήκατε στο (α);

47. Εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου με μήκος υποτείνουσας 5 cm;

48. Εμβαδόν γηπέδου Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα γήπεδο σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου με μήκος μεγάλης πλευράς x . Στις δύο μικρότερες πλευρές θα εφάπτονται δυο ημικυκλικές περιοχές ακτίνας r . Το γήπεδο θα περικλείεται από έναν διάδρομο στίβου μήκους 400 m.

- (α) Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογώνιου τμήματος συναρτήσει μόνο του x ή μόνο του r (όποιο από τα δύο θέλετε).

- (β) Για ποιες τιμές των x και r αποκτά μέγιστο εμβαδόν το ορθογώνιο τμήμα του γηπέδου;

49. Μέγιστο ύψος κατακόρυφα κινούμενου σώματος Το ύψος ενός σώματος που κινείται κατακόρυφα δίδεται από τη σχέση

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \quad g > 0,$$

όπου s σε m και t σε sec. Βρείτε το μέγιστο ύψος του σώματος.

50. Μέγιστη τιμή εναλλασσόμενου ρεύματος Έστω ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t (σε sec) το ρεύμα i (σε Ampère) εναλλασσόμενου κυκλώματος δίδεται από τη σχέση $i = 2 \cos t + 2 \sin t$. Ποια η μέγιστη τιμή του ρεύματος (κατά μέτρο) για το κύκλωμα αυτό;

Θεωρία και παραδείγματα

51. Ένα ελάχιστο άνευ παραγώγου Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ παρόλο που η f δεν είναι διαφορίσιμη εκεί. Είναι συμβατό αυτό με το Θεώρημα 2; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

52. Άρτιες συναρτήσεις Αν μια άρτια συνάρτηση $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της f στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

53. Περιττές συναρτήσεις Αν μια περιττή συνάρτηση $g(x)$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της g στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

54. Μάθετε γράφοντας Γνωρίζουμε πώς να βρίσκουμε τα ακρότατα μιας συνεχούς συναρτήσεως $f(x)$ με διερεύνηση των τιμών της στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του πεδίου ορισμού. Τι συμβαίνει όμως όταν δεν υπάρχουν κρίσιμα και ακραία σημεία; Είναι δυνατόν να υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

55. Πολυώνυμα τρίτου βαθμού Θεωρήστε την πολωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

- (α) Δείξτε ότι η f μπορεί να έχει 0, 1, ή 2 κρίσιμα σημεία. Επικυρώστε την απάντησή σας με παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις.

- (β) Πόσα τοπικά ακρότατα μπορεί να εμφανίζει η f ;

56. Συναρτήσεις άνευ ακροτάτων στα άκρα

- (α) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί η τιμή $f(0) = 0$ δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο της f .

- (β) Κατασκευάστε μια δική σας συνάρτηση που δεν εμφανίζει ακρότατο σε άκρο του πεδίου ορισμού της.

57. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις που δίδονται στις Ασκήσεις 57-60. Κατόπιν βρείτε πού εμφανίζονται τα ακρότατα και ποια είναι αυτά.

57. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \leq x \leq 5$

58. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \leq x \leq 7$

59. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

60. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 61-70, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για την εύρεση των ολικών ακροτάτων κάθε συναρτήσεως στο αναγραφόμενο κλειστό διάστημα. Συγκεκριμένα εκτελέστε τα παρακάτω.

- (α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση στο συγκεκριμένο διάστημα για να δείτε τη γενική συμπεριφορά της.

- (β) Βρείτε τα εσωτερικά σημεία όπου $f' = 0$. (Ίσως χρειαστεί να επιλύσετε αριθμητικά την εξίσωση και να βρείτε προσεγγιστικά μια λύση.) Μπορείτε επίσης να σχεδιάσετε την f' .

- (γ) Βρείτε τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος όπου η f' δεν υπάρχει.

- (δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση για κάθε σημείο που βρήκατε στα (β) και (γ) καθώς και στα άκρα του διαστήματος.

- (ε) Βρείτε πού προκύπτουν και ποια είναι τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

62. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

63. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

64. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

65. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

66. $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

67. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad 0.5 \leq x \leq 24$

68. $g(x) = e^{-x}, \quad -1 \leq x \leq 1$

69. $h(x) = \ln(x + 1), \quad 0 \leq x \leq 3$

70. $k(x) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

3.2

Θεώρημα μέσης τιμής και διαφορικές εξισώσεις

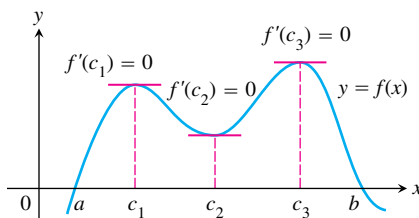
Το θεώρημα του Rolle • Το θεώρημα μέσης τιμής • Φυσική ερμηνεία • Μαθηματικές συνέπειες • Εύρεση ταχύτητας και θέσεως από την επιτάχυνση • Διαφορικές εξισώσεις και ύψος βλήματος

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Michel Rolle
(1652-1719)



ΣΧΗΜΑ 3.11 Το θεώρημα του Rolle λέει ότι μια διαφορίσιμη καμπύλη έχει τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη μεταξύ δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x . Η καμπύλη που φαίνεται εδώ έχει τρεις.

Έχουμε δει πώς υπολογίζεται συναρτήσεως του χρόνου η θέση σωματιδίου που αφήνεται από την ηρεμία να πέσει ελεύθερα. Μάθαμε επίσης πώς να εξάγουμε τις συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης από τη συνάρτηση θέσεως. Υποθέστε, όμως, ότι αρχικά γνωρίζουμε μόνο την επιτάχυνση του σώματος (επιτάχυνση της βαρύτητας, στην περίπτωσή μας) και τίποτα άλλο. Θα μπορούσαμε τότε να κινηθούμε αντίστροφα και να βρούμε τις συναρτήσεις ταχύτητας και θέσεως;

Το μαθηματικό ερώτημα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι το εξής: Ποιες συναρτήσεις έχουν ως παράγωγο μια δοθείσα συνάρτηση; Ποιες συναρτήσεις ταχύτητας αντιστοιχούν σε δεδομένη συνάρτηση επιτάχυνσης; Ποιες συναρτήσεις θέσεως αντιστοιχούν σε δεδομένη συνάρτηση ταχύτητας; Στα ερωτήματα αυτά απαντούν τα πορίσματα του θεωρήματος μέσης τιμής.

Το θεώρημα μέσης τιμής συνδέει τον μέσο ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης σε σημείο εσωτερικό του διαστήματος.

Το θεώρημα του Rolle

Υπάρχουν ισχυρές γεωμετρικές ενδείξεις ότι μεταξύ δύο σημείων στα οποία μια διαφορίσιμη καμπύλη τέμνει τον άξονα x θα υπάρχει σημείο της καμπύλης όπου η εφαπτομένη της γίνεται οριζόντια. Ένα θεώρημα ηλικίας 300 ετών του Michel Rolle αποδεικνύει ότι όντως έτσι έχουν τα πράγματα.

Θεώρημα 3 Θεώρημα του Rolle

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b) . Αν

$$f(a) = f(b) = 0,$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός c στο (a, b) όπου $f'(c) = 0$ (Σχήμα 3.11).

Απόδειξη Όντας συνεχής, η f εμφανίζει ολικά μέγιστα και ελάχιστα στο $[a, b]$. Αυτά μπορούν να εμφανίζονται μόνο

- σε εσωτερικά σημεία όπου μηδενίζεται η f'
- σε εσωτερικά σημεία όπου η f' δεν υπάρχει
- σε άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή στα a και b .

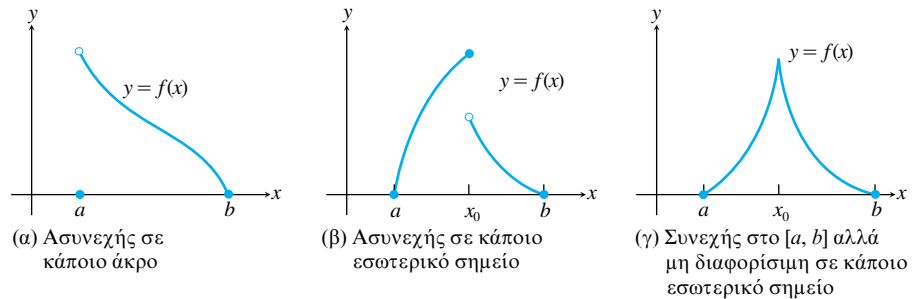
Εξ υποθέσεως, η f έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του $[a, b]$. Αυτό αποκλείει αμέσως την πρόταση 2, αφήνοντας ως ενδεχόμενα σημεία ακροτάτων τα εσωτερικά σημεία στα οποία $f' = 0$, και τα δύο άκρα a και b .

Αν είτε το μέγιστο είτε το ελάχιστο εμφανίζεται σε σημείο c εσωτερικό του διαστήματος, τότε $f'(c) = 0$ βάσει του Θεωρήματος 2 της Ενότητας 3.1, πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα του Rolle.

Αν και τα δύο ακρότατα εμφανίζονται στα a και b , τότε μηδενίζονται αμφότερα. Αυτό σημαίνει ότι η f έχει σταθερή τιμή 0, άρα $f' = 0$

σε όλο το (a, b) και το σημείο c μπορεί συνεπώς να κείται οπουδήποτε στο διάστημα αυτό. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

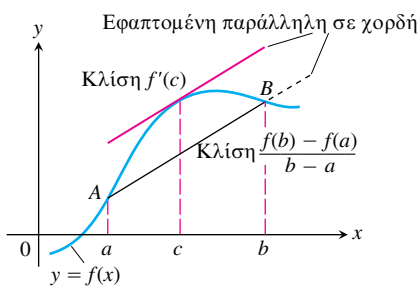
Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3 είναι ουσιώδεις. Αν δεν ικανοποιούνται έστω και σε ένα σημείο του διαστήματος, η συνάρτηση μπορεί να μην έχει οριζόντια εφαπτομένη (Σχήμα 3.12).



ΣΧΗΜΑ 3.12 Δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Το θεώρημα μέσης τιμής

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι παραπλήσιο του θεωρήματος του Rolle.



ΣΧΗΜΑ 3.13 Από γεωμετρικής πλευράς, το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι ανάμεσα στο A και στο B η καμπύλη έχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή AB .

Θεώρημα 4 Θεώρημα μέσης τιμής

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) . Θα υπάρχει τότε τουλάχιστον ένα σημείο c στο (a, b) όπου

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (1)$$

Απόδειξη Απεικονίζουμε την f ως καμπύλη στο επίπεδο και φέρνουμε την ευθεία που διέρχεται από τα $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ (δείτε το Σχήμα 3.13). Η ευθεία αυτή είναι η γραφική παράσταση της

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad (2)$$

(εξίσωση σημείου-κλίσεως). Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφημάτων των f και g στο x είναι

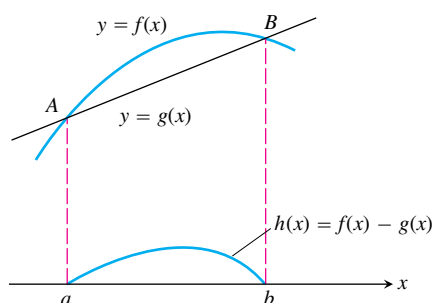
$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \end{aligned} \quad (3)$$

Τα γραφήματα των f , g , και h φαίνονται στο κοινό Σχήμα 3.14.

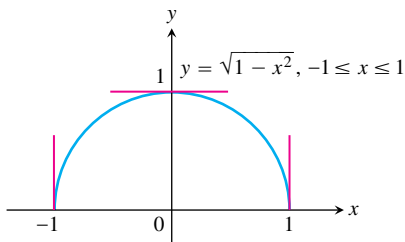
Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[a, b]$. Είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) διότι οι f και g είναι συνεχείς και διαφορίσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Επίσης, ισχύει $h(a) = h(b) = 0$, αφού τα γραφήματα των f και g διέρχονται αμφότερα από τα A και B . Συνεπώς, σε κάποιο σημείο c στο (a, b) θα είναι $h' = 0$: το σημείο αυτό είναι το ζητούμενο.

Επαληθεύουμε την Εξίσωση (1) παραγωγίζοντας ως προς x την Εξίσωση (3) και θέτοντας $x = c$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && \text{Παράγωγος της Εξ. (3) ...} \\ h'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && \dots \text{για } x = c \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 3.14 Η χορδή AB είναι γραφική παράσταση της συναρτήσεως $g(x)$. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ δίδει την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφημάτων των f και g στο x .



ΣΧΗΜΑ 3.15 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[-1, 1]$ χωρίς να είναι διαφορίσιμη στα -1 και 1 .

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{Αναδιατάσσοντας}$$

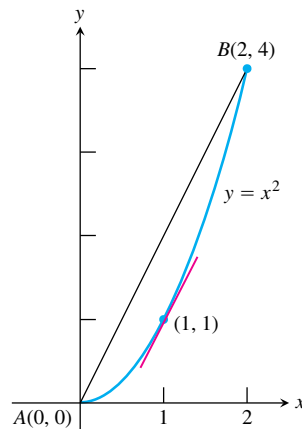
ό.έ.δ.

Στις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής δεν περιλαμβάνεται η απαίτηση να είναι η f διαφορίσιμη στο a ή στο b . Αρκεί η συνέχεια στα a και b (Σχήμα 3.15).

Συνήθως δεν γνωρίζουμε τίποτα άλλο για το c παρά αυτό που λέει το θεώρημα, δηλαδή ότι το c υπάρχει. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να ικανοποιήσουμε την περιέργειά μας για το ποιο είναι το c , όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί, αλλά αυτό αποτελεί συνήθως την εξαίρεση. Η σπουδαιότητα του θεωρήματος δεν έγκειται στην εύρεση του c .

Παράδειγμα 1 Διερεύνηση του θεωρήματος μέσης τιμής

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ (Σχήμα 3.16) είναι συνεχής για $0 \leq x \leq 2$ και διαφορίσιμη για $0 < x < 2$. Εφόσον $f(0) = 0$ και $f(2) = 4$, το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι σε κάποιο σημείο c του διαστήματος, η παράγωγος $f'(x) = 2x$ θα πρέπει να παίρνει την τιμή $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. Σε αυτή εδώ την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε το c λύνοντας την εξίσωση $2c = 2$, οπότε $c = 1$.



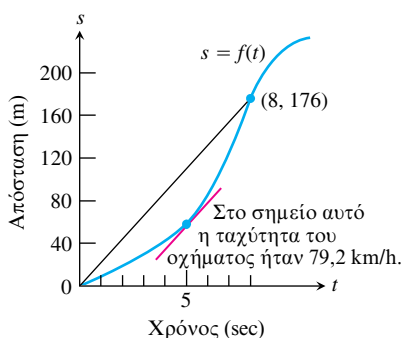
ΣΧΗΜΑ 3.16 Όπως βρήκαμε στο Παράδειγμα 1, στο σημείο $c = 1$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη της χορδής.

Μια φυσική ερμηνεία

Όπως γνωρίζουμε, η ποσότητα $(f(b) - f(a))/(b - a)$ είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f στο διάστημα $[a, b]$, ενώ η $f'(c)$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής. Το θεώρημα μέσης τιμής λέει ότι υπάρχει κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος όπου ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με τον μέσο ρυθμό μεταβολής στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα 2 Ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής

Αν ένα όχημα που επιταχύνεται από την ηρεμία χρειάζεται 8 sec για να διανύσει 176 m, η μέση ταχύτητά του για το διάστημα των 8 sec είναι $176/8 = 22$ m/sec. Σε κάποιο σημείο λοιπόν της κίνησης, το ταχύμετρο θα δείξει ακριβώς 79,2 km/h (22 m/sec) (Σχήμα 3.17).



ΣΧΗΜΑ 3.17 Γραφική παράσταση της απόστασης συναρτήσει του χρόνου για το όχημα του Παραδείγματος 2.

Μαθηματικές συνέπειες

Το πρώτο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής μας πληροφορεί για το ποιες συναρτήσεις έχουν μηδενική παράγωγο.

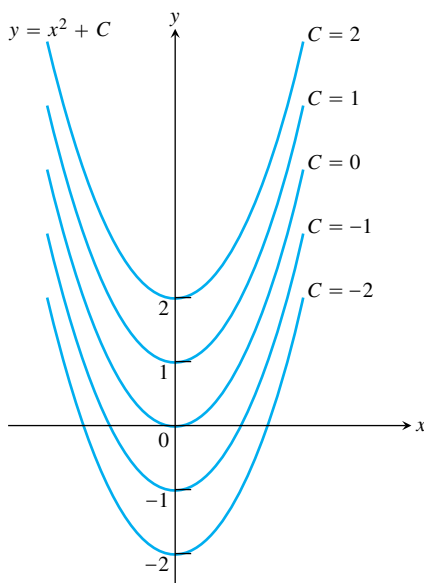
CD-ROM

ΔΙΚΤΥΟΤΟΠΟΣ

Βιογραφικά στοιχεία



Bernard le Bouyer
Fontenelle
(1657-1757)



ΣΧΗΜΑ 3.18 Η γεωμετρική σημασία του Πορίσματος 2 του θεωρήματος μέσης τιμής είναι ότι οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με την ίδια παράγωγο θα είναι κατακόρυφα μετατοπισμένες η μια ως προς την άλλη. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με παράγωγο $2x$ είναι οι παραβολές $y = x^2 + C$, μερικές από τις οποίες φαίνονται εδώ.

Πόρισμα 1 Οι συναρτήσεις μηδενικής παραγώγου είναι σταθερές συναρτήσεις

Αν $f'(x) = 0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος I , τότε $f(x) = C$ για κάθε x στο I , όπου C είναι μια σταθερά.

Γνωρίζουμε ήδη ότι αν μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα I , τότε θα είναι και διαφορίσιμη στο I και θα ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο I . Το Πόρισμα 1 δείχνει το αντίστροφο της πρότασης αυτής.

Απόδειξη Πορίσματος 1 Θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο I . Αρκεί να δείξουμε ότι αν x_1 και x_2 είναι δυο τυχόντα σημεία στο I , τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

Έστω x_1 και x_2 δυο σημεία στο I , τέτοια ώστε $x_1 < x_2$. Στην περίπτωση αυτή, η f θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, δεδομένου ότι είναι διαφορίσιμη, και άρα συνεχής, σε όλο το $[x_1, x_2]$. Κατά συνέπεια, θα υπάρχει σημείο c μεταξύ των x_1 και x_2 όπου θα ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Εφόσον $f' = 0$ σε όλο το I , η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad \text{και} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Στην αρχή της ενότητας, αναρωτηθήκαμε αν είναι δυνατόν, ξεκινώντας από την επιτάχυνση ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα και εργαζόμενοι αντίστροφα απ' ό,τι ως τώρα, να εξαγάγουμε τις συναρτήσεις της ταχύτητας και της θέσης του σώματος. Η απάντηση είναι καταφατική, βάσει του ακόλουθου πορίσματος.

Πόρισμα 2 Συναρτήσεις που έχουν την ίδια παράγωγο σε ένα διάστημα διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερά στο διάστημα αυτό

Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε σημείο ενός διαστήματος I , θα υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + C$ για κάθε x στο I .

Απόδειξη Για κάθε x στο I , η παράγωγος της συναρτήσεως διαφοράς $h = f - g$ είναι

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Συνεπώς, $h(x) = C$ στο I (Πόρισμα 1). Δηλαδή, $f(x) - g(x) = C$ στο I , και άρα $f(x) = g(x) + C$.

Το Πόρισμα 2 λέει ότι δυο συναρτήσεις θα έχουν κοινή παράγωγο σε ένα διάστημα μόνο αν οι τιμές τους διαφέρουν κατά μια σταθερά στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $(-\infty, \infty)$ είναι $2x$. Κάθε άλλη συνάρτηση με παράγωγο $2x$ στο $(-\infty, \infty)$ θα ισούται με $x^2 + C$ για κάποια τιμή του C (Σχήμα 3.18).

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του Πορίσματος 2

Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ που έχει παράγωγο $\sin x$ και της οποίας το γράφημα διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$.

Λύση Εφόσον η f έχει την ίδια παράγωγο με την $g(x) = -\cos x$, θα είναι $f(x) = -\cos x + C$ για κάποια σταθερά C . Η τιμή της C προσδιορίζεται από τη συνθήκη $f(0) = 2$ (αφού το γράφημα της f διέρχεται από το $(0, 2)$):

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \quad \text{άρα} \quad C = 3.$$

Ο ζητούμενος τύπος συναρτήσεως θα είναι λοιπόν $f(x) = -\cos x + 3$.

Εύρεση ταχύτητας και θέσεως από την επιτάχυνση

Μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα $v(t)$ και τη θέση $s(t)$ σώματος που αφήνεται να πέσει ελεύθερα με επιτάχυνση $9,8 \text{ m/sec}^2$ ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $v(t)$ ισούται με $9,8$. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $g(t) = 9,8t$ είναι $9,8$. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$v(t) = 9,8t + C$$

για κάποια σταθερά C . Εφόσον το σώμα αφήνεται να πέσει από την ηρεμία, $v(0) = 0$. Έτσι προδιορίζεται η σταθερά C :

$$9,8(0) + C = 0, \quad \text{άρα} \quad C = 0.$$

Η συνάρτηση ταχύτητας είναι λοιπόν $v(t) = 9,8t$. Ποια είναι η συνάρτηση θέσεως $s(t)$;

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $s(t)$ ισούται με $9,8t$. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $h(t) = 4,9t^2$ είναι $9,8t$. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$s(t) = 4,9t^2 + C$$

για κάποια σταθερά C . Εφόσον $s(0) = 0$,

$$4,9(0)^2 + C = 0 \quad \text{και} \quad C = 0.$$

Η συνάρτηση θέσεως θα είναι λοιπόν $s(t) = 4,9t^2$.

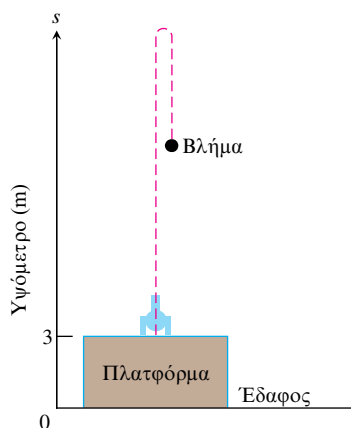
Διαφορικές εξισώσεις και ύψος Βλήματος

Διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση που συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με μία ή περισσότερες από τις παραγώγους της. Μια συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι ικανοποιούν μια διαφορική εξίσωση καλείται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 4 Λύσεις διαφορικών εξισώσεων

(α) Η συνάρτηση $s(t) = 4,9t^2$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $d^2s/dt^2 = 9,8 \text{ m/sec}^2$.

(β) Η συνάρτηση $y = -\cos x + 3$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $dy/dx = \sin x$.



ΣΧΗΜΑ 3.19 Σκαρίφημα της κίνησης του βλήματος στο Παράδειγμα 5.

Παράδειγμα 5 Εύρεση ύψους βλήματος από την επιτάχυνση, την αρχική ταχύτητα και την αρχική θέση του

Βαρύ βλήμα βάλλεται κατακόρυφα από πλατφόρμα ύψους 3 m , με αρχική ταχύτητα 160 m/sec . Υποθέστε ότι η μόνη δύναμη που δρα πάνω στο βλήμα κατά την κίνησή του είναι η βαρύτητα, η οποία δημιουργεί μια κατακόρυφη (και προς τα κάτω) επιτάχυνση μέτρου $9,8 \text{ m/sec}^2$. Να βρεθεί μια εξίσωση του ύψους του βλήματος από το έδαφος συναρτήσει του χρόνου t , αν η χρονική στιγμή της εκτόξευσης είναι $t = 0$. Σε πόσο ύψος από το έδαφος βρίσκεται το βλήμα 3 sec μετά τη βολή;

Λύση Σχεδιάζουμε πρώτα ένα σκαρίφημα (Σχήμα 3.19) όπου συμβολίζουμε με s το ύψος (από το έδαφος) του βλήματος τη χρονική στιγμή t . Θεωρούμε ότι το s είναι μια διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση του t και παριστάνουμε κατά τα γνωστά την ταχύτητα και την επιτάχυνση του βλήματος ως

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{και} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Εφόσον η βαρύτητα δρα κατά την κατεύθυνση στην οποία το s μειώνεται στο μοντέλο μας, το πρόβλημα ανάγεται τώρα στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$d^2s / dt^2 = -9,8,$$

δεδομένου ότι

$$v(0) = 160 \quad \text{και} \quad s(0) = 3.$$

Εφόσον η παράγωγος της συναρτήσεως $g(t) = -9,8t$ ισούται με $-9,8$, από το Πόρισμα 2 παίρνουμε

$$v(t) = -9,8t + C$$

για κάποια σταθερά C . Μπορούμε να βρούμε τη C από την αρχική συνθήκη $v(0) = 160$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 160 \\ -9,8(0) + C &= 160 \\ C &= 160. \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στην τελική έκφραση της ταχύτητας ds/dt :

$$ds / dt = -9,8t + 160.$$

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $s(t)$ ισούται με $-9,8t + 160$. Όμως και η παράγωγος της συναρτήσεως $h(t) = -4,9t^2 + 160t$ είναι $-9,8t + 160$. Από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$s = -4,9t^2 + 160t + C.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη δεύτερη αρχική συνθήκη για να βρούμε τη νέα σταθερά C :

$$\begin{aligned} s(0) &= 3 \\ -4,9(0)^2 + 160(0) + C &= 3 \\ C &= 3. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε την τελική έκφραση του s συναρτήσεως του t :

$$s = -4,9t^2 + 160t + 3.$$

Για να βρούμε το ύψος του βλήματος 3 sec μετά τη βολή, θέτουμε $t = 3$ στον τύπο του s . Βρίσκουμε

$$s = -4,9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438,9 \text{ m}.$$

Στα Κεφάλαια 4 και 6 θα μελετήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις εκτενέστερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

Έλεγχος προϋποθέσεων

Ποιες από τις συναρτήσεις στις Ασκήσεις 1-4 πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο δοσμένο διάστημα και ποιες όχι; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $f(x) = x^{2/3}$, $[-1, 8]$
2. $g(x) = x^{4/5}$, $[0, 1]$
3. $s(t) = \sqrt{t(1-t)}$, $[0, 1]$

$$4. f(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta}, & -\pi \leq \theta < 0 \\ 0, & \theta = 0 \end{cases}$$

5. **Μάθετε γράφοντας** Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$. Επίσης είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$, όπου η παράγωγός της δεν μηδενίζεται ποτέ. Πώς γίνεται αυτό; Δεν λέει το θεώρημα του Rolle ότι η παράγωγος πρέπει να είναι μηδέν σε κάποιο σημείο του $(0, 1)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Για ποιες τιμές των a , m , και b πληροί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$;

Διαφορικές εξισώσεις

7. **Μάθετε γράφοντας** Έστω ότι $f(-1) = 3$ και $f'(x) = 0$ για κάθε x . Αληθεύει ότι $f(x) = 3$ για κάθε x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
8. **Μάθετε γράφοντας** Έστω ότι $g(0) = 5$ και $g'(t) = 2$ για κάθε t . Αληθεύει ότι $g(t) = 2t + 5$ για κάθε t ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Στις Ασκήσεις 9-12, να βρεθούν όλες οι δυνατές συναρτήσεις που έχουν ως παράγωγο τη δεδομένη σε κάθε περίπτωση συνάρτηση.

9. (α) $y' = x$
(β) $y' = x^2$
(γ) $y' = x^3$
10. (α) $y' = 2x$
(β) $y' = 2x - 1$
(γ) $y' = 3x^2 + 2x - 1$
11. (α) $r' = -\frac{1}{\theta^2}$
(β) $r' = 1 - \frac{1}{\theta^2}$
(γ) $r' = 5 + \frac{1}{\theta^2}$
12. (α) $y' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$(β) y' = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$(γ) y' = 4t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Στις Ασκήσεις 13-16, για κάθε μία από τις παραγώγους που δίδονται, να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο P .

$$13. f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$$

$$14. g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$$

$$15. r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta, \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$16. r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$$

Εύρεση θέσεως από την ταχύτητα

Στις Ασκήσεις 17-20 δίδεται η ταχύτητα $v = ds/dt$ και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή t .

$$17. v = 9,8t + 5, \quad s(0) = 10$$

$$18. v = 32t - 2, \quad s(0,5) = 4$$

$$19. v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$$

$$20. v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$$

Εύρεση θέσεως από την επιτάχυνση

Στις Ασκήσεις 21-24 δίδεται η επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2$, η αρχική ταχύτητα, και η αρχική θέση σώματος που κινείται ευθύγραμμα. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη στιγμή t .

$$21. a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$$

$$22. a = 9,8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$$

$$23. a = -4 \sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$$

$$24. a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$$

Επιτάχυνση Βαρύτητας

25. **Ελεύθερη πτώση στη Σελήνη** Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης είναι $1,6 \text{ m/sec}^2$. Αφήνουμε έναν βράχο να πέσει σε μια χαράδρα. Με ποια ταχύτητα θα προσκρούσει στο σεληνιακό έδαφος μετά από ελεύθερη πτώση διάρκειας 30 sec;
26. **Ταχύτητα πυραύλου** Ένας πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με σταθερή επιτάχυνση 20 m/sec^2 . Ποια θα είναι η ταχύτητά του μετά από 1 min;
27. **Κατάδυση από βατήρα** Με πόση περίπου ταχύτητα θα βουτήξετε στο νερό αν πηδήσετε από βατήρα καταδύσεων ύψους 10 m; ($g = 9,8 \text{ m/sec}^2$.)
28. **Ύψος βλήματος στον Άρη** Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη είναι $3,72 \text{ m/sec}^2$. Αν ένας βράχος εκτοξευτεί κατακόρυφα από την επιφάνεια του πλανήτη με αρχική ταχύτητα 93 m/sec , σε πόσο ύψος θα φτάσει; (Υπόδειξη: Πότε μηδενίζεται η ταχύτητα;)

Ευθύγραμμη κίνηση

29. **Κίνηση κατά μήκος του άξονα συντεταγμένων** Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, υπό την προϋπόθεση ότι $ds/dt = 4$ και $s = 0$ για $t = 1$. Να βρεθούν

- (α) η ταχύτητα $v = ds/dt$ συναρτήσει του χρόνου t
(β) η θέση s συναρτήσει του t .

30. **Εύρεση θέσης από την ταχύτητα** (α) Έστω ότι η ταχύτητα σώματος κινούμενου επί του άξονα s είναι

$$\frac{ds}{dt} = v = 9,8t - 3.$$

- Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = 5$ όταν $t = 0$.
 - Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = -2$ όταν $t = 0$.
 - Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα από $t = 1$ έως $t = 3$ δεδομένου ότι $s = s_0$ όταν $t = 0$.
- (β) **Μάθετε γράφοντας** Θεωρούμε ότι η θέση s σώματος που κινείται στον άξονα s είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου t . Αληθεύει ότι, γνωρίζοντας την παράγωγο της θέσεως ds/dt , μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση του σώματος στο διάστημα από $t = a$ έως $t = b$, ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή θέση του σώματος τις στιγμές αυτές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Εφαρμογές

31. **Θερμοκρασιακή μεταβολή** Χρειάστηκαν 14 sec για ανέλθει η ένδειξη ενός θερμομέτρου υδραργύρου από -19°C σε 100°C όταν το βγάλαμε από την κατάψυξη και το βυθίσαμε σε νερό που έβραζε. Δείξτε ότι κάποια στιγμή η στήλη του υδραργύρου ανέβαινε με ρυθμό $8,5^\circ\text{C}/\text{sec}$.
32. **Υπέρβαση ορίου ταχύτητας** Σε οδηγό νταλίκας επιδίδεται κλήση υπέρβασης του ορίου ταχύτητας, με το αιτιολογικό ότι σε 2 h διένυσε 250 km ενώ το όριο ταχύτητας ήταν 100 km/h. Γιατί;
33. **Τριήρεις** Από αρχαίους συγγραφείς μαθαίνουμε ότι μια τριήρης (αρχαίο ελληνικό και ρωμαϊκό πλοίο με 170 κωπηλάτες) διήνυσε κάποτε 184 ναυτικά μίλια σε 24 h. Εξηγήστε γιατί σε κάποια στιγμή της διαδρομής η τριήρης αυτή θα πρέπει να έπλεε με ταχύτητα μεγαλύτερη των 7,5 κόμβων (ναυτικών μιλίων την ώρα).
34. **Μαραθώνιος** Ένας μαραθωνοδρόμος διένυσε τα 42,2 km του μαραθωνίου της Νέας Υόρκης σε 2,2 h. Δείξτε ότι σε δυο τουλάχιστον σημεία της διαδρομής ο δρομέας θα πρέπει να έτρεχε με ταχύτητα 19 km/h.

Θεωρία και παραδείγματα

35. **Γεωμετρικός μέσος των a και b** Ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών a και b ισούται με $\sqrt{ab}$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = 1/x$ στο θετικό διάστημα $[a, b]$ για να δείξετε ότι το c (που εμφανίζεται στο θεώρημα) ισούται με $c = \sqrt{ab}$.

36. **Αριθμητικός μέσος των a και b** Ο αριθμητικός μέσος δύο αριθμών a και b ισούται με $(a + b)/2$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ σε τυχόν διάστημα $[a, b]$ για να δείξετε ότι το c (που εμφανίζεται στο θεώρημα) ισούται με $c = (a + b)/2$.

37. **Μάθετε γράφοντας: Ένα αναπάντεχο γράφημα** Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x \sin(x + 2) - \sin^2(x + 1).$$

Τι είδους συμπεριφορά παρουσιάζει η γραφική παράσταση και γιατί; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

38. **Θεώρημα του Rolle**

- Κατασκευάστε ένα πολυώνυμο $f(x)$ που να έχει τις ρίζες $x = -2, -1, 0, 1$, και 2 .
- Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τη συνάρτηση f και την παράγωγό της f' . Ποια σχέση έχουν αυτές οι γραφικές παραστάσεις με το θεώρημα του Rolle;
- Αναδεικνύουν το ίδιο φαινόμενο οι γραφικές παραστάσεις της $g(x) = \sin x$ και της παραγώγου της g' ;

39. **Μοναδικότητα λύσεως** Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) . Έστω ακόμη ότι οι $f(a)$ και $f(b)$ έχουν αντίθετο πρόσημο και ότι $f' \neq 0$ μεταξύ των a και b . Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο μεταξύ των a and b όπου $f(x) = 0$.

40. **Παράλληλες εφαπτομένες** Έστω ότι οι f και g είναι διαφορίσιμες στο $[a, b]$ και $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο μεταξύ των a and b όπου οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Κάντε ένα σχήμα για να εξηγήσετε την άποψή σας.

41. **Μάθετε γράφοντας: ταυτόσημα γραφήματα** Αν οι γραφικές παραστάσεις των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο στο επίπεδο και οι δύο συναρτήσεις έχουν παντού τον ίδιο ρυθμό μεταβολής, θα ταυτίζονται τα γραφήματά τους; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. **Ανω φράγματα** Δείξτε ότι για τυχόντες αριθμούς a και b , η ανισότητα $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ αληθεύει.

43. **Πρόσημο της f'** Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $a \leq x \leq b$ και ότι $f(b) < f(a)$. Δείξτε ότι η f' είναι αρνητική σε κάποιο σημείο μεταξύ των a και b .

44. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Ποιες προϋποθέσεις πρέπει να πληροί η f ούτως ώστε να είναι

$$\min f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f',$$

όπου $\min f'$ και $\max f'$ είναι αντιστοίχως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f' στο $[a, b]$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

45. Χρησιμοποιήστε τις ανισότητες της Ασκήσεως 44 για να εκτιμήσετε την $f(0,1)$ αν $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ για $0 \leq x \leq 0,1$ και $f(0) = 1$.

46. Χρησιμοποιήστε τις ανισότητες της Ασκήσεως 44 για να εκτιμήσετε την $f(0,1)$ αν $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ για $0 \leq x \leq 0,1$ και $f(0) = 2$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σχεδίαση λύσεων διαφορικών εξισώσεων

Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να διερευνήσετε γραφικά τη λύση κάθε διαφορικής εξίσωσης στις Ασκήσεις 47-50. Συμπεριλάβετε στη διερεύνησή σας τα ακόλουθα βήματα.

- (α) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης συναρτήσει της αυθαίρετης σταθεράς C .
- (β) Σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα τις λύσεις για τις περιπτώσεις $C = -2, -1, 0, 1, 2$.

(γ) Εντοπίστε και σχεδιάστε στο υποδεικνυόμενο διάστημα $[a, b]$ τη λύση που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$.

47. $y' = x\sqrt{1-x}$, $[0, 1]$, $P(1/2, 1)$

48. $y' = \frac{1}{x}$, $[1, 4]$, $P(2, -1)$

49. $y' = x \sin x$, $[-4, 4]$, $P(\pi, -1)$

50. $y' = \frac{1}{1 + \sin x}$, $[-\pi/4, \pi/2]$, $P(0, 1)$

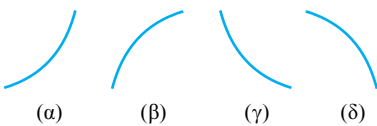
3.3

Το σχήμα της γραφικής παράστασης

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

- Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα
- Κοιλότητα
- Σημεία καμπής
- Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα
- Τι μπορούμε να μάθουμε για μια συνάρτηση από την παράγωγό της

Για να προσδιορίσουμε το σχήμα μιας γραφικής παράστασης, θα πρέπει να γνωρίζουμε πόσο απότομα ανέρχεται ή κατέρχεται και πώς κάμπτεται η καμπύλη. Τα χαρακτηριστικά αυτά γνωρίσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.20. Στην ενότητα αυτή θα δούμε με ποιον τρόπο οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι μιας συνάρτησεως περιέχουν την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε το σχήμα της γραφικής της παράστασης. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας ορίζοντας αυστηρά την έννοια της αύξουσας και της φθίνουσας συνάρτησεως σε ένα διάστημα.



ΣΧΗΜΑ 3.20 Στο (α) η γραφική παράσταση ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (β) ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω. Στο (γ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (δ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Τι είδους χαρακτηριστικά παρουσιάζουν οι συναρτήσεις με θετική ή αρνητική παράγωγο; Η απάντηση δίδεται από το τρίτο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής και είναι η εξής: Οι συναρτήσεις θετικής παραγώγου είναι αύξουσες· ενώ οι συναρτήσεις αρνητικής παραγώγου είναι φθίνουσες.

Ορισμοί Αύξουσα συνάρτηση, φθίνουσα συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα I . Τότε

1. η f είναι **αύξουσα** στο I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2. η f είναι **φθίνουσα** στο I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Πόρισμα 3 Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) .

Αν $f' > 0$ σε όλο το (a, b) , τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

Αν $f' < 0$ σε όλο το (a, b) , τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

Απόδειξη Έστω x_1 και x_2 δυο σημεία του διαστήματος $[a, b]$ με $x_1 < x_2$. Το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο $[x_1, x_2]$ μας λέει ότι

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

για κάποιο c μεταξύ των x_1 και x_2 . Το πρόσημο του δεξιού μέλους καθορίζεται από το πρόσημο της $f'(c)$ αφού το $x_2 - x_1$ είναι θετικό. Συνεπώς θα είναι $f(x_2) > f(x_1)$ αν η παράγωγος f' είναι θετική στο (a, b) και $f(x_2) < f(x_1)$ αν η f' είναι αρνητική στο (a, b) .

Ιδού πώς εφαρμόζουμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για να βρούμε τα διαστήματα όπου μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Τα κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως f διαμερίζουν τον άξονα x σε διαστήματα όπου η f' είναι είτε θετική είτε αρνητική. Προσδιορίζουμε το πρόσημο της f' στο εκάστοτε διάστημα υπολογίζοντας την f' για τυχόν x στο διάστημα αυτό. Κατόπιν εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.

Παράδειγμα 1 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και εντοπίστε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Λύση Το Σχήμα 3.21 υποδεικνύει ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία. Εφόσον η f είναι συνεχής και διαφορίσιμη για κάθε πραγματικό x , τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν μονάχα στα σημεία μηδενισμού της f' .

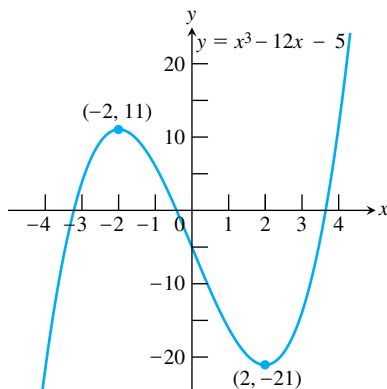
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Τα σημεία μηδενισμού της f' είναι $x = -2$ και $x = 2$. Έτσι ο άξονας x διαμερίζεται σε διαστήματα ως ακολούθως.

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Πρόσημο της f'	+	-	+
Συμπεριφορά της f	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, «πολλαπλασιάσαμε» μεταξύ τους τα πρόσημα των παραγόντων της f' . Κατόπιν εφαρμόσαμε το Πόρισμα 3, συμπεραίνοντας ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, -2)$, φθίνουσα στο $(-2, 2)$, και αύξουσα πάλι στο $(2, \infty)$.

Γνωρίζοντας σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα ή φθίνουσα μια συνάρτηση, μπορούμε να διερευνήσουμε τη φύση των τοπικών της ακροτάτων.



ΣΧΗΜΑ 3.21 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 12x - 5$. (Παράδειγμα 1)

CD-ROM

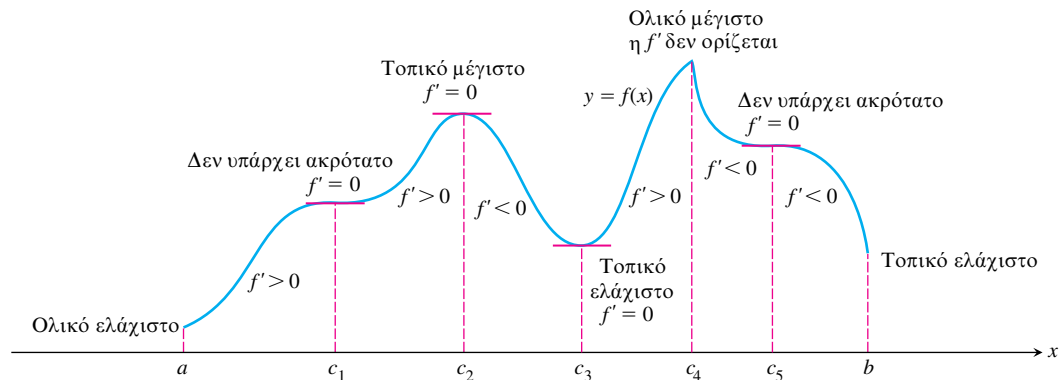
Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Edmund Halley
(1656 -1742)

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Στο Σχήμα 3.22, παρατηρούμε ότι στα σημεία ελαχίστων της f , είναι $f' < 0$ αμέσως πριν και $f' > 0$ αμέσως μετά το εκάστοτε σημείο ελαχίστου. (Αν πρόκειται για άκρο του διαστήματος, η πρόταση αυτή ισχύει προφανώς για τη μία μόνο πλευρά του σημείου.) Έτσι, η καμπύλη κατέρχεται (φθίνουσα) στα αριστερά του σημείου ελαχίστου και ανέρχεται (αύξουσα) στα δεξιά. Ομοίως, στα σημεία μεγίστων της f , $f' > 0$ αμέσως πριν και $f' < 0$ αμέσως μετά. Έτσι, η καμπύλη ανέρχεται (αύξουσα) στα αριστερά του σημείου μεγίστου και κατέρχεται (φθίνουσα) στα δεξιά.



ΣΧΗΜΑ 3.22 Η πρώτη παράγωγος μιας συναρτήσεως μας πληροφορεί αν, και πόσο απότομα, ανέρχεται ή κατέρχεται η γραφική της παράσταση.

Οι παρατηρήσεις αυτές μάς οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου κριτηρίου για την ύπαρξη και τη φύση των τοπικών ακροτάτων διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Σε ένα κρίσιμο σημείο $x = c$,

1. η f εμφανίζει *τοπικό ελάχιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από αρνητική σε θετική
2. η f εμφανίζει *τοπικό μέγιστο* αν η f' μεταβάλλεται στο c από θετική σε αρνητική
3. η f δεν εμφανίζει *τοπικό ακρότατο* αν η f' έχει το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του c .

Το κριτήριο για την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου σε άκρο του πεδίου ορισμού είναι παρόμοιο, με τη διαφορά ότι εκεί υπάρχει μόνο μία πλευρά προς εξέταση.

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

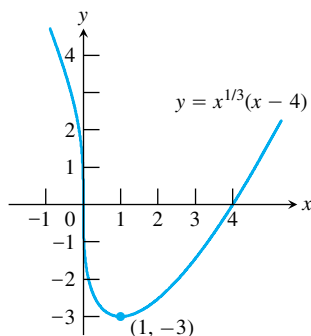
Εντοπίστε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συναρτήσεως.

Λύση Η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε x (Σχήμα 3.23). Η πρώτη παράγωγος

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

μηδενίζεται στο $x = 1$ και δεν ορίζεται στο $x = 0$. Δεν υπάρχουν άκρα του πεδίου ορισμού, συνεπώς τα κρίσιμα σημεία $x = 0$ και $x = 1$ είναι οι μόνοι υποψήφιοι για ύπαρξη ακροτάτων.

Τα κρίσιμα σημεία διαμερίζουν τον άξονα x σε διαστήματα θετικών και αρνητικών τιμών της f' . Το «τοπίο» των προσήμων της f' μας πληροφορεί για τη συμπεριφορά της f μεταξύ των κρίσιμων σημείων, αλλά και στα ίδια τα σημεία αυτά. Τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να τις παραστήσουμε ως εξής:



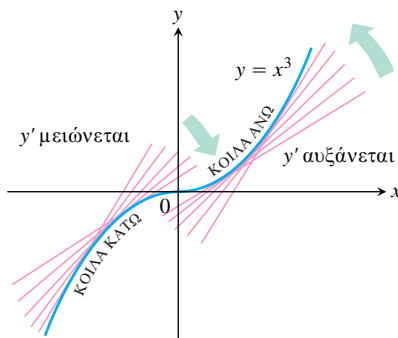
ΣΧΗΜΑ 3.23 Η γραφική παράσταση της $y = x^{1/3}(x - 4)$. (Παράδειγμα 2)

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Πρόσημο της f'	–	–	+
Συμπεριφορά της f	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα

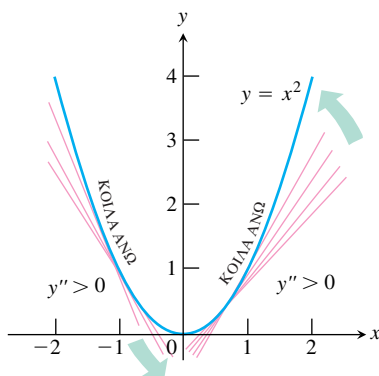
Σύμφωνα με το Πόρισμα 3 του θεωρήματος μέσης τιμής, η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -0)$, φθίνουσα στο $(0, 1)$, και αύξουσα στο $(1, \infty)$. Σύμφωνα με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα, η f δεν εμφανίζει ακρότατο στο $x = 0$ (αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκεί), αλλά εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ (όπου η f' από αρνητική γίνεται θετική).

Το τοπικό ελάχιστο είναι $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$. Πρόκειται και για ολικό ελάχιστο, αφού παντού στα αριστερά του σημείου αυτού η τιμή της συναρτήσεως μειώνεται, ενώ παντού στα δεξιά αυξάνεται. Το Σχήμα 3.23 δείχνει τι συμβαίνει.

Πώς μπορούμε να ξέρουμε πώς κάμπτεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως $y = f(x)$; Η πληροφορία που ζητούμε περιέχεται στην y' , αλλά πώς τη βρίσκουμε; Η απάντηση είναι να παραγωγίσουμε την y' (για συναρτήσεις που είναι διπλά διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους με εξαίρεση, ενδεχομένως, κάποια μεμονωμένα σημεία του). Η συνδυασμένη γνώση των y' και y'' μας αποκαλύπτει το σχήμα του γραφήματος της συνάρτησης. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς να σχεδιάζουμε πρόχειρα (αλλά ποιοτικώς σωστά) τις λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων.



ΣΧΗΜΑ 3.24 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0)$ ενώ στο $(0, \infty)$ στρέφει τα κοίλα άνω.



ΣΧΗΜΑ 3.25 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ στρέφει παντού τα κοίλα άνω.

Κοιλότητα

Καθώς βλέπετε στο Σχήμα 3.24, η συνάρτηση $y = x^3$ ανέρχεται καθώς το x αυξάνει, αλλά τα τμήματα της καμπύλης που ορίζονται στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, \infty)$ έχουν *καμφθεί* αντίθετα. Αν εξετάσουμε τις εφαπτομένες από αριστερά προς τα δεξιά, θα δούμε ότι η κλίση y' της καμπύλης μειώνεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και κατόπιν αυξάνεται στο $(0, \infty)$. Η καμπύλη $y = x^3$ *στρέφει τα κοίλα κάτω* στο $(-\infty, 0)$, ενώ στο $(0, \infty)$ *στρέφει τα κοίλα άνω*. Η καμπύλη κείται κάτω από τις εφαπτομένες της όταν στρέφει τα κοίλα κάτω, ενώ το αντίθετο συμβαίνει όταν στρέφει τα κοίλα άνω.

Ορισμός Κοιλότητα

Η γραφική παράσταση της διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ στρέφει

(α) **τα κοίλα άνω** σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η y' είναι αύξουσα στο I

(β) **τα κοίλα κάτω** σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η y' είναι φθίνουσα στο I .

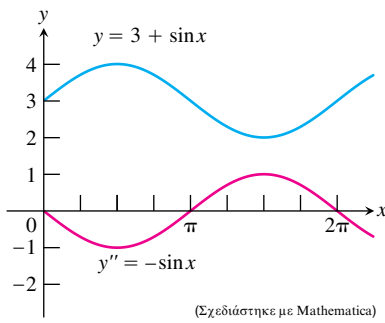
Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο, τότε η y' είναι αύξουσα για $y'' > 0$ και φθίνουσα για $y'' < 0$.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για κοιλότητα

Η γραφική παράσταση μιας διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ στρέφει

(α) **τα κοίλα άνω** σε κάθε διάστημα όπου $y'' > 0$

(β) **τα κοίλα κάτω** σε κάθε διάστημα όπου $y'' < 0$.



ΣΧΗΜΑ 3.26 Χρήση της γραφικής παράστασης της y'' για να προσδιοριστεί η κοιλότητα της y . (Παράδειγμα 4)

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή του κριτηρίου κοιλότητας

Η καμπύλη $y = x^2$ (Σχήμα 3.25) στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, \infty)$ εφόσον η δεύτερή της παράγωγος $y'' = 2$ είναι πάντα θετική.

Παράδειγμα 4 Προσδιορισμός των κοίλων

Προσδιορίστε την κοιλότητα της $y = 3 + \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση Η γραφική παράσταση της $y = 3 + \sin x$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, \pi)$, όπου η $y'' = -\sin x$ είναι αρνητική. Στο $(\pi, 2\pi)$, όπου η $y'' = -\sin x$ γίνεται θετική, στρέφει τα κοίλα άνω (Σχήμα 3.26).

Σημεία καμπής

Η καμπύλη $y = 3 + \sin x$ του Παραδείγματος 4 αλλάζει κοιλότητα στο σημείο $(\pi, 3)$. Καλούμε το $(\pi, 3)$ *σημείο καμπής* της καμπύλης.

Ορισμός Σημείο καμπής

Ένα σημείο της γραφικής παραστάσεως όπου υπάρχει εφαπτομένη και όπου αλλάζει η κοιλότητα της συναρτήσεως καλείται **σημείο καμπής**.

Ένα σημείο μιας καμπύλης εκατέρωθεν του οποίου η y'' αλλάζει πρόσημο, είναι σημείο καμπής. Στο ίδιο το σημείο αυτό, η y'' είτε μηδενίζεται (λόγω της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής της παραγώγου) είτε δεν ορίζεται. Αν η y είναι διπλά διαφορίσιμη, τότε $y'' = 0$ στο σημείο καμπής και η y' εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Πολλές φορές, στη μελέτη της ευθύγραμμης κίνησης, θέλουμε να ξέρουμε πότε είναι θετική και πότε αρνητική η επιτάχυνση (η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσεως). Τα σημεία καμπής του γραφήματος της συνάρτησης θέσεως μας αποκαλύπτουν πού αλλάζει πρόσημο η επιτάχυνση.

Παράδειγμα 5 Μελέτη ευθύγραμμης κίνησης

Σωματίδιο που κινείται σε οριζόντια ευθεία έχει συνάρτηση θέσεως την

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \quad t \geq 0.$$

Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση, και να περιγραφεί η κίνηση του σωματιδίου.

Λύση Η ταχύτητα είναι

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

ενώ η επιτάχυνση είναι

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Όταν η συνάρτηση $s(t)$ είναι αύξουσα, το σώμα κινείται προς τα δεξιά· όταν η $s(t)$ είναι φθίνουσα, η κίνηση γίνεται προς τα αριστερά.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ($v = s'$) μηδενίζεται για $t = 1$ και $t = 11/3$.

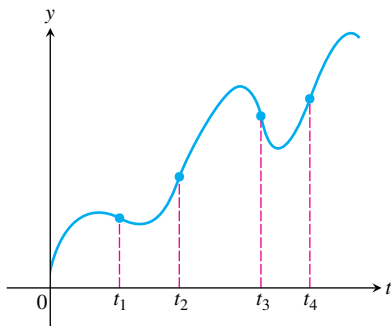
Διάστημα	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Πρόσημο $v = s'$	+	−	+
Συμπεριφορά s	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα
Κίνηση	δεξιά	αριστερή	δεξιά

Το σώμα κινείται προς τα δεξιά στα χρονικά διαστήματα $[0, 1)$ και $(11/3, \infty)$, και προς τα αριστερά στο διάστημα $(1, 11/3)$.

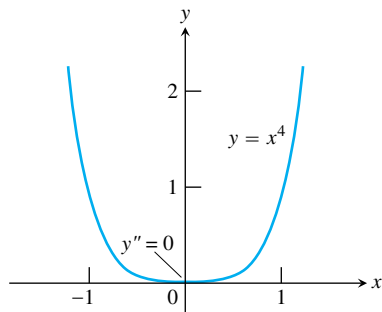
Η επιτάχυνση $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ μηδενίζεται για $t = 7/3$.

Διάστημα	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Πρόσημο $a = s''$	–	+
Γράφημα s	κοίλα κάτω	κοίλα άνω

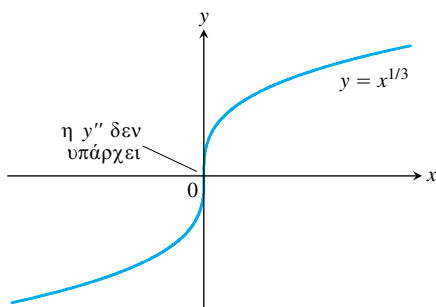
Η επιταχύνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα αριστερά στο χρονικό διάστημα $[0, 7/3)$, μηδενίζεται προς στιγμήν για $t = 7/3$, και εφεξής κατευθύνεται προς τα δεξιά.



ΣΧΗΜΑ 3.27 Μια υποθετική διακύμανση του δείκτη Dow Jones από το Παράδειγμα 6.



ΣΧΗΜΑ 3.28 Η γραφική παράσταση της $y = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στην αρχή, παρά το ότι $y'' = 0$ εκεί.



ΣΧΗΜΑ 3.29 Ένα σημείο όπου η y'' δεν υπάρχει μπορεί να είναι σημείο καμπής.

Παράδειγμα 6 Σημεία καμπής και χρηματιστήριο

Η γραφική παράσταση στο Σχήμα 3.27 δείχνει μια υποθετική διακύμανση του δείκτη Dow Jones του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης. Ο δείκτης αυτός περιγράφει τη συνολική κίνηση της χρηματαγοράς, καθώς και τις επιμέρους αυξομειώσεις.

Μπορεί κανείς να επενδύσει στο χρηματιστήριο αγοράζοντας μετοχές κάποιου ομίλου, και να παρακολουθεί κατόπιν τον δείκτη αξίας των συγκεκριμένων μετοχών. Ο σκοπός ενός επενδυτή είναι να αγοράσει φτηνά (σε τοπικό ελάχιστο) και να πουλήσει ακριβά (σε τοπικό μέγιστο). Βέβαια, η επίτευξη τέτοιου συγχρονισμού είναι ανέφικτη, αφού είναι αδύνατον να προβλέψει κανείς τις ακρότατες τιμές της αγοράς. Μόλις συνειδητοποιήσει ο επενδυτής ότι η αξία μιας μετοχής όντως αυξάνεται, το ελάχιστο έχει πια παρέλθει.

Εξετάζοντας τα σημεία καμπής, ο επενδυτής μπορεί να προβλέψει μια τάση αντιστροφής της αξίας της μετοχής πριν αυτή εκδηλωθεί, για τον λόγο ότι τα σημεία καμπής υποδεικνύουν μεταβολές θεμελιώδους χαρακτήρα στον ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησεως. Αγοράζοντας σε σημείο καμπής (ή κοντά σε αυτό) ο αγοραστής ποντάρει σε μια μακροπρόθεσμα αύξουσα τάση της αξίας μιας μετοχής. Με αυτόν τον τρόπο ο επενδυτής αμβλύνει τις επιπτώσεις από σποραδικές διακυμάνσεις της αξίας της μετοχής, και, μακροπρόθεσμα, κερδίζει από την αύξουσα τάση την οποία προέβλεψε.

Παράδειγμα 7 Ένα σημείο όπου $y'' = 0$ δεν είναι πάντοτε σημείο καμπής

Η καμπύλη $y = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x = 0$ (Σχήμα 3.28). Η $y'' = 12x^2$ μηδενίζεται εκεί, όμως δεν αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα 8 Υπάρχουν σημεία καμπής όπου η y'' δεν υπάρχει

Η καμπύλη $y = x^{1/3}$ έχει σημείο καμπής στο $x = 0$ (Σχήμα 3.29), παρά το ότι η y'' δεν υπάρχει εκεί.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2} (x^{1/3}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} \right) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$$

Βλέπουμε από το Παράδειγμα 7 ότι μια μηδενιζόμενη δεύτερη παράγωγος δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη σημείου καμπής. Από το Παράδειγμα 8 βλέπουμε ότι σημεία καμπής μπορούν να προκύψουν ακόμη και όταν δεν υπάρχει δεύτερη παράγωγος.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αντί να ερευνούμε για αλλαγές προσήμου της y' στα κρίσιμα σημεία, μπορούμε ενίοτε να χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο για να προσδιορίσουμε την ύπαρξη και τον χαρακτήρα των τοπικών ακροτάτων.

Θεώρημα 5 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

1. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$, τότε η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$.
2. Αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$, τότε η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$.

Το κριτήριο απαιτεί γνώση της f'' μόνο στο σημείο c και όχι σε κάποια περιοχή γύρω από το c . Αυτό απλοποιεί τα πράγματα. Από την άλλη, το κριτήριο δεν εφαρμόζεται αν $f''(c) = 0$ ή αν η $f''(c)$ δεν υπάρχει. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αναγκαστικά θα στραφούμε στο κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα.

Στο Παράδειγμα 9, εφαρμόζουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου στη συνάρτηση του Παραδείγματος 1.

Παράδειγμα 9 Κάνοντας χρήση του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ f''(x) &= 6x. \end{aligned}$$

Ελέγχουμε τα κρίσιμα σημεία $x = \pm 2$ για ύπαρξη ακροτάτων (άκρα του πεδίου ορισμού δεν υπάρχουν), οπότε

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ έχει τοπικό μέγιστο στο } x = -2$$

και

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ έχει τοπικό ελάχιστο στο } x = 2.$$

Παράδειγμα 10 Χρησιμοποιώντας τις f' και f'' για τη σχεδίαση της f

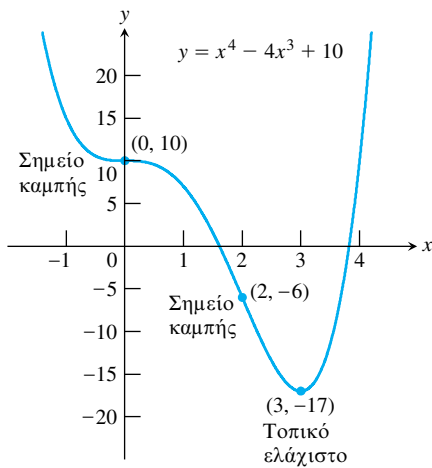
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

ακολουθώντας τα ακόλουθα βήματα.

- (α) Προσδιορίστε τα ακρότατα της f .
- (β) Βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
- (γ) Βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω.
- (δ) Σχεδιάστε με μολύβι και χαρτί ένα εύλογο γράφημα για την f .

Λύση Η f είναι συνεχής εφόσον η $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ υπάρχει. Πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, \infty)$, το οποίο συνεπώς είναι και πεδίο ορισμού της f' . Έτσι η f θα έχει κρίσιμα σημεία μόνο σε σημεία μηδενισμού της f' . Εφόσον



ΣΧΗΜΑ 3.30 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. (Παράδειγμα 10)

Διαδικασία σχεδίασης της $y = f(x)$ με μολύβι και χαρτί

Βήμα 1. Βρίσκουμε τις y' και y'' .

Βήμα 2. Βρίσκουμε πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η καμπύλη.

Βήμα 3. Προσδιορίζουμε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη.

Βήμα 4. Συνοψίζουμε.

Βήμα 5. Τοποθετούμε μερικά χαρακτηριστικά σημεία στο σχήμα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από αυτά.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο $x = 0$ και στο $x = 3$.

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Πρόσημο f'	—	—	+
Συμπεριφορά f	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα

(α) Εφαρμόζοντας το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα και συμβουλευόμενοι τον παραπάνω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ακρότατο στο $x = 0$, ενώ στο $x = 3$ υπάρχει τοπικό ελάχιστο.

(β) Συμβουλευόμενοι τον παραπάνω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι η f είναι φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, 3]$, και αύξουσα στο $[3, \infty)$.

(γ) Η $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ μηδενίζεται στο $x = 0$ και στο $x = 2$.

Διάστημα	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Πρόσημο f''	+	—	+
Συμπεριφορά f	κοίλα άνω	κοίλα κάτω	κοίλα άνω

Συμπεραίνουμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, \infty)$, ενώ στο $(0, 2)$ στρέφει τα κοίλα κάτω.

(δ) Συνοψίζοντας τους δύο παραπάνω πίνακες, παίρνουμε

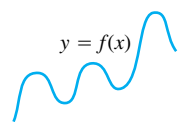
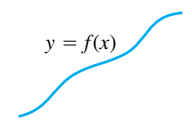
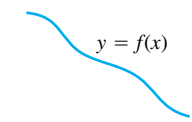
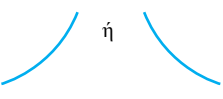
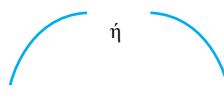
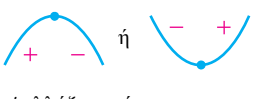
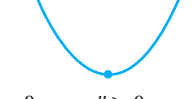
$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
φθίνουσα	φθίνουσα	φθίνουσα	αύξουσα
κοίλα άνω	κοίλα κάτω	κοίλα άνω	κοίλα άνω

Στο Σχήμα 3.30 φαίνεται η γραφική παράσταση της f .

Τα βήματα που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 10 αποτελούν μια γενικότερη διαδικασία σχεδίασης με το χέρι.

Τι μπορούμε να μάθουμε για μια συνάρτηση από την παράγωγό της

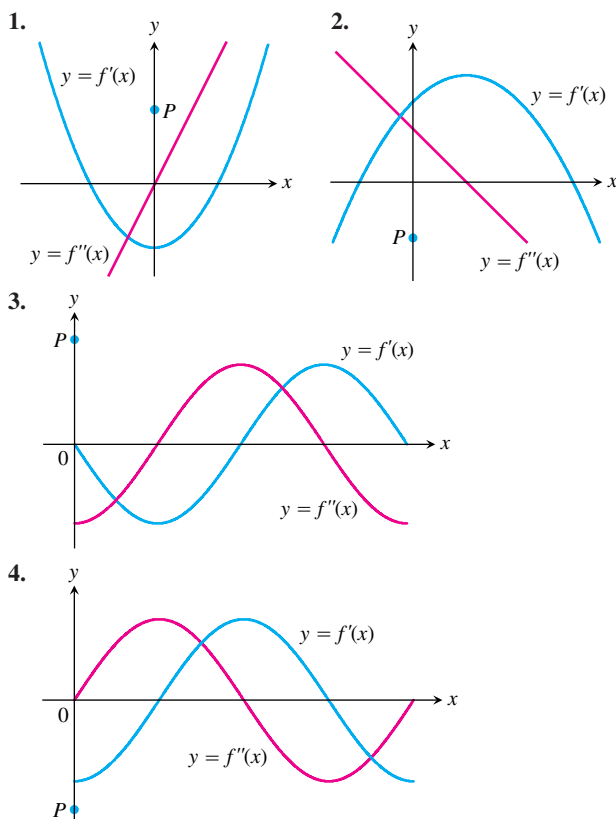
Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 10, μπορούμε να μάθουμε σχεδόν ό,τι θέλουμε για μια διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$ εξετάζοντας την πρώτη της παράγωγο. Μπορούμε να βρούμε πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η γραφική της παράσταση, και πού εμφανίζονται τοπικά ακρότατα. Μπορούμε να μάθουμε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη, αν παραγωγίσουμε την y' . Μπορούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε το σχήμα της γραφικής παραστάσεως. Η μόνη πληροφορία που δεν μπορούμε να εξαγάγουμε από την παράγωγο είναι πού ακριβώς να τοποθετήσουμε τη γραφική παράσταση στο επίπεδο xy . Όπως όμως είδαμε στην Ενότητα 3.2, η μόνη περαιτέρω πληροφορία που χρειαζόμαστε γι' αυτό είναι η τιμή της f σε ένα σημείο.

 $y = f(x)$ Διαφορίσιμη $\Rightarrow$ λεία και συνεχής· η καμπύλη μπορεί να είναι αύξουσα ή/και φθίνουσα	 $y = f(x)$ $y' > 0 \Rightarrow$ η καμπύλη είναι αύξουσα, ενδεχομένως με κυματισμούς	 $y = f(x)$ $y' < 0 \Rightarrow$ η καμπύλη είναι φθίνουσα, ενδεχομένως με κυματισμούς
 ή $y'' > 0 \Rightarrow$ κοίλα άνω παντού· δεν υπάρχουν κυματισμοί· η καμπύλη μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα	 ή $y'' < 0 \Rightarrow$ κοίλα κάτω παντού· δεν υπάρχουν κυματισμοί· η καμπύλη μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα	 y'' αλλάζει πρόσημο Σημείο καμπής (αν η f είναι διπλά διαφορίσιμη)
 ή y' αλλάζει πρόσημο $\Rightarrow$ η καμπύλη εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο	 $y' = 0$ και $y'' < 0$ σε σημείο· η καμπύλη εμφανίζει τοπικό μέγιστο	 $y' = 0$ και $y'' > 0$ σε σημείο· η καμπύλη εμφανίζει τοπικό ελάχιστο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.3

Πρόχειρη σχεδίαση (με μολύβι και χαρτί) της y βάσει γραφημάτων των y' και y''

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-4 δίδονται τα γραφήματα της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Μεταφέρετε στο χαρτί τα γραφήματα και προσθέστε σε αυτά ένα προσεγγιστικό γράφημα της f , δεδομένου ότι το γράφημα αυτό διέρχεται από το σημείο P .



Πρόχειρη σχεδίαση της y όταν γνωρίζουμε τα πρόσημα των y' και y''

5. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Καταγράψτε στο σχήμα σας τις συντεταγμένες όσων σημείων μπορείτε.

x	y	Παράγωγοι
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' < 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

6. Σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της διπλά διαφορίσιμης συναρτήσεως $y = f(x)$ που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(2, 2)$, της οποίας η πρώτη και δεύτερη παράγωγος εμφανίζουν τις ακόλουθες εναλλαγές προσημών αντίστοιχα:

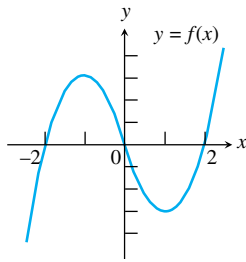
$$y': \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ -2 & 0 & 2 & \end{array}$$

$$y'': \begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ -1 & 1 & \end{array}$$

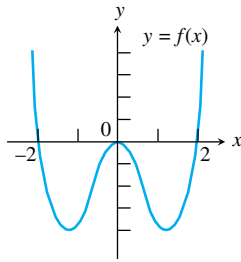
Χρήση γραφικών παραστάσεων για μελέτη συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 7 και 8, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της f για να εκτιμήσετε σε ποια σημεία ή διαστήματα (α) η f' και (β) η f'' είναι 0, θετική, ή αρνητική.

7.

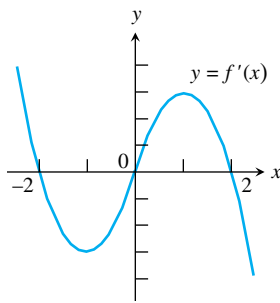


8.

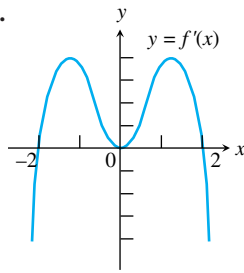


Στις Ασκήσεις 9-12, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της f' για να εκτιμήσετε σε ποια διαστήματα η f είναι (α) αύξουσα ή (β) φθίνουσα. (γ) Επίσης εκτιμήστε τα σημεία τοπικών ακροτάτων της f .

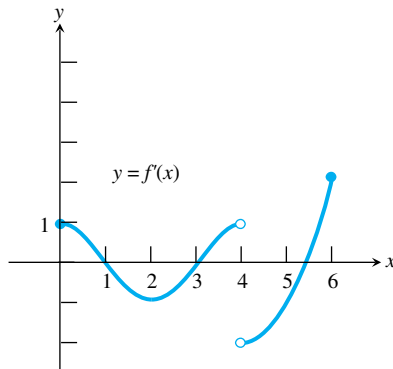
9.



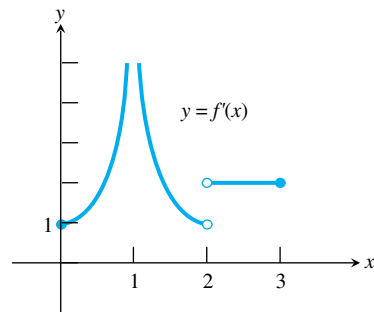
10.



11. Το πεδίο ορισμού της f' είναι $[0, 4) \cup (4, 6]$.



12. Το πεδίο ορισμού της f' είναι $[0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3]$.



Μελέτη της f όταν γνωρίζουμε την f'

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, αναφορικά με τις συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι δίδονται στις Ασκήσεις 13-16.

- (α) Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f ;
- (β) Σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα η f και σε ποια φθίνουσα;
- (γ) Σε ποια σημεία (αν υπάρχουν) εμφανίζει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα η f ;

13. $f'(x) = (x-1)(x+2)$

14. $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

15. $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

16. $f'(x) = x^{-1/3}(x+2)$

Σχήμα γραφικής παραστάσεως

Στις Ασκήσεις 17-22, εφαρμόστε αναλυτικές μεθόδους για να βρείτε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση

- (α) είναι αύξουσα
- (β) είναι φθίνουσα
- (γ) στρέφει τα κοίλα άνω
- (δ) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Κατόπιν εντοπίστε και χαρακτηρίστε τα όποια

- (ε) τοπικά ακρότατα
- (στ) σημεία καμψής.

17. $y = x^2 - x - 1$

18. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

19. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

20. $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

21. $y = x\sqrt{8-x^2}$

22. $y = \begin{cases} 3-x^2, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$

† Στις Ασκήσεις 23-32, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση για να βρείτε τα διαστήματα όπου η συνάρτηση

- (α) είναι αύξουσα
- (β) είναι φθίνουσα
- (γ) στρέφει τα κοίλα άνω
- (δ) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Κατόπιν εντοπίστε και χαρακτηρίστε τα όποια

- (ε) τοπικά ακρότατα
- (στ) σημεία καμψής.

23. $y = 4x^3 + 21x^2 + 36x - 20$

24. $y = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$

25. $y = 2x^{1/5} + 3$

26. $y = 5 - x^{1/3}$

27. $y = x^{1/3}(x-4)$

28. $y = x^2\sqrt{9-x^2}$

29. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x-2}$

30. $y = x^{3/4}(5-x)$

31. $y = x^{1/4}(x+3)$

32. $y = \frac{x}{x^2+1}$

Ακρότατα και σημεία καμψής

Στις Ασκήσεις 33 και 34, χρησιμοποιήστε την παράγωγο της συναρτήσεως $y = f(x)$ για να βρείτε τα σημεία όπου η f εμφανίζει

- (α) τοπικό μέγιστο
- (β) τοπικό ελάχιστο
- (γ) σημείο καμψής.

33. $y' = (x-1)^2(x-2)$

34. $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

Στις Ασκήσεις 35 και 36, εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.

- (α) Βρείτε πού εμφανίζονται και ποια είναι τα ολικά ακρότατα της f .
 (β) Βρείτε όποια σημεία καμπής υπάρχουν.
 (γ) Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση της f .

35. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	δεν υπάρχει	-3
f''	0	-1	δεν υπάρχει	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	-
f'	+	-	-
f''	-	-	-

36. Η f είναι άρτια και συνεχής στο $[-3, 3]$, και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2
f	2	0	-1
f'	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει
f''	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	-	-
f'	-	-	+
f''	+	-	-

T Στις Ασκήσεις 37-40, βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) του γραφήματος της συνάρτησης, καθώς και τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα. Κατόπιν σχεδιάστε τη συνάρτηση σε αρκετά μεγάλη περιοχή ώστε να φαίνονται ταυτόχρονα όλα αυτά τα σημεία. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των σημείων τομής των γραφημάτων αυτών με τον άξονα x , και του γραφήματος της συναρτήσεως; Ποιες άλλες σχέσεις συνδέουν τα γραφήματα των παραγώγων με το γράφημα της συναρτήσεως;

37. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

38. $y = x^3 - 12x^2$

39. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

40. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

T 41. Σχεδιάστε την $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ σε κοινό σχήμα με την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγό της. Σχολιάστε τη

συμπεριφορά της f αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές των f' και f'' .

T 42. Σχεδιάστε την $f(x) = x \cos x$ σε κοινό σχήμα με τη δεύτερη παράγωγό της στο $0 \leq x \leq 2\pi$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της f αναφορικά με τα πρόσημα και τις τιμές της f'' .

Ευθύγραμμη κίνηση

Στις Ασκήσεις 43-46, σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα με συνάρτηση θέσεως $s(t)$. Αφού βρείτε (α) την ταχύτητα και (β) την επιτάχυνση του σωματιδίου, (γ) περιγράψτε την κίνησή του για $t \geq 0$.

43. $s(t) = t^2 - 4t + 3$

44. $s(t) = 6 - 2t - t^2$

45. $s(t) = t^3 - 3t + 3$

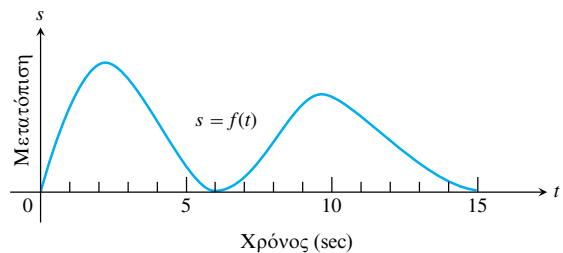
46. $s(t) = 3t^2 - 2t^3$

Στις Ασκήσεις 47 και 48, δίδεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως θέσεως $y = s(t)$ σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα. Περίπου σε ποιες χρονικές στιγμές

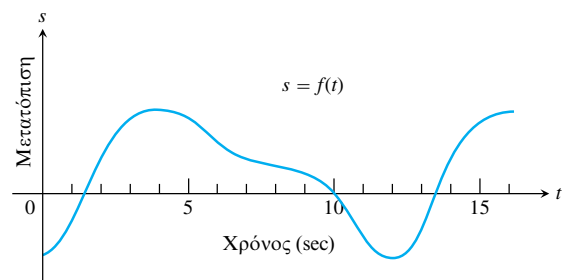
(α) μηδενίζεται η ταχύτητά του;

(β) μηδενίζεται η επιτάχυνσή του;

47.



48.



Θεωρία και παραδείγματα

49. **Μάθετε γράφοντας** Αν η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και $f'(c) = 0$ σε σημείο c εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε η f θα εμφανίζει υποχρεωτικά τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $x = c$; Εξηγήστε.

50. **Μάθετε γράφοντας** Αν η $f(x)$ είναι διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση και $f''(c) = 0$ σε σημείο c εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε η f θα έχει υποχρεωτικά σημείο καμπής στο $x = c$; Εξηγήστε.

51. **f και f'** Σχεδιάστε μια λεία καμπύλη $y = f(x)$ που να διέρχεται από την αρχή και να έχει τις εξής ιδιότητες: $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και $f'(x) > 0$ για $x > 0$.

52. **f και f''** Σχεδιάστε μια λεία καμπύλη $y = f(x)$ που να διέρχεται από την αρχή και να έχει τις εξής ιδιότητες: $f''(x) < 0$ για $x < 0$ και $f''(x) > 0$ για $x > 0$.

53. **$f, f',$ και f''** Σχεδιάστε μια συνεχή καμπύλη $y = f(x)$ με

τις ακόλουθες ιδιότητες. Καταγράψτε στο σχήμα τις συντεταγμένες όσων σημείων σάς είναι δυνατόν.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 8, & f'(x) &> 0 \text{ για } |x| > 2 \\ f(0) &= 4, & f'(x) &< 0 \text{ για } |x| < 2 \\ f'(2) &= 0, & f''(x) &< 0 \text{ για } x < 0 \\ f'(2) &= f(-2) = 0, & f''(x) &> 0 \text{ για } x > 0 \end{aligned}$$

54. **Μάθετε γράφοντας: Οριζόντιες εφαπτομένες** Έχει η καμπύλη $y = x^2 + 3 \sin 2x$ οριζόντια εφαπτομένη κοντά στο $x = -3$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
55. **Μάθετε γράφοντας** Για $x > 0$, σχεδιάστε μια καμπύλη $y = f(x)$ για την οποία $f(1) = 0$ και $f'(x) = 1/x$. Μπορείτε να συμπεράνετε προς τα πού στρέφει τα κοίλα η καμπύλη αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
56. **Μάθετε γράφοντας** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το γράφημα της $y = f(x)$ της οποίας η δεύτερη παράγωγος είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται ποτέ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
57. **Καμπύλες δευτέρου βαθμού** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα σημεία καμπής μιας καμπύλης δευτέρου βαθμού $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
58. **Καμπύλες τρίτου βαθμού** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα σημεία καμπής μιας καμπύλης τρίτου βαθμού $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

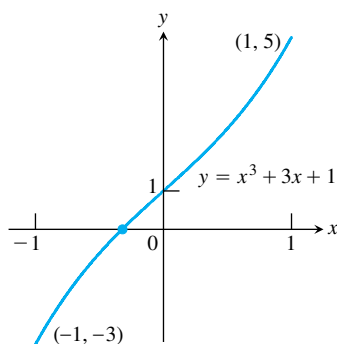
Απαρίθμηση ριζών

Όταν επιλύουμε αριθμητικά (υπολογιστικά) την εξίσωση $f(x) = 0$, θέλουμε συνήθως να ξέρουμε πόσες λύσεις υπάρχουν σε δοσμένο διάστημα. Μερικές φορές το Πόρισμα 3 μας δίνει την απάντηση.

Έστω ότι

- i. η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b)
- ii. οι $f(a)$ και $f(b)$ έχουν αντίθετο πρόσημο
- iii. $f' > 0$ στο (a, b) ή $f' < 0$ στο (a, b) .

Αν τα παραπάνω ισχύουν, η f θα έχει ακριβώς μια ρίζα μεταξύ των a και b : Δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες, εφόσον είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο $[a, b]$. Ωστόσο, βάσει του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής (Ενότητα 1.4), θα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^3 + 3x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[-1, 1]$ διότι η f είναι διαφορίσιμη στο $[-1, 1]$, η $f(-1) = -3$ έχει αντίθετο πρόσημο με την $f(1) = 5$, και $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ και κάθε x . (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.)



Δείξτε ότι οι συναρτήσεις στις Ασκήσεις 59-62 έχουν ακριβώς μια ρίζα στο αναγραφόμενο διάστημα.

59. $f(x) = x^4 + 3x + 1$, $[-2, -1]$
60. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4$, $(0, \infty)$
61. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8$, $(-\infty, \infty)$
62. $r(\theta) = \tan \theta - \cot \theta - \theta$, $(0, \pi/2)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

63. **Μάθετε γράφοντας: Μια οικογένεια συναρτήσεων τρίτου βαθμού**
- (α) Σε ενιαίο σχήμα στον υπολογιστή σας, σχεδιάστε την $f(x) = x^3 + kx$ για $k = 0$ καθώς και για γειτονικές (θετικές και αρνητικές) τιμές του k . Πώς φαίνεται να επηρεάζει τη γραφική παράσταση η τιμή του k ;
 - (β) Βρείτε την $f'(x)$. Όπως βλέπετε, η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x . Βρείτε τη διακρίνουσα (η διακρίνουσα του τριωνύμου $ax^2 + bx + c$ είναι $b^2 - 4ac$). Για ποιες τιμές του k γίνεται η διακρίνουσα θετική, μηδέν, και αρνητική αντίστοιχα; Για ποιες τιμές του k αποκτά δύο, μία, και καμία ρίζα αντίστοιχα η f' ; Τώρα είστε σε θέση να εξηγήσετε πώς επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f η τιμή του k .
 - (γ) Πειραματιστείτε με άλλες τιμές του k . Τι φαίνεται να συμβαίνει καθώς $k \rightarrow -\infty$; Καθώς $k \rightarrow \infty$;
64. **Μάθετε γράφοντας: Μια οικογένεια συναρτήσεων τετάρτου βαθμού**
- (α) Σε ενιαίο σχήμα στον υπολογιστή σας, σχεδιάστε την $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$, $-1 \leq x \leq 4$ για $k = -4$, καθώς και για γειτονικές τιμές του k . Πώς φαίνεται να επηρεάζει τη γραφική παράσταση η τιμή του k ;
 - (β) Βρείτε την $f''(x)$. Όπως βλέπετε, η $f''(x)$ είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού του x . Βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού (δείτε την Άσκηση 63β). Για ποιες τιμές του k γίνεται η διακρίνουσα θετική, μηδέν, και αρνητική αντίστοιχα; Για ποιες τιμές του k αποκτά δύο, μία, και καμία ρίζα αντίστοιχα η $f''(x)$; Τώρα είστε σε θέση να εξηγήσετε πώς επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f η τιμή του k .

Στις Ασκήσεις 65 και 66, χρησιμοποιήστε υπολογιστή.

65. **Λογιστικές συναρτήσεις** Έστω $f(x) = c/(1 + ae^{-bx})$ με $a > 0$, $abc \neq 0$.
- (α) Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ αν $abc > 0$ και φθίνουσα αν $abc < 0$.
 - (β) Δείξτε ότι το σημείο καμπής της f προκύπτει για $x = (\ln a)/b$.
66. **Πολυωνυμικές συναρτήσεις τετάρτου βαθμού** Έστω $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ με $a \neq 0$.
- (α) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει 0 ή 2 σημεία καμπής.
 - (β) Γράψτε μια συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι συντελεστές αν το γράφημα της f έχει 0 ή 2 σημεία καμπής, αντίστοιχα.

3.4

Γραφική επίλυση αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων

Τιμές ισορροπίας και ευθείες φάσεων • Ευσταθής και ασταθής ισορροπία • Φαινόμενα ψύξης σώματος, πτώσης με αντίσταση αέρα, και λογιστικής αύξησης

Είδαμε πώς οι παράγωγοι μιας συναρτήσεως καθορίζουν το σχήμα της γραφικής παραστάσεως. Μπορούμε να εκμεταλλευθούμε τη γνώση μας αυτή προκειμένου να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις με γραφικές μεθόδους. Οι έννοιες που θα μας χρειαστούν κατ' αρχάς είναι η *ευθεία φάσεων* και η *τιμή ισορροπίας*. Οι έννοιες αυτές προκύπτουν αν εξετάσουμε από μια νέα οπτική γωνία τη συμπεριφορά διαφορίσιμων συναρτήσεων με μηδενιζόμενη παράγωγο.

Τιμές ισορροπίας και ευθείες φάσεων

Είδαμε ως τώρα ότι τα κρίσιμα σημεία μάς επιτρέπουν να προσδιορίζουμε τη συμπεριφορά μιας συναρτήσεως και να βρίσκουμε τα ακρότατα σημεία της. Ας διερευνήσουμε τώρα από άλλη σκοπιά την περίπτωση στην οποία η παράγωγος μιας συναρτήσεως μηδενίζεται. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση που η παράγωγος dy/dx είναι συνάρτηση μόνο του y (της εξαρτημένης μεταβλητής). Για παράδειγμα, με έμμεση παραγωγή της εξίσωσης

$$y^2 = x + 1$$

παίρνουμε

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Μια διαφορική εξίσωση όπου η dy/dx είναι μόνο συνάρτηση του y καλείται **αυτόνομη**.

Ορισμός Τιμές ισορροπίας ή σημεία ηρεμίας

Αν η $dy/dx = g(y)$ είναι μια αυτόνομη διαφορική εξίσωση, τότε οι τιμές της y όπου $dy/dx = 0$ καλούνται **τιμές ισορροπίας** ή **σημεία ηρεμίας**.

Έτσι, σε κατάλληλη περιοχή γύρω από μια τιμή ισορροπίας η εξαρτημένη μεταβλητή δεν μεταβάλλεται, δηλαδή η y βρίσκεται σε *ηρεμία*. Η έμφαση έχει δοθεί εδώ στην τιμή του y για την οποία είναι $dy/dx = 0$, και όχι στην αντίστοιχη τιμή του x , όπως κάναμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1 Εύρεση τιμών ισορροπίας

Οι τιμές ισορροπίας της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

είναι $y = -1$ και $y = 2$.

Για να κατασκευάσουμε μια γραφική λύση της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης του Παραδείγματος 1, σχεδιάζουμε πρώτα την **ευθεία φάσεων** της εξίσωσης, δηλαδή τοποθετούμε στον άξονα y τις τιμές ισορροπίας και αναγράφουμε τα διαστήματα όπου οι dy/dx και d^2y/dx^2 είναι θετικές ή αρνητικές. Έτσι αναγνωρίζουμε αμέσως πού είναι αύξουσα και πού φθίνουσα η λύση, καθώς και πού είναι κοίλες και πού κυρτές οι καμπύλες λύσεων. Με άλλα λόγια, κωδικοποιούμε στην ευθεία φάσεων τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του γραφήματος που μελε-

τήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Από αυτά μπορούμε να συμπεράνουμε το σχήμα των καμπυλών λύσεων, χωρίς να πρέπει να βρούμε τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις.

Παράδειγμα 2 Σχεδίαση ευθείας φάσεων και καμπυλών λύσεων

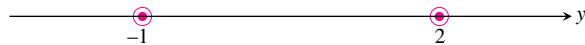
Αφού κατασκευάσετε την ευθεία φάσεων της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

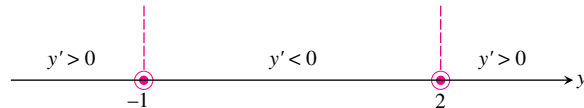
σχεδιάστε μερικές λύσεις της εξίσωσης αυτής.

Λύση

Βήμα 1. Σχεδιάζουμε τον άξονα y στον οποίο τοποθετούμε τις τιμές ισορροπίας $y = -1$ και $y = 2$, όπου $dy/dx = 0$.



Βήμα 2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα όπου $y' > 0$ και $y' < 0$. Το δεύτερο αυτό βήμα μοιάζει με ό,τι κάναμε στην προηγούμενη ενότητα, μόνο που τώρα εργαζόμαστε στον άξονα y αντί στον x .



Η πληροφορία του προσήμου της y' μπορεί να ενσωματωθεί στην ίδια την ευθεία φάσεων. Εφόσον $y' > 0$ στα αριστερά του $y = -1$, μια λύση y μικρότερη του -1 θα αυξάνεται όσο πλησιάζει την τιμή $y = -1$. Απεικονίζουμε την πληροφορία αυτή στο αντίστοιχο διάστημα σχεδιάζοντας ένα βέλος που δείχνει προς την τιμή -1 .



Ομοίως, $y' < 0$ μεταξύ των $y = -1$ και $y = 2$, οπότε κάθε λύση εντός του διαστήματος αυτού θα μειώνεται, οδεύοντας προς την τιμή $y = -1$.

Για $y > 2$, έχουμε $y' > 0$, οπότε κάθε λύση με τιμή y μεγαλύτερη του 2 θα αυξάνεται από κει κι έπειτα απεριόριστα.

Συνοψίζοντας, καμπύλες λύσεων που κείνται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = -1$ στο επίπεδο xy , οδεύουν προς το $y = -1$. Καμπύλες που κείνται μεταξύ των ευθειών $y = -1$ και $y = 2$ απομακρύνονται από το $y = 2$ και οδεύουν προς το $y = -1$. Καμπύλες λύσεων που κείνται πάνω από την ευθεία $y = 2$ απομακρύνονται συνεχώς από το $y = 2$.

Βήμα 3. Υπολογίζουμε την y'' και σημειώνουμε τα διαστήματα όπου $y'' > 0$ και $y'' < 0$. Για να βρούμε την y'' , παραγωγίζουμε την y' ως προς x .

$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2)$$

$$= 2yy' - y'$$

$$= (2y - 1)y'$$

$$= (2y - 1)(y + 1)(y - 2).$$

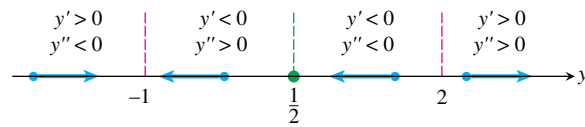
Από την τελευταία έκφραση, βλέπουμε ότι η y'' αλλάζει πρόσημο για $y = -1$, $y = 1/2$, και $y = 2$. Μεταφέρουμε την πληροφορία αυτή στην ευθεία φάσεων.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

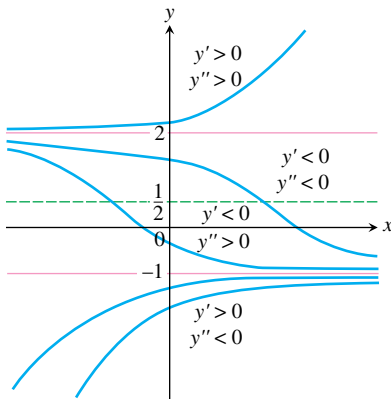
Charles Babbage
(1792-1871)



Βήμα 4. Σχεδιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα καμπυλών λύσεων στο επίπεδο xy . Οι οριζόντιες ευθείες $y = -1$, $y = 1/2$, και $y = 2$ διαμερίζουν το επίπεδο σε οριζόντιες ζώνες σε καθεμία εκ των οποίων τα πρόσημα των y' και y'' μας είναι γνωστά. Έτσι, σε κάθε ζώνη ξέρουμε αν οι καμπύλες λύσεων είναι αύξουσες ή φθίνουσες καθώς το x αυξάνεται (Σχήμα 3.31).

Οι «ευθείες ισορροπίας» $y = -1$ και $y = 2$ είναι επίσης καμπύλες λύσεων. (Οι σταθερές συναρτήσεις $y = -1$ και $y = 2$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση.) Όσες καμπύλες λύσεων τέμνονται με την ευθεία $y = 1/2$ εμφανίζουν σημείο καμπής στο σημείο τομής. Οι καμπύλες αυτές στρέφουν τα κοίλα κάτω για $y > 1/2$, ενώ για $y < 1/2$ στρέφουν τα κοίλα άνω.

Όπως είχαμε προβλέψει στο βήμα 2, οι λύσεις που ξεκινούν από τη μεσαία και την κατώτερη οριζόντια ζώνη οδεύουν προς την τιμή ισορροπίας $y = -1$, καθώς αυξάνεται το x . Οι λύσεις στην ανώτερη ζώνη σταδιακά απομακρύνονται από την τιμή $y = 2$.



ΣΧΗΜΑ 3.31 Γραφικές λύσεις για το Παράδειγμα 2.

Ευσταθής και ασταθής ισορροπία

Ας προσέξουμε για λίγο στο Σχήμα 3.31 τη συμπεριφορά των καμπυλών λύσεων κοντά στις τιμές ισορροπίας. Αν μια καμπύλη λύσεως βρεθεί κοντά στην τιμή $y = -1$, οδεύει σταθερά προς την τιμή αυτή· πρόκειται λοιπόν για **ευσταθή ισορροπία**. Αντιθέτως, κοντά στην τιμή $y = 2$ συμβαίνει το αντίθετο: κάθε καμπύλη λύσεως (με εξαίρεση την ίδια την $y = 2$) απομακρύνεται από την τιμή αυτή καθώς το x αυξάνεται. Έτσι η τιμή $y = 2$ αντιστοιχεί σε **ασταθή ισορροπία**. Αν η λύση έχει εξαρχής την τιμή αυτή, τη διατηρεί, αλλά αν απέχει από αυτήν έστω και ελάχιστα, εν τέλει θα απομακρυνθεί. (Μια τιμή ισορροπίας είναι ασταθής ακόμη και αν η λύση απομακρύνεται από αυτήν μόνο από τη μία της πλευρά.)

Μπορούμε τώρα να αναγνωρίσουμε τη συμπεριφορά αυτή στην ευθεία φάσεων που σχεδιάσαμε παραπάνω. Τα βέλη εκεί απομακρύνονται από την τιμή $y = 2$, ενώ αν βρεθούν αριστερά της $y = 2$, οδεύουν προς την τιμή $y = -1$.

Φαινόμενα ψύξης σώματος, πτώσης με αντίσταση αέρα, και λογιστικής αύξησης

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, χρησιμοποιούμε μια ευθεία φάσεων για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά ενός φυσικού μοντέλου. Πρώτος ο Isaac Newton διατύπωσε αξιωματικά την πρόταση ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός ψυχόμενου ή θερμαινόμενου σώματος είναι ανάλογος της θερμοκρασιακής διαφοράς μεταξύ του σώματος και του περιβάλλοντος (του μέσου που το περιβάλλει). Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή αυτή για να μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία σωμάτων συναρτήσει του χρόνου.

Η αρχή αυτή καλείται **νόμος ψύξεως του Νεύτωνα** (παρότι εφαρμόζεται εξίσου και για φαινόμενα θέρμανσης).

Παράδειγμα 3 Σούπα που κρυώνει

Πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός πιάτου καυτής σούπας από τη στιγμή που το αφήνουμε στο τραπέζι; Ξέρουμε βέβαια ότι η σούπα θα κρυώσει, αλλά ποια μορφή θα έχει η καμπύλη θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου;

Λύση Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία της σούπας H είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου t , για τον οποίο επιλέγουμε μια κατάλληλη μονάδα –π.χ. min– και μια αρχική τιμή $t = 0$. Υποθέτουμε ακόμη ότι το περιβάλλον μέσον έχει αρκετά μεγάλο όγκο ώστε να μην μεταβάλλεται αισθητά η θερμοκρασία του συνεπεία της θερμότητας που ρέει προς αυτό από τη σούπα.

Έστω 15°C η σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος. Η διαφορά θερμοκρασίας είναι λοιπόν $H(t) - 15$. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, υπάρχει μια σταθερά αναλογίας $k > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \quad (1)$$

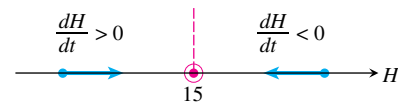
(μείον k για να είναι αρνητική η παράγωγος για $H > 15$).

Εφόσον $dH/dt = 0$ για $H = 15$, η θερμοκρασία 15°C είναι τιμή ισορροπίας. Αν $H > 15$, η Εξίσωση (1) μας λέει ότι $(H - 15) > 0$ και $dH/dt < 0$. Αν δηλαδή ένα σώμα είναι θερμότερο του περιβάλλοντος, θα ψυχθεί. Ομοίως, αν $H < 15$, τότε $(H - 15) < 0$ και $dH/dt > 0$. Δηλαδή ένα ψυχρότερο του περιβάλλοντος σώμα θα θερμανθεί. Έτσι, η συμπεριφορά που περιγράφεται από την Εξίσωση (1) συμφωνεί με την εμπειρία μας για τη θερμοκρασία. Οι παρατηρήσεις αυτές έχουν ενσωματωθεί στο αρχικό διάγραμμα φάσεων του Σχήματος 3.32.

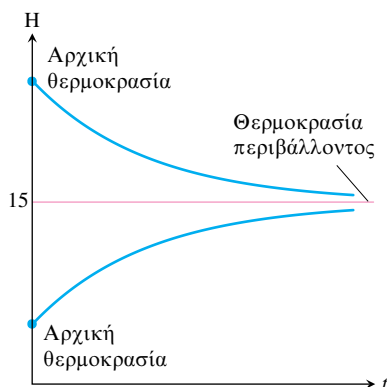
Παραγωγίζουμε ως προς t και τα δύο μέλη της Εξίσωσης (1), για να προσδιορίσουμε την κοιλότητα των καμπυλών λύσεων:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} (-k(H - 15)) \\ \frac{d^2H}{dt^2} &= -k \frac{dH}{dt}. \end{aligned}$$

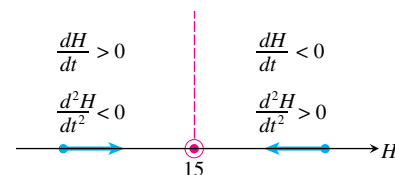
Εφόσον το $-k$ είναι αρνητικό, η ποσότητα d^2H/dt^2 είναι θετική όταν $dH/dt < 0$ και αρνητική όταν $dH/dt > 0$. Η ευθεία φάσεων του Σχήματος 3.33 εμπεριέχει την πληροφορία αυτή.



ΣΧΗΜΑ 3.32 Το πρώτο στάδιο κατασκευής της ευθείας φάσεων για τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα στο Παράδειγμα 3. Καθώς ο χρόνος περνά, η θερμοκρασία πλησιάζει την τιμή ισορροπίας (τη θερμοκρασία περιβάλλοντος).



ΣΧΗΜΑ 3.34 Θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου. Ασχέτως της αρχικής θερμοκρασίας του σώματος, η θερμοκρασία $H(t)$ τείνει να εξισωθεί με 15°C , δηλαδή με τη θερμοκρασία περιβάλλοντος.



ΣΧΗΜΑ 3.33 Η πλήρης ευθεία φάσεων του Παραδείγματος 3.

Η πλήρης ευθεία φάσεων δείχνει ότι αν η θερμοκρασία ενός σώματος υπερβαίνει την τιμή ισορροπίας 15°C , η καμπύλη $H(t)$ θα είναι φθίνουσα και κυρτή (κοίλα άνω). Αν η θερμοκρασία είναι μικρότερη από 15°C (που είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος), τότε η καμπύλη $H(t)$ θα είναι αύξουσα και κοίλη (κοίλα κάτω). Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε πρόχειρα (αλλά ποιοτικώς σωστά) μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων (Σχήμα 3.34).

Όπως δείχνει η άνω καμπύλη του Σχήματος 3.34, καθώς το σώμα ψύχεται, ο ρυθμός ψύξεως επιβραδύνεται διότι η ποσότητα dH/dt τείνει στο μηδέν. Η παρατήρηση αυτή υπονοείται βέβαια στον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα και εμπεριέχεται στη διαφορική εξίσωση· ωστόσο η «εξομάλυνση» της καμπύλης για μεγάλο t αποτελεί μια άμεση οπτική αναπαράσταση του φαινομένου. Η ικανότητα να διακρίνετε τη φυσική συμπεριφορά που κωδικοποιεί μια γραφική παράσταση αποτελεί ισχυρό εργαλείο κατανόησης συστημάτων του πραγματικού κόσμου.

Παράδειγμα 4 Ανάλυση της πτώσης σώματος με δύναμη αντίστασης

Τόσο ο Γαλιλαίος όσο και ο Νεύτωνας παρατήρησαν ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κινούμενου σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Εκφρασμένο μαθηματικά, αυτό σημαίνει,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (2)$$

όπου F η δύναμη και m και v η μάζα και η ταχύτητα του σώματος. Αν η μάζα m μεταβάλλεται στον χρόνο, π.χ. αν μελετάμε έναν πύραυλο που καίει καύσιμα, το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (2) γίνεται

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

βάσει του τύπου παραγώγου γινομένου. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, η μάζα είναι σταθερή, $dm/dt = 0$, οπότε η Εξίσωση (2) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad \text{ή} \quad F = ma, \quad (3)$$

η οποία είναι γνωστή ως ο *δευτέρος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση*.

Στην ελεύθερη πτώση, η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας συμβολίζεται με g και η μόνη δύναμη που έλκει προς τα κάτω το σώμα είναι η

$$F_p = mg,$$

δηλαδή η δύναμη της βαρύτητας. Αν, όμως, ένα σώμα πέφτει διαμέσου του αέρα –π.χ., ένα κέρμα από μεγάλο ύψος ή ένας αλεξιπτωτιστής από ακόμη μεγαλύτερο ύψος– τότε γνωρίζουμε καλά από την εμπειρία μας ότι από κάποιο σημείο κι έπειτα η αντίσταση του αέρα επηρεάζει την ταχύτητα της πτώσης. Ένα ρεαλιστικότερο μοντέλο της ελεύθερης πτώσης θα περιλαμβάνει λοιπόν την αντίσταση του αέρα, που στο Σχήμα 3.35 αναπαρίσταται ως η δύναμη F_r .

Για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του ήχου, έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η F_r είναι περίπου ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Έτσι, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα που πέφτει είναι

$$F = F_p - F_r,$$

οπότε

$$ma = mg - kv$$

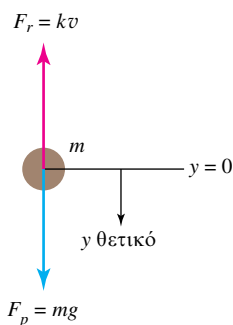
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \quad (4)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων ταχύτητας που ικανοποιούν τη διαφορική αυτή εξίσωση, κατασκευάζοντας την κατάλληλη ευθεία φάσεων.

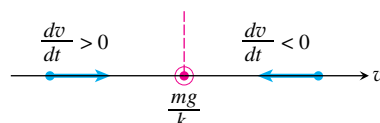
Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν αν εξισώσουμε το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (4) με το μηδέν. Βρίσκουμε

$$v = \frac{mg}{k}.$$

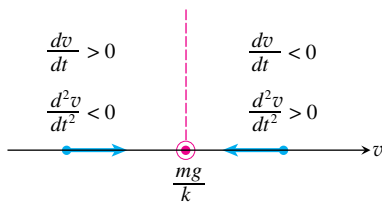
Αν η αρχική ταχύτητα υπερβαίνει την τιμή αυτή, η παράγωγος dv/dt είναι αρνητική και το σώμα επιβραδύνεται. Αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρότερη από mg/k , τότε $dv/dt > 0$ και το σώμα επιταχύνεται. Το αρχικό διάγραμμα φάσεων του Σχήματος 3.36 εμπεριέχει τις παρατηρήσεις αυτές.



ΣΧΗΜΑ 3.35 Σκαρίφημα πτώσης σώματος στο πεδίο βαρύτητας της Γης με αντίσταση που είναι ανάλογη της ταχύτητας.

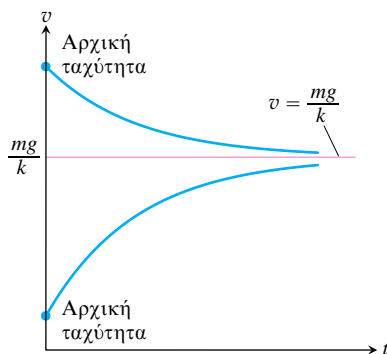


ΣΧΗΜΑ 3.36 Η αρχική ευθεία φάσεων για το Παράδειγμα 4.



ΣΧΗΜΑ 3.37 Η πλήρης ευθεία φάσεων για το Παράδειγμα 4.

Πριν ανοίξει το αλεξιπτωτό του, ένας αλεξιπτωτιστής μπορεί να μεταβάλλει κατά βούληση την οριακή του ταχύτητα από 150 km/h σε 290 km/h, μεταβάλλοντας την επιφάνεια του σώματός του που εκτίθεται εγκάρσια προς την κατεύθυνση της πτώσης.



ΣΧΗΜΑ 3.38 Αντιπροσωπευτικές καμπύλες ταχυτήτων για το Παράδειγμα 4. Η τιμή $v = mg/k$ είναι η τελική (οριακή) ταχύτητα.

Προσδιορίζουμε την κοιλότητα των καμπυλών λύσεως παραγωγίζοντας την Εξίσωση (4) ως προς τον χρόνο t :

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(g - \frac{k}{m} v \right) = -\frac{k}{m} \frac{dv}{dt}.$$

Βλέπουμε ότι είναι $d^2v/dt^2 < 0$ όταν $v < mg/k$ και $d^2v/dt^2 > 0$ όταν $v > mg/k$. Στην ευθεία φάσεων του Σχήματος 3.37 έχει προστεθεί η πληροφορία αυτή. Η ομοιότητα με την ευθεία φάσεων για τον νόμο ψύξεως του Νεύτωνα είναι εντυπωσιακή (Σχήμα 3.33). Οι καμπύλες λύσεων επίσης μοιάζουν (Σχήμα 3.38).

Το Σχήμα 3.38 δείχνει δυο αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων. Ανεξαρτήτως της αρχικής ταχύτητας, η ταχύτητα του σώματος συγκλίνει τελικά προς την οριακή τιμή $v = mg/k$. Η τιμή αυτή (τιμή ευσταθούς ισορροπίας, στο παράδειγμά μας) καλείται **τελική ταχύτητα**.

Παράδειγμα 5 Ανάλυση της πληθυσμιακής αύξησης σε περιοριστικό περιβάλλον

Παριστάνουμε με $P = P(t)$ το πλήθος των ατόμων ενός συγκεκριμένου πληθυσμού τη στιγμή t . Για παράδειγμα, το P μπορεί να αντιπροσωπεύει τον αριθμό κυττάρων μαγιάς σε ένα θρεπτικό υγρό, ή τον πληθυσμό της λευκής κουκουβάγιας στις δυτικές Η.Π.Α. Έστω ότι κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt , ένα ποσοστό του πληθυσμού γεννιέται και ένα άλλο πεθαίνει. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού P στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$ θα είναι τότε

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP(t), \quad (5)$$

όπου $k > 0$ είναι το ποσοστό γεννήσεων μείον το ποσοστό θανάτων ανά άτομο ανά μονάδα χρόνου.

Δεδομένου ότι το φυσικό περιβάλλον έχει πεπερασμένα αποθέματα τροφής, αναμένουμε ότι μόνο ένας μέγιστος αριθμός ατόμων M θα είναι βιώσιμος. Καθώς ο πληθυσμός προσεγγίζει αυτόν τον **οριακό πληθυσμό** ή **φέρουσα ικανότητα**, τα αποθέματα τροφής ολοένα και σπανίζουν και ο ρυθμός αύξησης k μειώνεται. Η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται από μια απλή σχέση του τύπου

$$k = r(M - P),$$

όπου $r > 0$ είναι μια σταθερά. Βλέπουμε ότι το k μειώνεται καθώς το P κινείται προς το M από μικρότερες τιμές, και ότι το k γίνεται αρνητικό μόλις το P υπερβεί το M . Αντικαθιστώντας $r(M - P)$ όπου k στην Εξίσωση (5) και παίρνοντας το όριο καθώς $\Delta t \rightarrow 0$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση

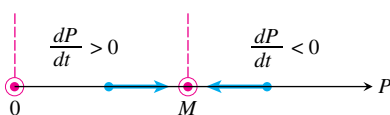
$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2. \quad (6)$$

Η Εξίσωση (6) αποτελεί το μοντέλο της **λογιστικής αύξησης**.

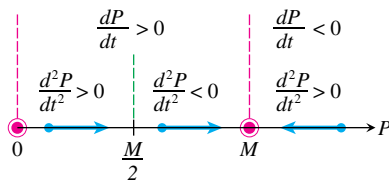
Μπορούμε να προβλέψουμε τη χρονική εξέλιξη του πληθυσμού αναλύοντας την ευθεία φάσεων της Εξίσωσης (6). Οι τιμές ισορροπίας είναι $P = M$ και $P = 0$, και όπως μπορούμε να δούμε θα ισχύει $dP/dt > 0$ για $0 < P < M$ και $dP/dt < 0$ για $P > M$. Οι παρατηρήσεις αυτές αποδίδονται στο Σχήμα 3.39.

Προσδιορίζουμε την κοιλότητα των πληθυσμιακών καμπυλών παραγωγίζοντας την Εξίσωση (6) ως προς t :

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (rMP - rP^2) \\ &= rM \frac{dP}{dt} - 2rP \frac{dP}{dt} \\ &= r(M - 2P) \frac{dP}{dt}. \end{aligned} \quad (7)$$



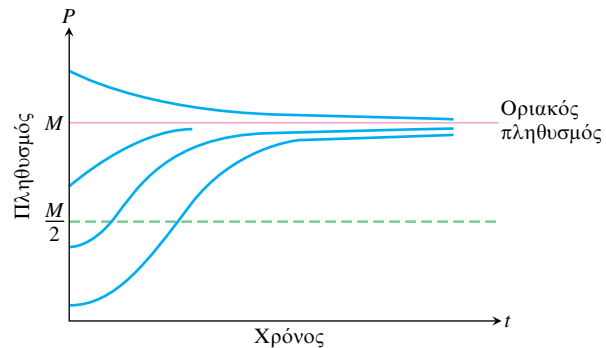
ΣΧΗΜΑ 3.39 Η αρχική ευθεία φάσεων της Εξίσωσης (6).



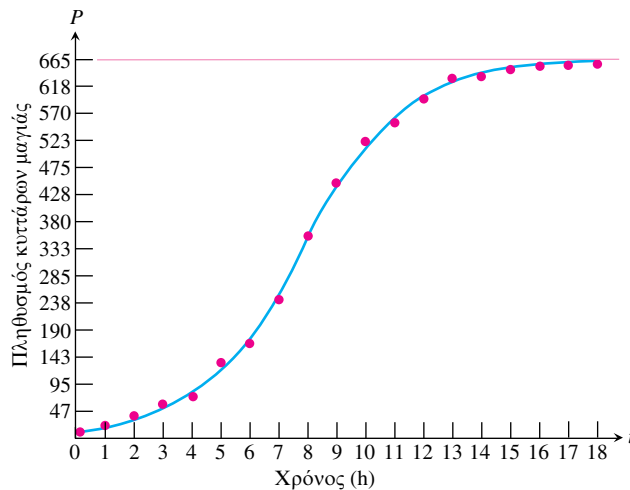
ΣΧΗΜΑ 3.40 Η πλήρης ευθεία φάσεων για τη λογιστική αύξηση. (Εξίσωση (6))

Για $P = M/2$, είναι $d^2P/dt^2 = 0$. Για $P < M/2$, οι ποσότητες $(M - 2P)$ και dP/dt είναι θετικές και $d^2P/dt^2 > 0$. Για $M/2 < P < M$, είναι $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$, και $d^2P/dt^2 < 0$. Για $P > M$, οι ποσότητες $(M - 2P)$ και dP/dt είναι ταυτόχρονα αρνητικές και $d^2P/dt^2 > 0$. Μεταφέρουμε τις πληροφορίες αυτές στην ευθεία φάσεων (Σχήμα 3.40).

Οι ευθείες $P = M/2$ και $P = M$ διαμερίζουν το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου tP σε οριζόντιες ζώνες για καθεμία εκ των οποίων γνωρίζουμε τα πρόσημα των dP/dt και d^2P/dt^2 . Σε κάθε ζώνη, γνωρίζουμε πόσο απότομα ανέρχονται ή κατέρχονται οι καμπύλες λύσεων και πώς κάμπτονται στο πέρασμα του χρόνου. Οι ευθείες ισορροπίας $P = 0$ και $P = M$ αποτελούν πληθυσμιακές καμπύλες (καμπύλες λύσεων). Οι πληθυσμιακές καμπύλες που τέμνουν την ευθεία $P = M/2$ παρουσιάζουν σημείο καμπής στο σημείο τομής, αποκτώντας **σιγμοειδές** σχήμα (είναι δηλαδή λυγισμένες σαν το γράμμα S). Στο Σχήμα 3.41 φαίνονται μερικές αντιπροσωπευτικές τέτοιες καμπύλες. Στο Σχήμα 3.42 φαίνεται η αύξηση του πληθυσμού των κυττάρων μιας καλλιέργειας μαγιάς από εργαστηριακές παρατηρήσεις.



ΣΧΗΜΑ 3.41 Πληθυσμιακές καμπύλες για το Παράδειγμα 5.



ΣΧΗΜΑ 3.42 Λογιστική καμπύλη που δείχνει την αύξηση των κυττάρων μαγιάς σε μια καλλιέργεια. Τα σημεία παριστάνουν εργαστηριακές μετρήσεις και προέρχονται από το άρθρο του R. Pearl, "Growth of Population." *Quart. Rev. Biol.* 2 (1927): 532-548.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.4

Ευθείες φάσεων και καμπύλες λύσεων

Στις Ασκήσεις 1-8,

- (α) Βρείτε τις τιμές ισορροπίας. Ποιες από αυτές αντι-στοιχούν σε ευσταθή και ποιες σε ασταθή ισορροπία;
- (β) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y'' .
- (γ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές καμπύλες λύσεων.
- $\frac{dy}{dx} = (y+2)(y-3)$
 - $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$
 - $\frac{dy}{dx} = y^3 - y$
 - $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$
 - $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$
 - $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$
 - $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$
 - $y' = y^3 - y^2$

Μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης

Οι αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 9-12 αποτελούν μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης. Χρησιμοποιήστε την ευθεία φάσεων σε κάθε άσκηση για να σχεδιάσετε ποιοτικά τις καμπύλες λύσεων του πληθυσμού $P(t)$, επιλέγοντας διάφορες αρχικές τιμές $P(0)$ (όπως στο Παράδειγμα 5). Ποια σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή και ποια ασταθή;

- $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$
- $\frac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$
- $\frac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$
- $\frac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \frac{1}{2}\right)$

13. **Καταστροφική συνέχιση του Παραδείγματος 5** Ένας υγίης πληθυσμός κάποιου είδους ζει σε περιοριστικό περιβάλλον. Η τρέχουσα τιμή του πληθυσμού P_0 πλησιάζει τη φέρουσα ικανότητα M_0 . Φανταστείτε, για παράδειγμα, τον πληθυσμό των ψαριών μιας λίμνης σε μια απόμακρη περιοχή. Ξαφνικά συμβαίνει μια φυσική καταστροφή σαν την έκρηξη του ηφαιστείου της Αγ. Ελένης και το νερό της λίμνης μολύνεται, οπότε χάνεται μεγάλο μέρος των αποθεμάτων τροφής και οξυγόνου που χρειάζονται τα ψάρια. Προκύπτει έτσι ένα νέο οικοσύστημα με φέρουσα ικανότητα M_1 αισθητά μικρότερη της M_0 και πάντως μικρότερη από την απαιτούμενη για τον τρέχοντα πληθυσμό P_0 . Παίρνοντας ως αφετηρία κάποια στιγμή πριν την καταστροφή, σχεδιάστε μια ποιοτική καμπύλη του πληθυσμού έναντι του χρόνου, που να δείχνει πώς προσαρμόζεται ο πληθυσμός των ψαριών στην περιβαλλοντική αλλαγή.

14. **Έλεγχος πληθυσμού** Οι αρχές μιας περιοχής εξετάζουν το ενδεχόμενο έκδοσης κυνηγετικών αδειών ώστε να ελεγχθεί ο πληθυσμός των ελαφιών (ένα ελάφι ανά άδεια). Είναι γνωστό ότι αν ο πληθυσμός των ελαφιών πέσει κάτω από ένα ελάχιστο όριο m , το είδος θα εξαφανιστεί. Είναι γνωστό επίσης ότι αν ο πληθυσμός υπερβεί προς στιγμήν τη φέρουσα ικανότητα M , οι ασθένειες και η έλλειψη τροφής θα τον επαναφέρουν στην οριακή τιμή M .

- (α) Εξετάστε κατά πόσο είναι εύλογο το ακόλουθο μοντέλο του ρυθμού αύξησης του πληθυσμού των

ελαφιών συναρτήσει του χρόνου:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

όπου P ο πληθυσμός των ελαφιών και r μια θετική σταθερά αναλογίας. Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων.

- (β) Εξηγήστε σε τι διαφέρει το μοντέλο αυτό από το λογιστικό μοντέλο $dP/dt = rP(M - P)$. Ποιο από τα δύο είναι καλύτερο;
- (γ) Δείξτε ότι αν $P > M$ για κάθε t , τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M$.
- (δ) Τι συμβαίνει αν $P < m$ για κάθε t ;
- (ε) Συζητήστε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας του μοντέλου; Εξηγήστε την εξάρτηση της οριακής τιμής του πληθυσμού P από τις αρχικές τιμές P . Πόσες περιόδους κυνηγετικές άδειες θα πρέπει να εκδοθούν;

Εφαρμογές και παραδείγματα

15. **Ελεύθερη πτώση** Όταν ένα σώμα μάζας m που αρχικά ηρεμεί αφήνεται να πέσει λόγω βαρύτητας, υφίσταται μια αντίσταση από τον αέρα που είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, οπότε η ταχύτητα του σώματος μετά από t sec ικανοποιεί την εξίσωση

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

όπου k σταθερά που εξαρτάται από τις αεροδυναμικές ιδιότητες του σώματος και την πυκνότητα του αέρα. (Υποθέτουμε ότι η πτώση είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζεται από μεταβολές στην πυκνότητα του αέρα.)

- (α) Σχεδιάστε την ευθεία φάσεων της εξίσωσης.
- (β) Σχεδιάστε ποιοτικά μια αντιπροσωπευτική καμπύλη ταχύτητας.
- (γ) Για έναν αλεξιπτωτιστή που πέφτει ελεύθερα (προτού ανοίξει το αλεξίπτωτο) και έχει βάρος 70 kg ($mg = 686$), μια τυπική τιμή του k είναι 0,24 (χρόνος σε sec και απόσταση σε m). Ποια είναι η τελική του ταχύτητα;

16. **Αντίσταση ανάλογη του $\sqrt{v}$** Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα και προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα v_0 . Υποθέστε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της ταχύτητας και βρείτε την τελική ταχύτητα με γραφική ανάλυση.

17. **Ιστιοπλοΐα** Ένα ιστιοφόρο ακολουθεί ευθεία πορεία, με τον άνεμο να δημιουργεί μια σταθερή δύναμη πρόσωσης μέτρου 25 N. Η μόνη άλλη δύναμη που δρα στο ιστιοφόρο είναι η αντίσταση από το νερό κατά την κίνησή του. Η δύναμη αντίστασης έχει μέτρο που ισούται με το πενταπλάσιο της ταχύτητας του ιστιοφόρου· η αρχική ταχύτητα είναι 1 m/sec. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα σε m ανά sec που μπορεί να αναπτύξει το σκάφος με τέτοιο άνεμο;

18. **Διάδοση πληροφορίας** Οι κοινωνιολόγοι κάνουν λόγο για ένα φαινόμενο που αποκαλούν **κοινωνική διάχυση**: πρόκειται για τη διάδοση στον πληθυσμό κάποιας πληροφορίας, π.χ. μιας τεχνολογικής καινοτομίας, ή μιας νέας μόδας. Ο πληθυσμός μπορεί να χωριστεί σε δύο κατηγορίες: σε αυτούς που κατέχουν ήδη την πληροφορία και στους υπόλοιπους. Σε έναν δεδομένο σταθερό πληθυσμό είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός διαχύσεως είναι ανάλογος του αριθμού των κατεχόντων την πληροφορία επί τον αριθμό των μη κατεχόντων. Αν X είναι το πλήθος των ατόμων που έχουν λάβει την πληροφορία σε συνολικό πληθυσμό N , τότε το μαθηματικό μοντέλο της κοινωνικής διάχυσης δίδεται από την εξίσωση

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X),$$

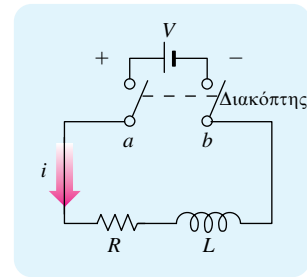
όπου t ο χρόνος σε ημέρες και k μια θετική σταθερά.

- (α) Συζητήστε πόσο εύλογο θεωρείτε το μοντέλο.
 (β) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων αναγράφοντας τα πρόσημα των X' και X'' .
 (γ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων.
 (δ) Προβλέψτε την τιμή X της ταχύτερης διάδοσης της πληροφορίας. Πόσα άτομα τελικά λαμβάνουν την πληροφορία;
19. **Ρεύμα σε κύκλωμα RL** Το παρατιθέμενο σχήμα παριστάνει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με σταθερή ολική αντίσταση $R \, \Omega$ και σταθερή αυτεπαγωγή (πηνίο) L Henry. Ένας διακόπτης στις θέσεις a και b επιτρέπει τη σύνδεση με ηλεκτρική πηγή V Volt.

Ο νόμος του Ohm, $V = Ri$, θα πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να ληφθεί υπ' όψιν η αυτεπαγωγή. Η τροποποιημένη μορφή είναι

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V,$$

όπου i η ένταση του ρεύματος σε Ampère και t ο χρόνος σε sec. Επιλύοντας την εξίσωση αυτή μπορούμε να βρούμε το ρεύμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Χρησιμοποιώντας την ευθεία φάσεων σχεδιάστε ποιοτικά την καμπύλη λύσεως δεδομένου ότι κλείνουμε τον διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 0$. Πόσο γίνεται το ρεύμα για $t \rightarrow \infty$; Η τιμή αυτή καλείται **λύση χρονοανεξάρτητης κατάστασης**.

20. **Μαργαριτάρι σε σαμπουάν** Υποθέστε ότι ένα μαργαριτάρι βυθίζεται σε παχύρρευστο υγρό (π.χ. σαμπουάν) και υφίσταται μια δύναμη αντίστασης λόγω τριβών ανάλογη της ταχύτητάς του. Υποθέστε ακόμη ότι υπάρχει μια δύναμη άνωσης που επίσης δρα ενάντια στη βύθιση. Σύμφωνα με την **αρχή του Αρχιμήδη**, η άνωση ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το μαργαριτάρι. Αν m η μάζα του μαργαριταριού και P η εκτοπιζόμενη μάζα του υγρού, ακολουθήστε τις παρακάτω υποδείξεις:
- (α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δρουν στο μαργαριτάρι καθώς αυτό βυθίζεται, όπως κάναμε στο Σχήμα 3.35.
 (β) Αν $v(t)$ είναι η ταχύτητα του μαργαριταριού συνάρτησε του χρόνου t , γράψτε τη διαφορική εξίσωση-μοντέλο της ταχύτητας βύθισης του μαργαριταριού.
 (γ) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων αναγράφοντας τα πρόσημα των v' και v'' .
 (δ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες λύσεων.
 (ε) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του μαργαριταριού;

3.5

Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση

Παραδείγματα από το εμπόριο και τη βιομηχανία • Παραδείγματα από τα μαθηματικά και τη φυσική • Η αρχή του Fermat και ο νόμος του Snell • Παραδείγματα από τα οικονομικά • Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ως μοντέλα διάκριτων φαινομένων

Βελτιστοποίηση κάποιου μεγέθους σημαίνει μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση κάποιας από τις παραμέτρους του. Ποιο το επίπεδο παραγωγής που εξασφαλίζει μέγιστο κέρδος; Ποιο είναι το ελάχιστου κόστους σχήμα ενός δοχείου λαδιού; Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει ένα δοκάρι που παράγεται από κορμό διαμέτρου 12 cm για να παρουσιάζει μέγιστη δυσκαμψία; Στα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε προβλήματα που μας ενδιαφέρουν, η απάντηση σε ερωτήματα σαν αυτά που μόλις διατυπώθηκαν περιλαμβάνει συνήθως την εύρεση μιας ελάχιστης ή μιας μέγιστης τιμής κάποιας συναρτήσεως.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας επιπλοποιός χρησιμοποιεί εξωτικά υλικά για να κατασκευάσει έπιπλα κατά παραγγελία. Πρέπει να παράγει 5 κομμάτια την ημέρα, που είναι και η μέγιστη ημερήσια παραγωγή που μπορεί να φέρει εις πέρας. Για κάθε εξωτικό υλικό που χρησιμοποιεί, πρέπει να καθορίσει την ποσότητα και την συχνότητα των παραγγελιών του. Για κάθε παραγγελία που κάνει πληρώνει ένα πάγιο κόστος παράδοσης, ανεξαρτήτως της ποσότητας που παραλαμβάνει. Μπορεί να νοικιάσει όσο χώρο αποθήκευσης χρειαστεί μέχρι να καταναλώσει την εκάστοτε ποσότητα που παραλαμβάνει. Σκέφτεται λοιπόν ότι αν το κόστος παράδοσης ενός υλικού είναι υψηλό και το κόστος αποθήκευσης χαμηλό, θα πρέπει να παραγγέλνει σπάνια και σε μεγάλες ποσότητες κάθε φορά. Από την άλλη, αν το κόστος παράδοσης είναι χαμηλό και το κόστος αποθήκευσης υψηλό, τότε συμφέρει περισσότερο να παραγγέλνει συχνότερα και σε μικρότερες ποσότητες. Αλλά ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος παράδοσης και αποθήκευσης για κάθε υλικό; Σε αυτή την ενότητα απαντούμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα.

Παραδείγματα από το εμπόριο και τη βιομηχανία

Παράδειγμα 1 Κατασκευή κουτιού

Ένα κουτί ανοιχτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετράγωνο φύλλο κασσίτερου, διαστάσεων 12×12 cm, αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει μέγιστη χωρητικότητα το κουτί;

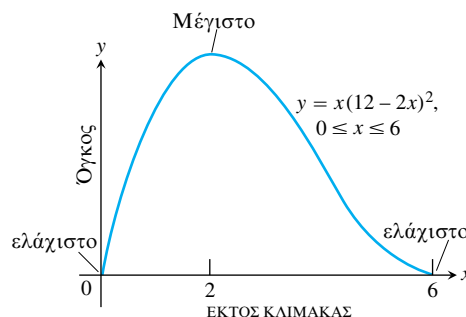
Λύση Στο Σχήμα 3.43 τα αποκοπτόμενα τετράγωνα έχουν μήκος πλευράς x cm. Ο όγκος λοιπόν του κουτιού είναι συνάρτηση του x :

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3.$$

Εφόσον οι πλευρές του φύλλου κασσίτερου έχουν μήκος 12 cm, θα έχουμε $x \leq 6$ και πεδίο ορισμού του V θα είναι το διάστημα $0 \leq x \leq 6$.

Από τη γραφική παράσταση του V (Σχήμα 3.44) βλέπουμε ότι προκύπτει ελάχιστη τιμή 0 για $x = 0$ και $x = 6$, και μέγιστη τιμή περίπου για $x = 2$. Εξετάζουμε την πρώτη παράγωγο του V ως προς x :

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$



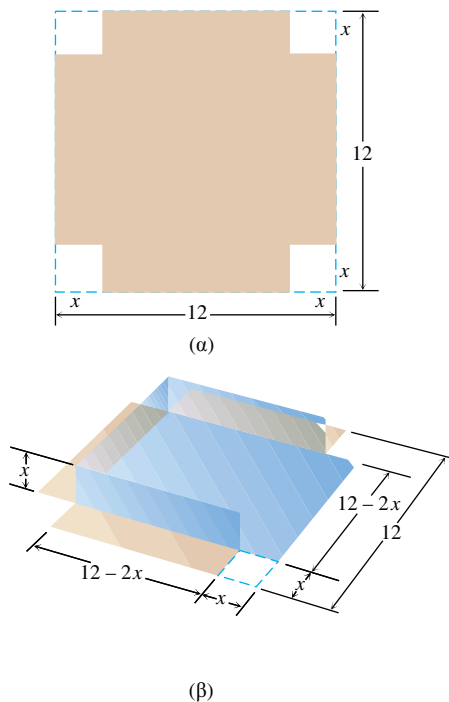
ΣΧΗΜΑ 3.44 Ο όγκος του κουτιού στο Σχήμα 3.43, συνάρτησής του x .

Από τις δύο ρίζες της παραγώγου, $x = 2$ και $x = 6$, μόνο το σημείο $x = 2$ είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συνάρτησεως και αποτελεί συνεπώς κρίσιμο σημείο. Ο όγκος V παίρνει τις ακόλουθες τιμές στο κρίσιμο αυτό σημείο και στα άκρα του πεδίου ορισμού:

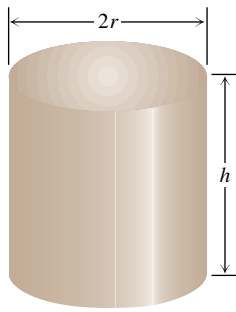
$$\text{Τιμή στο κρίσιμο σημείο: } V(2) = 128$$

$$\text{Τιμές στα άκρα: } V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$$

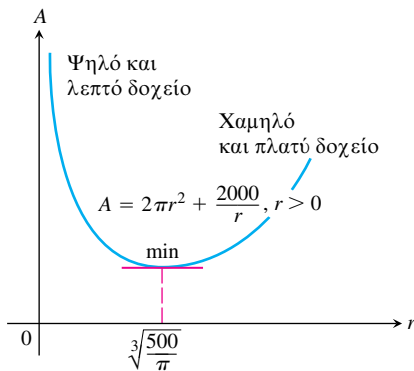
Ο μέγιστος όγκος είναι 128 cm^3 . Έτσι τα αποκοπτόμενα τετράγωνα θα πρέπει να έχουν μήκος πλευράς 2 cm.



ΣΧΗΜΑ 3.43 Αν αποκόψουμε τις γωνίες ενός τετραγωνικού φύλλου κασσίτερου και το διπλώσουμε κατάλληλα, φτιάχνουμε ένα ανοιχτό κουτί. (Παράδειγμα 1)



ΣΧΗΜΑ 3.45 Αυτό το δοχείο του 1 L απαιτεί την ελάχιστη ποσότητα υλικού για $h = 2r$. (Παράδειγμα 2)



ΣΧΗΜΑ 3.46 Η γραφική παράσταση της $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Παράδειγμα 2 Σχεδίαση δοχείου λαδιού

Πρόκειται να σχεδιάσετε ένα δοχείο λαδιού χωρητικότητας 1 L και κυλινδρικού σχήματος (Σχήμα 3.45). Τι διαστάσεις πρέπει να έχει ώστε να καταναλωθεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του;

Λύση

Όγκος δοχείου: Αν τα r και h μετρώνται σε cm, τότε ο όγκος του δοχείου σε κυβικά εκατοστά ισούται με

$$\pi r^2 h = 1000. \quad 1 \text{ λίτρο} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\text{Εμβαδόν επιφάνειας δοχείου: } A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{κυκλικές βάσεις}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{πλευρικό τοίχωμα}}$$

Τι σημαίνει «ελάχιστο υλικό»; Μία σκέψη είναι να αγνοήσουμε το πάχος του υλικού, καθώς και τα τετράγωνα κομμάτια που πάνε χαμένα κατά την παραγωγή, και να υπολογίσουμε για ποιες τιμές των r και h θα γίνει ελάχιστη η συνολική επιφάνεια, υπό τον προφανή πάντα περιορισμό ότι $\pi r^2 h = 1000$. (Στην Άσκηση 15 εξετάζεται ένας τρόπος να ληφθεί υπ' όψιν και η απώλεια των αποκοπόμενων τετραγώνων.)

Μοντέλο

Προκειμένου να εκφράσουμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας συναρτήσει μίας μεταβλητής, λύνουμε την $\pi r^2 h = 1000$ ως προς τη μία μεταβλητή και αντικαθιστούμε στον τύπο του εμβαδού. Η αντικατάσταση του h είναι ευκολότερη:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Αναλυτική επίλυση

Σκοπός μας είναι να βρούμε μια τιμή του $r > 0$ που ελαχιστοποιεί το εμβαδόν A . Το Σχήμα 3.46 μας πείθει ότι τέτοια τιμή όντως υπάρχει.

Από την καμπύλη του γραφήματος αξίζει να προσέξετε ότι για μικρό r (ψηλό και λεπτό δοχείο, στο σχήμα αγωγού), υπερσχύει ο όρος $2000/r$ και το εμβαδόν A είναι μεγάλο. Για μεγάλο r (χαμηλό και πλατύ δοχείο, σαν τηγάνι), υπερσχύει ο όρος $2\pi r^2$ και το εμβαδόν παίρνει και πάλι μεγάλες τιμές.

Εφόσον η συνάρτηση εμβαδού A είναι διαφορίσιμη για $r > 0$, δηλαδή σε διάστημα όπου δεν υπάρχουν άκρα, η μόνη δυνατή τιμή ελαχίστου θα προκύπτει στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \quad \text{Θέτουμε } dA/dr = 0.$$

$$4\pi r^3 = 2000 \quad \text{Πολλαπλασιάζουμε με } r^2.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \quad \text{Λύνουμε ως προς } r.$$

Κάτι λοιπόν συμβαίνει για $r = \sqrt[3]{500/\pi}$, αλλά τι;

Αν το πεδίο ορισμού του A ήταν ένα κλειστό διάστημα, θα απα-
ντούσαμε στο ερώτημα αυτό υπολογίζοντας το A στο κρίσιμο σημείο
και στα άκρα, και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα. Αλλά το πεδίο
ορισμού είναι ένα ανοιχτό διάστημα, κι έτσι θα πρέπει να αποταν-
θούμε στη γραφική παράσταση για να βρούμε τι συμβαίνει στο ση-
μείο $r = \sqrt[3]{500/\pi}$. Η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού του A . Δηλαδή η γραφική πα-
ράσταση είναι κυρτή καμπύλη (κοίλα άνω) και η τιμή του A για $r =$
 $\sqrt[3]{500/\pi}$ είναι λοιπόν ένα ολικό ελάχιστο.

Μετά από λίγες απλές αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε ότι η
αντίστοιχη τιμή του h είναι

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Ερμηνεία

Το δοχείο χωρητικότητας 1 L που απαιτεί το ελάχιστο υλικό για την
κατασκευή του έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο, όπου $r \approx 5,42$ cm και
 $h \approx 10,84$ cm.

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Marin Mersenne
(1588-1648)

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων ελάχιστων-μέγιστων τιμών

- Βήμα 1. *Κατανοούμε το πρόβλημα* Διαβάζουμε προσεκτικά την εκφώνηση του προβλήματος. Εντοπίζουμε ποιες πληροφορίες μας χρειάζονται για την επίλυση. Ποιοι είναι οι άγνωστοι; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι τα ζητούμενα;
- Βήμα 2. *Κατασκευάζουμε ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος* Σχεδιάζουμε σχήματα όπου καταγράφουμε όποια στοιχεία έχουν σημασία για το πρόβλημα. Ορίζουμε μια συνάρτηση η οποία παριστά την ποσότητα που πρόκειται να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί, και γράφουμε τη μαθηματική της έκφραση.
- Βήμα 3. *Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως* Προσδιορίζουμε ποιες τιμές της συναρτήσεως έχουν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση αν είναι δυνατόν.
- Βήμα 4. *Εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του πεδίου ορισμού* Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού ή μη ύπαρξης της παραγώγου, αξιοποιώντας όποιες γνώσεις του σχήματος του γραφήματος και της φυσικής του προβλήματος διαθέτουμε. Χρησιμοποιούμε πρώτες και δεύτερες παραγώγους για να εντοπίσουμε και να χαρακτηρίσουμε κρίσιμα σημεία (όπου είτε $f' = 0$ είτε δεν υπάρχει η παράγωγος).
- Βήμα 5. *Λύνουμε το μαθηματικό μοντέλο* Αν δεν είμαστε βέβαιοι για τη λύση μας, την επαληθεύουμε με κάποια άλλη μέθοδο.
- Βήμα 6. *Ερμηνεύουμε τη λύση* Ερμηνεύουμε τη μαθηματική μας λύση στο πλαίσιο του υπό εξέταση προβλήματος και κρίνουμε αν είναι εύλογη ή όχι.

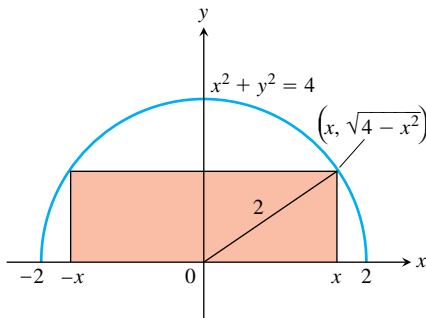
Παραδείγματα από τα μαθηματικά και τη φυσική

Παράδειγμα 3 Εγγεγραμμένο ορθογώνιο

Θέλουμε να εγγράψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ημικύκλιο ακτίνας 2. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου, και ποιες οι διαστάσεις του;

Λύση

Μοντέλο



ΣΧΗΜΑ 3.47 Το ορθογώνιο και το ημικύκλιο του Παραδείγματος 3.

Έστω $(x, \sqrt{4 - x^2})$ οι συντεταγμένες των κορυφών του εγγεγραμμένου στο ημικύκλιο ορθογωνίου (Σχήμα 3.47). Το μήκος, το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου μπορούν στην περίπτωση αυτή να γραφούν συναρτήσει της θέσης x της κάτω δεξιά κορυφής:

Μήκος: $2x$, Πλάτος: $\sqrt{4 - x^2}$, Εμβαδόν: $2x \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

Σημειώνουμε ότι το x παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \leq x \leq 2$.

Ζητάμε λοιπόν να βρούμε το ολικό μέγιστο της συνεχούς συναρτήσεως

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

στο πεδίο ορισμού $[0, 2]$.

Ταυτοποίηση κρίσιμων και ακραίων σημείων

Η παράγωγος

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

δεν ορίζεται για $x = 2$ και μηδενίζεται όταν

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4 - x^2) &= 0 && \text{Πολλαπλασιάζουμε} \\ 8 - 4x^2 &= 0 && \text{κατά μέλη με } \sqrt{4 - x^2}. \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Από τις δύο αυτές ρίζες, $x = \sqrt{2}$ και $x = -\sqrt{2}$, μόνο η $x = \sqrt{2}$ είναι εσωτερική του πεδίου ορισμού του A και συνεπώς αποτελεί κρίσιμο σημείο. Οι τιμές του A στα άκρα και στο κρίσιμο αυτό σημείο είναι

Τιμή στο κρίσιμο σημείο: $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$

Τιμές στα άκρα: $A(0) = 0$, $A(2) = 0$.

Ερμηνεία

Το εμβαδόν έχει μέγιστη τιμή 4 όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ και πλάτος $2x = 2\sqrt{2}$.

Η αρχή του Fermat και ο νόμος του Snell

Η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και συνήθως μειώνεται καθώς το μέσο γίνεται πυκνότερο. Στο κενό, το φως ταξιδεύει με $c = 3 \times 10^8$ m/sec, αλλά στη γήινη ατμόσφαιρα η ταχύτητά του είναι μικρότερη, και στο γυαλί ακόμα μικρότερη (περίπου δύο τρίτα της τιμής στο κενό).

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat στην οπτική, το φως ταξιδεύει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο επιλέγοντας πάντα τη συντομότερη

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Willebrod Snell
van Royen
(1580-1626)

διαδρομή (ελαχίστου χρόνου). Η παρατήρηση αυτή μάς επιτρέπει να προβλέψουμε την πορεία του φωτός κατά τη διέλευσή του από ένα μέσο διάδοσης (π.χ. αέρα) σε ένα άλλο μέσο (π.χ. γυαλί ή νερό).

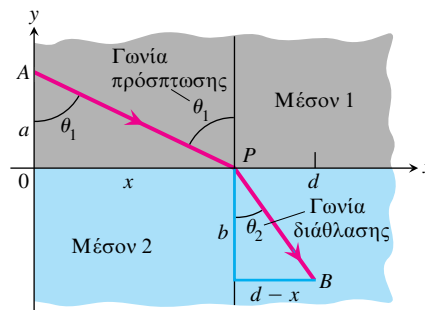
Παράδειγμα 4 Εύρεση πορείας φωτεινής ακτίνας

Να βρεθεί η πορεία που θα ακολουθήσει μια φωτεινή ακτίνα από σημείο A ενός μέσου με ταχύτητα διάδοσης c_1 σε σημείο B ενός άλλου μέσου ταχύτητας διάδοσης c_2 . Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων είναι λεία.

Λύση Εφόσον η διαδρομή από το A στο B θα είναι η συντομότερη, αναζητούμε μια διαδρομή που θα ελαχιστοποιήσει τον χρόνο.

Μοντέλο

Θεωρούμε ότι τα A και B βρίσκονται στο επίπεδο xy και ότι η διαχωριστική ευθεία των δύο μέσων είναι ο άξονας x (Σχήμα 3.48).



ΣΧΗΜΑ 3.48 Μια φωτεινή ακτίνα διαθλάται (αποκλίνει) από την αρχική της πορεία) καθώς περνά τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων. (Παράδειγμα 4)

Σε ένα ομοιόμορφο μέσο διάδοσης, όπου η ταχύτητα του φωτός παραμένει σταθερή, «ελάχιστος χρόνος» σημαίνει «ελάχιστη διαδρομή» και άρα η ακτίνα κινείται σε μια ευθεία. Συνεπώς η διαδρομή από το A στο B θα απαρτίζεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το A με κάποιο σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας P , και από ένα δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των P και B . Από τον τύπο της ταχύτητας, έχουμε

$$\text{Χρόνος} = \text{απόσταση} / \text{ταχύτητα}.$$

Ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδρομή από το A στο P είναι λοιπόν

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

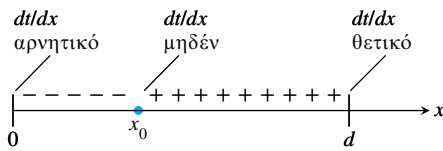
Ομοίως, από το P στο B απαιτείται χρόνος

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}.$$

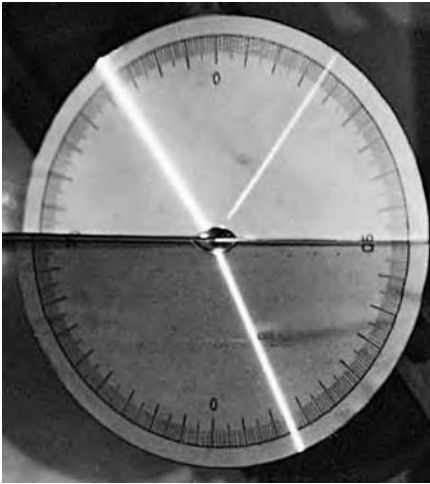
Ο χρόνος από το A στο B είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}.$$

Στην εξίσωση αυτή, ο χρόνος t έχει εκφραστεί ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x στο πεδίο ορισμού $[0, d]$. Ζητάμε το ολικό ελάχιστο του t σε αυτό το κλειστό διάστημα.



ΣΧΗΜΑ 3.49 Τα πρόσημα της παραγώγου dt/dx για το Παράδειγμα 4.



ΣΧΗΜΑ 3.50 Για αέρα και νερό σε θερμοκρασία δωματίου, ο λόγος των ταχυτήτων του φωτός είναι 1,33 και ο νόμος του Snell γίνεται $\sin \theta_1 = 1,33 \sin \theta_2$. Σε αυτή την εργαστηριακή φωτογραφία, $\theta_1 = 35,5^\circ$, $\theta_2 = 26^\circ$ και $(\sin 35,5^\circ / \sin 26^\circ) \approx 0,581/0,438 \approx 1,33$, όπως προβλέπει η θεωρία.

Η ισότητα μεταξύ των γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι στη φωτογραφία εμφανής. (Άσκηση 40)

Ταυτοποίηση κρίσιμων και ακραίων σημείων

Βρίσκουμε

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}. \quad (1)$$

Εκφράζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα συναρτήσει των γωνιών θ_1 και θ_2 του Σχήματος 3.48,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_1}{c_1} - \frac{\sin \theta_2}{c_2}.$$

Όπως βλέπουμε από την Εξίσωση (1), $dt/dx < 0$ για $x = 0$ και $dt/dx > 0$ για $x = d$. Συνεπώς, θα ισχύει $dt/dx = 0$ για κάποιο x_0 ενδιάμεσα (Σχήμα 3.49). Τέτοιο σημείο υπάρχει μόνο ένα, διότι η dt/dx είναι αύξουσα συνάρτηση του x (Άσκηση 58). Στο σημείο αυτό λοιπόν,

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ο **νόμος του Snell** ή αλλιώς ο **νόμος της διάθλασης**.

Ερμηνεία

Συμπεραίνουμε ότι η φωτεινή ακτίνα ακολουθεί τη διαδρομή που περιγράφεται από τον νόμο του Snell. Το Σχήμα 3.50 δείχνει τη διάθλαση μεταξύ αέρα και νερού.

Παραδείγματα από τα οικονομικά

Θέλουμε να αναδείξουμε άλλες δύο περιοχές χρησιμότητας του απειροστικού λογισμού στην οικονομική θεωρία. Η πρώτη εξ αυτών έχει να κάνει με τη μεγιστοποίηση του κέρδους· η δεύτερη με την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους.

Έστω

$r(x)$ = το εισόδημα από την πώληση x προϊόντων

$c(x)$ = το κόστος παραγωγής x προϊόντων

$p(x) = r(x) - c(x)$ = το κέρδος από την πώληση x προϊόντων.

Το **οριακό εισόδημα**, το **οριακό κόστος** και το **οριακό κέρδος** για τη συγκεκριμένη ποσότητα παραγωγής (x προϊόντα) είναι, αντίστοιχα,

$$\frac{dr}{dx} = \text{οριακό εισόδημα}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{οριακό κόστος}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{οριακό κέρδος}.$$

Η πρώτη παρατήρηση αφορά τη σχέση του p με τις παραγώγους αυτές.

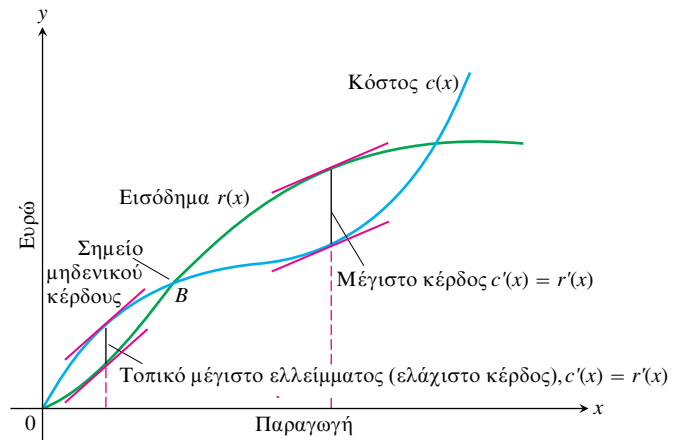
Θεώρημα 6 Μέγιστο κέρδος

Όταν η παραγωγή αποδίδει μέγιστο κέρδος, το οριακό εισόδημα ισούται με το οριακό κόστος.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι οι $r(x)$ και $c(x)$ είναι διαφορίσιμες για κάθε $x > 0$, οπότε αν η $p(x) = r(x) - c(x)$ εμφανίζει μέγιστο, αυτό προκύπτει για $p'(x) = 0$. Εφόσον $p'(x) = r'(x) - c'(x)$, η πρόταση $p'(x) = 0$ σημαίνει ότι

$$r'(x) - c'(x) = 0 \quad \text{ή} \quad r'(x) = c'(x).$$

Το Σχήμα 3.51 διασαφηνίζει περαιτέρω την κατάσταση.



ΣΧΗΜΑ 3.51 Η γραφική παράσταση μιας τυπικής συνάρτησης κόστους ξεκινά όντας κοίλη (κοίλα κάτω) και εν συνεχεία γίνεται κυρτή (κοίλα άνω). Τέμνει την καμπύλη εισοδήματος στο σημείο μηδενικού κέρδους B . Στα αριστερά του B , η επιχείρηση παρουσιάζει έλλειμμα. Στα δεξιά του B , παρουσιάζει πλεόνασμα και το μέγιστο κέρδος προκύπτει για $c'(x) = r'(x)$. Ακόμα δεξιότερα, το κόστος υπερβαίνει πάλι το εισόδημα (ενδεχομένως λόγω αύξησης κόστους εργατικών και υλικών, αλλά και λόγω κορεσμού της αγοράς) και η παραγωγή γίνεται πάλι ασύμφορη.

Τι πρακτικά συμπεράσματα εξάγουμε παρατηρώντας το σχήμα αυτό; Γνωρίζουμε ότι αν για κάποιο επίπεδο παραγωγής ικανοποιείται η σχέση $p'(x) = 0$, το κέρδος δεν μεγιστοποιείται απαραίτητως· μπορεί να ελαχιστοποιείται, για παράδειγμα. Παρ' όλα αυτά, όταν μελετούμε τα οικονομικά μιας επιχείρησης, μας ενδιαφέρουν τα επίπεδα παραγωγής στα οποία το οριακό κόστος ισούται με το οριακό εισόδημα. Μόνο για τέτοια επίπεδα παραγωγής μπορεί να υπάρχει μέγιστο κέρδος.

Παράδειγμα 5 Μεγιστοποίηση κέρδους

Έστω ότι $r(x) = 9x$ και $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, όπου το επίπεδο παραγωγής x μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Υπάρχει κάποιο επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος, κι αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Λύση Έχουμε $r'(x) = 9$ και $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \quad \text{Θέτουμε } c'(x) = r'(x).$$

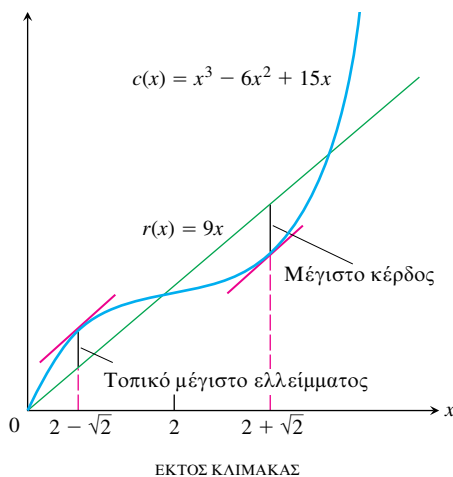
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Οι δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414.$$

Τα πιθανά επίπεδα παραγωγής για μέγιστο κέρδος είναι $x \approx 0,586$ χιλιάδες τεμάχια και $x \approx 3,414$ χιλιάδες τεμάχια. Όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 3.52, το μέγιστο κέρδος προκύπτει περίπου για $x = 3,414$ (όπου το εισόδημα υπερβαίνει το κόστος) ενώ το μέγιστο έλλειμμα προκύπτει περίπου για $x = 0,586$.



ΣΧΗΜΑ 3.52 Οι καμπύλες κόστους και εισοδήματος για το Παράδειγμα 5.

Παράδειγμα 6 Ελαχιστοποίηση κόστους

Στην εισαγωγή της ενότητας αυτής κάναμε λόγο για τον επιπλοποιό που χρησιμοποιεί πρώτες ύλες για να κατασκευάσει 5 έπιπλα ημερησίως. Έστω ότι κάθε παράδοση μιας δεδομένης πρώτης ύλης τού στοιχίζει 5000 €, ενώ το ημερήσιο κόστος αποθήκευσης είναι 10 € ανά μονάδα, όπου ως μονάδα θεωρούμε την ποσότητα υλικού που χρειάζεται για ένα έπιπλο. Πόσο υλικό πρέπει να παραγγέλνει και κάθε πότε, ούτως ώστε να ελαχιστοποιήσει το μέσο ημερήσιο κόστος κάθε κύκλου παραγωγής;

Λύση**Μοντέλο**

Αν κάθε x ημέρες γίνεται μία παράδοση, τότε ο επιπλοποιός πρέπει να παραγγείλει $5x$ μονάδες ώστε να του φτάσει η πρώτη ύλη για τον συγκεκριμένο κύκλο παράδοσης. Ως μέση ποσότητα που βρίσκεται στην αποθήκη ανά κύκλο μπορούμε να πάρουμε το ήμισυ της παραληφθείσας ποσότητας, δηλαδή $5x/2$. Συνεπώς, το κόστος παράδοσης και αποθήκευσης ανά κύκλο θα ισούται περίπου με

Κόστος ανά κύκλο = κόστος παράδοσης + κόστος αποθήκευσης

$$\text{Κόστος ανά κύκλο} = \underbrace{5000}_{\text{κόστος παράδοσης}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\text{μέση ποσότητα που αποθηκεύεται}} \cdot \underbrace{x}_{\text{αριθμ. ημερών αποθήκευσης}} \cdot \underbrace{10}_{\text{ημερήσιο κόστος αποθήκευσης}}$$

Υπολογίζουμε το μέσο ημερήσιο κόστος $c(x)$ διαιρώντας το κόστος ανά κύκλο με τον αριθμό ημερών x σε έναν κύκλο (δείτε το Σχήμα 3.53).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \quad x > 0.$$

Για $x \rightarrow 0$ ή $x \rightarrow \infty$, το μέσο ημερήσιο κόστος είναι μεγάλο. Είναι εύλογο λοιπόν να περιμένουμε ένα ελάχιστο κάπου, αλλά πού; Ο σκοπός μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε για ποιον αριθμό ημερών x μεταξύ δυο διαδοχικών παραδόσεων ελαχιστοποιείται (ολικά) το κόστος.

Ταυτοποίηση κρίσιμων σημείων

Εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία προσδιορίζοντας τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου:

$$\begin{aligned} c'(x) &= -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0 \\ x &= \pm\sqrt{200} \approx \pm 14,14. \end{aligned}$$

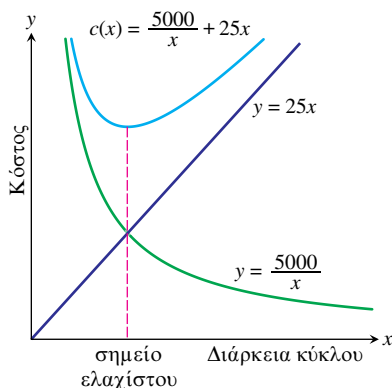
Από τα δύο κρίσιμα σημεία, μόνο το $\sqrt{200}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $c(x)$. Η αντίστοιχη τιμή του μέσου ημερήσιου κόστους είναι τότε

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx 707,11 \text{ €}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $c(x)$ είναι ορισμένη στο ανοιχτό διάστημα $(0, \infty)$ με $c''(x) = 10000/x^3 > 0$. Έτσι, υπάρχει ένα ολικό ελάχιστο για $x = \sqrt{200} \approx 14,14$ ημέρες.

Ερμηνεία

Ο επιπλοποιός θα πρέπει να προγραμματίσει παράδοση ποσότητας $5(14) = 70$ μονάδων της συγκεκριμένης πρώτης ύλης κάθε 14 ημέρες.



ΣΧΗΜΑ 3.53 Το μέσο ημερήσιο κόστος $c(x)$ είναι το άθροισμα μιας υπερβολής και μιας γραμμικής συνάρτησης. (Παράδειγμα 6)

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ως μοντέλα διάκριτων φαινομένων

Αν σας έχει δημιουργηθεί η απορία πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $c(x)$ και $r(x)$ για την περιγραφή του κόστους και του εισοδήματος, αντίστοιχα, που προκύπτουν από την παραγωγή x τεμαχίων, όπου x ακέραιος αριθμός, ιδού το σκεπτικό.

Για μεγάλα x , μπορούμε εύλογα να περιγράψουμε το κόστος και το εισόδημα με τις λείες καμπύλες $c(x)$ και $r(x)$, ορισμένες όχι μόνο για ακέραιες αλλά και για ενδιάμεσες τιμές του x . Έχοντας στη διάθεσή μας αυτές τις διαφορίσιμες συναρτήσεις, που υποτίθεται ότι εκφράζουν το κόστος και το εισόδημα για ακέραιο x , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απειροστικό λογισμό και να εξαγάγουμε διάφορα συμπεράσματα για τις τιμές τους. Στη συνέχεια, «μεταφράζουμε» τα μαθηματικά αποτελέσματα σε πορίσματα που αφορούν τον πραγματικό κόσμο, ελπίζοντας ότι αυτά θα έχουν κάτι χρήσιμο να μας διδάξουν. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, όπως στα παραδείγματα της θεωρίας των οικονομικών που μόλις είδαμε, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις αποτελούν ένα καλό μοντέλο της πραγματικότητας.

Τι κάνουμε όταν η βέλτιστη λύση προκύπτει για τιμή του x που δεν είναι ακέραια; Στο Παράδειγμα 6, εάν ο αριθμός των ημερών μεταξύ παραδόσεων πρέπει να είναι ακέραιος και οι πρώτες ύλες να διακινούνται και να αποθηκεύονται σε παρτίδες, θα πρέπει να στρογγυλοποιήσουμε τις απαντήσεις μας. Η στρογγυλοποίηση πρέπει να γίνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω; Με άλλα λόγια, πόσο *ευαίσθητη* είναι η μεταβολή του κόστους σε μια μικρή αύξηση ή ελάττωση του χρόνου μεταξύ δυο διαδοχικών παραδόσεων;

Παράδειγμα 7 Ευαισθησία του ελάχιστου κόστους

Αφού βρήκαμε τη μαθηματική λύση στο Παράδειγμα 6, πρέπει να τη στρογγυλοποιήσουμε προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Λύση

Αν στρογγυλοποιήσουμε από 14,14 στις 14 ημέρες, το μέσο ημερήσιο κόστος θα αυξηθεί κατά περίπου 0,03 €:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25(14) = 707,14 \text{ €}$$

και

$$c(14) - c(14,14) = 707,14 \text{ €} - 707,11 \text{ €} = 0,03 \text{ €}.$$

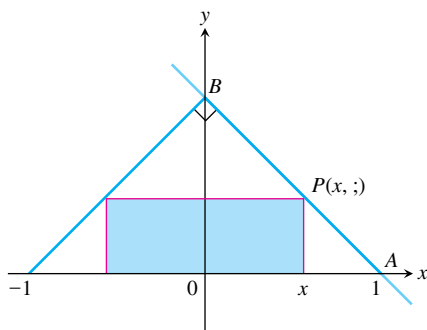
Από την άλλη, $c(15) = 708,33 \text{ €}$, κι έτσι το κόστος θα αυξηθεί $708,33 - 707,11 = 1,22 \text{ €}$ αν στρογγυλοποιήσουμε προς τα πάνω. Άρα εδώ είναι συμφερότερο να στρογγυλοποιήσουμε το x προς τα κάτω, στις 14 ημέρες. Στην Άσκηση 49, θα σας ζητηθεί να εξαγάγετε έναν γενικό τύπο για τη βέλτιστη χρονική διάρκεια μεταξύ παραδόσεων, όταν δίδονται τα κόστη παράδοσης και αποθήκευσης μιας πρώτης ύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.5

Όποτε μεγιστοποιείτε ή ελαχιστοποιείτε μια συνάρτηση μίας μεταβλητής, είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα κατάλληλο για το πρόβλημα που σας ενδιαφέρει. Το γράφημα θα σας δώσει μια καλή αίσθηση του πού να ψάξετε για τα ακρότατα προτού αρχίσετε τους υπολογισμούς· αλλά και μετά από αυτούς, θα αποτελέσει ένα οπτικό πλαίσιο ερμηνείας των αποτελεσμάτων σας.

Γεωμετρικές εφαρμογές

- Ελαχιστοποίηση περιμέτρου** Ποια η ελάχιστη δυνατή περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου εμβαδού 16 cm^2 , και ποιες είναι τότε οι διαστάσεις του;
- Εύρεση εμβαδού** Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα περιμέτρου 8 m , το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.
- Εγγεγραμμένα ορθογώνια** Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους 2 μονάδων.
 - Εκφράστε τη συντεταγμένη y του σημείου P συναρτήσει του x . (Υπόδειξη: Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία AB .)
 - Εκφράστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου συναρτήσει του x .
 - Ποιο το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και ποιες είναι τότε οι διαστάσεις του;



- Μέγιστο ορθογώνιο** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τη βάση του στον άξονα x και τις άνω κορυφές του επί της παραβολής $y = 12 - x^2$. Ποιο το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και ποιες οι διαστάσεις του;
- Βέλτιστες διαστάσεις** Από ένα κομμάτι χαρτόνι διαστάσεων $8 \times 15 \text{ cm}$ πρόκειται να φτιάξετε ένα κουτί ανοιχτό από πάνω, αποκόβοντας ίσα τετράγωνα από κάθε γωνία και διπλώνοντας μετά τις πλευρές που προεξέχουν. Ποιες είναι οι διαστάσεις του κουτιού για μέγιστο όγκο (χωρητικότητα) και ποιος ο όγκος του;
- Αποκόβοντας τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου** Σχεδιάζετε να αποκόψετε ένα τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 20 μονάδων, που εκτείνεται από το σημείο $(a, 0)$ στο $(0, b)$. Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τους άξονες και το ευθύγραμμο τμήμα είναι μέγιστο όταν $a = b$.
- Βέλτιστη περίφραξη** Από μεγάλη αγροτική έκταση θέλουμε να απομονώσουμε μια περιοχή σχήματος ορθογώνιου

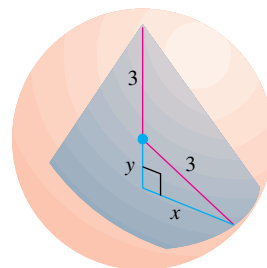
παραλληλογράμμου που συνορεύει στη μία πλευρά με ποτάμι. Τις άλλες τρεις πλευρές πρόκειται να τις περιφράξουμε με μονό ηλεκτρικό σύρμα. Έχοντας 800 m καλωδίου στη διάθεσή μας, ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορούμε να περιφράξουμε, και ποιες οι διαστάσεις του παραλληλογράμμου;

- Η ελάχιστη περίφραξη** Ένα χωράφι αρακά έκτασης 216 m^2 και σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου πρόκειται να περιφραχτεί και κατόπιν να μοιραστεί στα δύο, πάλι με φράχτη, παράλληλο στις δύο πλευρές του. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του εξωτερικού παραλληλογράμμου για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μήκος περιφράξης; Πόση περίφραξη θα χρειαστεί τότε;
- Σχεδίαση κιβωτίου** Η επιχείρησή σας έχει αναλάβει να σχεδιάσει και να κατασκευάσει για λογαριασμό μιας εταιρείας χαρτιού ένα ορθογώνιο ατσάλινο κιβώτιο, χωρητικότητας 500 m^3 , τετράγωνης βάσης, ανοιχτό από πάνω. Το κιβώτιο θα κατασκευαστεί συγκολλώντας τις πλευρές πέντε λεπτών ατσάλινων πλακών. Η δουλειά σας ως μηχανικός παραγωγής είναι να βρείτε τις διαστάσεις της βάσης και του ύψους ώστε το βάρος της κατασκευής να είναι ελάχιστο.
 - Ποιες διαστάσεις επιλέγετε;
 - Μάθετε γράφοντας** Περιγράψτε με λίγα λόγια πώς κάνατε τον υπολογισμό σας.
- Συγκέντρωση βρόχινου νερού** Μια ορθογώνια δεξαμενή χωρητικότητας 1125 m^3 , με τετράγωνη βάση πλευράς $x \text{ m}$ και βάθος $y \text{ m}$, πρόκειται να κατασκευαστεί έτσι ώστε η πάνω (ανοιχτή) πλευρά της να είναι ισεπίπεδη με το έδαφος, για να μπορεί να συγκεντρώνει βρόχινο νερό. Το έξοδα περιλαμβάνουν όχι μόνο το υλικό κατασκευής αλλά και την εκσκαφή του χώματος, το κόστος της οποίας είναι ανάλογο του γινομένου xy .
 - Αν το συνολικό κόστος είναι

$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

βρείτε τις τιμές των x και y που το ελαχιστοποιούν.

- Μάθετε γράφοντας** Δώστε μια πιθανή εξήγηση για τη μορφή της συναρτήσεως κόστους του ερωτήματος (α).
- Σχεδίαση αφίσας** Σχεδιάζετε μια ορθογώνια αφίσα, χρησιμής επιφάνειας 50 cm^2 , με περιθώριο 4 cm πάνω και κάτω, και 2 cm δεξιά και αριστερά. Για ποιες εξωτερικές διαστάσεις ελαχιστοποιείται η ποσότητα χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί;
 - Εγγεγραμμένος κώνος** Βρείτε τον όγκο του μεγαλύτερου ορθού κυκλικού κώνου που μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας 3 .

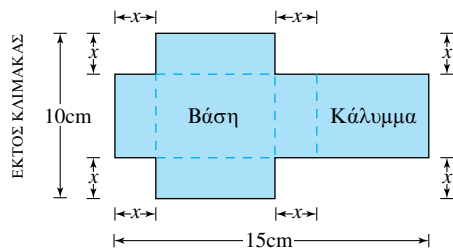


13. **Εύρεση γωνίας** Δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη a και b , ενώ η γωνία που περικλείουν είναι θ . Για ποια τιμή της θ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου; (Υπόδειξη: $A = (1/2)ab \sin \theta$.)
14. **Σχεδίαση δοχείου** Ποιες είναι οι διαστάσεις του ελαφρύτερου κυλινδρικού δοχείου που είναι ανοιχτό από πάνω και έχει χωρητικότητα 1000 cm^3 ; Συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με το Παράδειγμα 2.
15. **Σχεδίαση δοχείου** Σας ζητείται να σχεδιάσετε κυλινδρικό δοχείο αλουμινίου χωρητικότητας 1000 cm^3 με διαστάσεις που εξασφαλίζουν το μικρότερο κόστος, δεδομένου ότι και τα αποκόμματα αλουμινίου που περισσεύουν και πετιώνονται, πληρώνονται. Το πλευρικό τοίχωμα του δοχείου έχει επιφάνεια ορθογωνίου και συνεπώς μπορεί να κοπεί χωρίς απώλειες, όμως οι δύο κυκλικές βάσεις ακτίνας r θα κοπούν από τετράγωνα κομμάτια πλευράς $2r$. Η συνολική ποσότητα αλουμινίου που δεσμεύεται για την κατασκευή του δοχείου είναι συνεπώς

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

και όχι $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ όπως στο Παράδειγμα 2. Στο Παράδειγμα 2, η οικονομικότερη αναλογία του h προς το r ήταν 2 προς 1. Ποια αναλογία είναι οικονομικότερη τώρα;

- T** 16. **Σχεδίαση κουτιού με κάλυμμα** Ένα κομμάτι χαρτόνι έχει διαστάσεις 10 cm επί 15 cm . Δύο ίσα τετράγωνα αποκόπτονται από τις κορυφές της μιας πλευράς 10 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Δύο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα αποκόπτονται από τις άλλες δύο κορυφές έτσι ώστε, όταν διπλώνονται, οι πλευρές που προκύπτουν να σχηματίζουν ορθογώνιο κουτί με κάλυμμα.

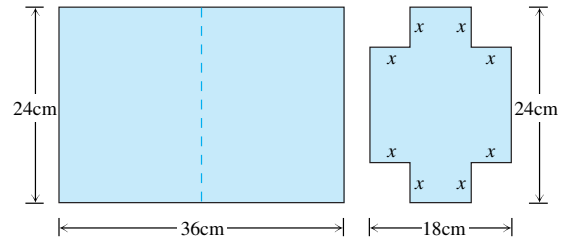


- (α) Γράψτε μια έκφραση $V(x)$ για τον όγκο του κουτιού.
- (β) Βρείτε το πεδίο ορισμού του V και σχεδιάστε το V στο διάστημα αυτό.
- (γ) Με γραφικές μεθόδους βρείτε τον μέγιστο όγκο και την αντίστοιχη τιμή του x .
- (δ) Επαληθεύστε αναλυτικά το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (γ).

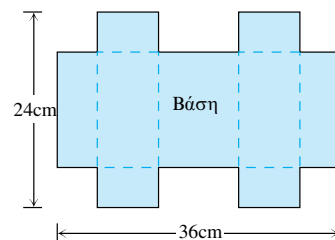
- T** 17. **Σχεδίαση κασετίνας** Ένα χαρτόνι διαστάσεων $24 \times 36 \text{ cm}$ διπλώνεται στα δύο σχηματίζοντας ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $24 \times 18 \text{ cm}$ όπως φαίνεται στο παρατιθέμενο σχήμα. Από τις κορυφές του διπλωμένου χαρτονιού αποκόπτονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x . Ξεδιπλώνουμε το χαρτόνι και διπλώνουμε τις έξι πλευρές που προεξέχουν, οπότε προκύπτει ένα κουτί με τοιχώματα και κάλυμμα, που μοιάζει με κασετίνα ή με μικρή βαλίτσα.

- (α) Γράψτε μια έκφραση $V(x)$ για τον όγκο του κουτιού.
- (β) Βρείτε το πεδίο ορισμού του V και σχεδιάστε το V στο διάστημα αυτό.

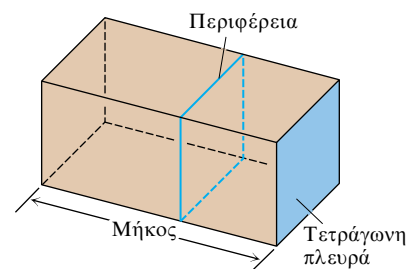
- (γ) Με γραφικές μεθόδους βρείτε τον μέγιστο όγκο και την αντίστοιχη τιμή του x .
- (δ) Επαληθεύστε αναλυτικά το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (γ).
- (ε) Βρείτε την τιμή x που αντιστοιχεί σε όγκο 1120 cm^3 .
- (στ) **Μάθετε γράφοντας** Γράψτε μια παράγραφο παραθέτοντας τα ζητήματα που προκύπτουν στο ερώτημα (β).



Κατόπιν ξεδιπλώνουμε το χαρτόνι

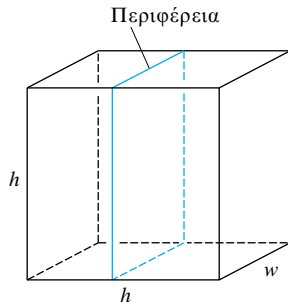


18. **Εγγεγραμμένο ορθογώνιο** Θέλουμε να εγγράψουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην καμπύλη $y = 4 \cos(0,5x)$ από το $x = -\pi$ έως το $x = \pi$. Για ποιες διαστάσεις μεγιστοποιείται το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, και πόσο γίνεται τότε;
19. **Μεγιστοποίηση όγκου** Βρείτε τις διαστάσεις κυλίνδρου μέγιστου όγκου που εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας 10 cm . Ποιος είναι ο μέγιστος αυτός όγκος;
20. (α) Έστω ότι τα ταχυδρομεία δέχονται δέματα εσωτερικού μόνο όταν το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας του δέματος δεν υπερβαίνει τα 108 cm . Δεδομένου ότι έχουμε ένα δέμα με δυο τετράγωνες πλευρές, ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει αυτό για μέγιστη χωρητικότητα;



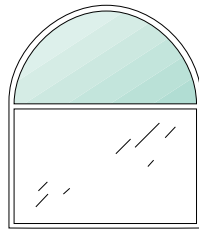
- T** (β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του όγκου ενός δέματος 108 cm (μήκος συν περιφέρεια ίσον 108 cm) έναντι του μήκους και συγκρίνετε το γράφημά σας με την απάντηση που δώσατε στο (α).
21. **(Συνέχεια της Άσκησης 20)**
- (α) Έστω ότι αντί για δέμα με δύο τετράγωνες πλευρές είχατε ένα άλλο με τέσσερις τετράγωνες πλευρές,

του οποίου συνεπώς οι διαστάσεις είναι h επί h επί w και η περιφέρεια ισούται με $2h + 2w$. Ποιες διαστάσεις θα δώσουν τώρα στο δέμα τη μέγιστη χωρητικότητα;

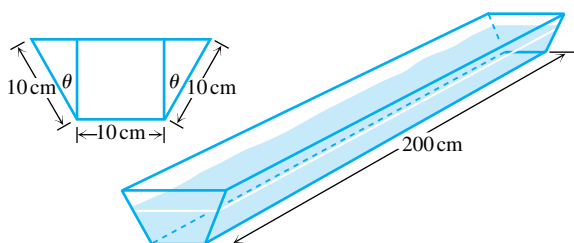


- T (β)** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του όγκου έναντι του μήκους h και συγκρίνετε το γράφημά σας με την απάντηση που δώσατε στο (α).

22. **Σχεδίαση παραθύρου** Ένα παράθυρο έχει σχήμα ορθογωνίου στο οποίο επικάθεται ημικύκλιο. Το ορθογώνιο τμήμα του παραθύρου αποτελείται από καθαρό γυαλί, ενώ το γυαλί του ημικυκλίου έχει απόχρωση που αφήνει να περάσει μόνο το μισό φως ανά μονάδα επιφάνειας σε σχέση με το καθαρό γυαλί. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου είναι σταθερή. Να βρεθούν οι διαστάσεις του παραθύρου που θα αφήνουν να περάσει το περισσότερο φως. Αγνοήστε το πάχος του πλαισίου.



23. **Κατασκευή σιλό** Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα σιλό (χωρίς τη βάση του) που θα έχει τη μορφή κυλίνδρου πάνω στον οποίο θα «κάθεται» ένα ημισφαίριο. Το κόστος κατασκευής ανά μονάδα επιφάνειας είναι διπλάσιο για το ημισφαίριο απ' ό,τι για το κυλινδρικό τμήμα. Προσδιορίστε τις βέλτιστες διαστάσεις αν ο όγκος του σιλό είναι δεδομένος και θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος κατασκευής. Αγνοήστε το πάχος του υλικού και το κόστος των περισσευμάτων που προκύπτουν κατά την κατασκευή, τα οποία πετιούνται.
24. **Εύρεση γωνίας** Η σκάφη του σχήματος θα κατασκευαστεί με τις διαστάσεις που σημειώνονται. Μονάχα τη γωνία θ μπορούμε να μεταβάλλουμε. Για ποια τιμή της θ μεγιστοποιείται ο όγκος της σκάφης;



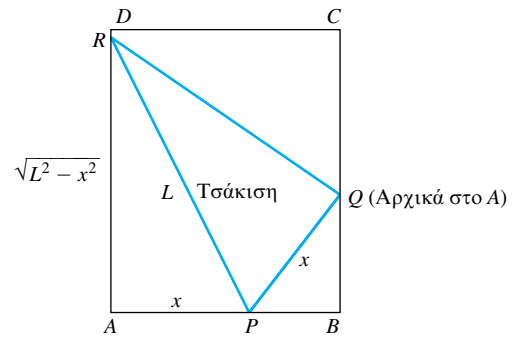
3.5. Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση

25. **Χαρτί που διπλώνει** (Εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.) Ένα ορθογώνιο χαρτί διαστάσεων $8,5 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ τοποθετείται σε επίπεδη επιφάνεια. Τσακίζουμε το χαρτί με τρόπο ώστε η μία κορυφή να πέσει πάνω στην απέναντι μεγάλη πλευρά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πρόβλημα που τίθεται είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της τσακίσης, το οποίο καλούμε L . Δοκιμάστε το με μια κόλλα χαρτί.

(α) Δείξτε ότι $L^2 = 2x^3/(2x - 8,5)$.

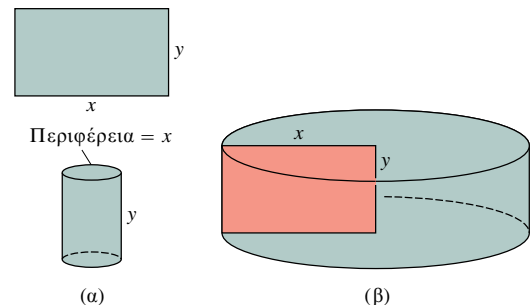
(β) Για ποια τιμή του x ελαχιστοποιείται το L^2 ;

(γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του L ;

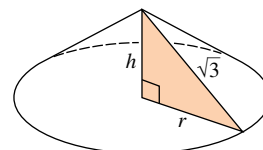


26. **Κατασκευή κυλίνδρων** Συγκρίνετε τις απαντήσεις στα ακόλουθα προβλήματα κατασκευής.

- (α) Ένα ορθογώνιο φύλλο περιμέτρου 36 cm και διαστάσεων $x \text{ cm}$ επί $y \text{ cm}$ τυλίγεται σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος;
- (β) Το ίδιο φύλλο περιστρέφεται γύρω από τη μια του πλευρά μήκους y διαγράφοντας τον κύλινδρο που φαίνεται στο σχήμα (β). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;



27. **Κατασκευή κώνων** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο υποτείνουσας $\sqrt{3} \text{ m}$ περιστρέφεται γύρω από τη μία κάθετη πλευρά του, διαγράφοντας κώνο. Να βρεθεί η ακτίνα, το ύψος, και ο όγκος του κώνου, όταν ο όγκος είναι μέγιστος.



28. **Εύρεση τιμών παραμέτρου** Για ποια τιμή του a αποκτά η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a/x)$

(α) τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$;

(β) σημείο καμπής στο $x = 1$;

29. **Εύρεση τιμών παραμέτρου** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (a/x)$ δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο για καμία τιμή του a .

30. **Εύρεση τιμών παραμέτρου** Για ποιες τιμές του a και b αποκτά η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

(α) τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$;

(β) τοπικό ελάχιστο στο $x = 4$ και σημείο καμπής στο $x = 1$;

Φυσικές εφαρμογές

31. **Κατακόρυφη κίνηση** Το ύψος ενός σώματος που κινείται κατακόρυφα δίδεται από την εξίσωση

$$s = -16t^2 + 96t + 112,$$

όπου s σε m και t σε sec. Βρείτε

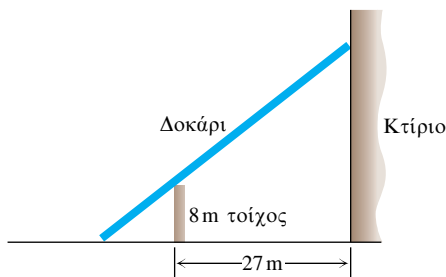
(α) την ταχύτητα του σώματος για $t = 0$

(β) το μέγιστο ύψος του και πότε αυτό προκύπτει

(γ) την ταχύτητα του σώματος για $s = 0$.

32. **Γρηγορότερη διαδρομή** Η Άννα βρίσκεται σε μια βάρκα 2 km ανοιχτά μιας ευθύγραμμης ακτής και θέλει να φθάσει σε παραθαλάσσιο χωριό που απέχει 6 km από το εγγύτερο στη βάρκα σημείο της ακτής. Κωπηλατώντας μπορεί να διανύσει 2 km/h, ενώ περπατώντας 5 km/h. Σε ποιο σημείο της ακτής θα πρέπει να κατευθύνει τη βάρκα ώστε να φθάσει στο χωριό στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;

33. **Κοντότερο δοκάρι** Ο τοίχος ύψους 8 m του παρατιθέμενου σχήματος απέχει 27 m από το κτίριο. Να βρεθεί το μήκος του κοντότερου δοκαριού που «πατάει» στα αριστερά του τοίχου και φθάνει μέχρι το κτίριο.



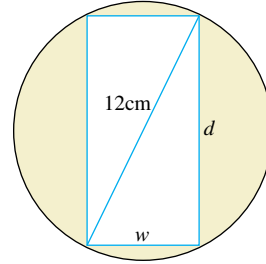
T 34. **Αντοχή δοκαριού** Η αντοχή S ["strength"] ενός ξύλινου δοκαριού ορθογώνιας διατομής είναι ανάλογη του γινομένου της μικρής εγκάρσιας διαστάσεώς του, w , επί το τετράγωνο της μεγάλης εγκάρσιας διαστάσεως, d . (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.)

(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός δοκαριού μέγιστης αντοχής που παράγεται από κυλινδρικό κορμό διαμέτρου 12 cm.

(β) **Μάθετε γράφοντας** Σχεδιάστε το S συναρτήσει της διαστάσεως w , υποθέτοντας ότι η σταθερά αναλογίας είναι $k = 1$. Συμβαδίζει το γράφημα αυτό με την απάντησή σας στο (α);

(γ) **Μάθετε γράφοντας** Στο ίδιο σχήμα που κάνατε στο (β), σχεδιάστε το S ως προς την άλλη διάσταση, d ,

υποθέτοντας και πάλι ότι $k = 1$. Συγκρίνετε τα γραφήματα μεταξύ τους και με την απάντησή σας στο (α). Τι θα συμβεί αν η σταθερά αναλογίας k πάρει άλλες τιμές; Ελέγξτε το.



T 35. **Δυσκαμψία δοκαριού** Η δυσκαμψία S ("stiffness") ενός ξύλινου δοκαριού ορθογώνιας διατομής είναι ανάλογη του γινομένου της μικρής εγκάρσιας διαστάσεώς του, w , επί τον κύβο της μεγάλης εγκάρσιας διαστάσεως, d .

(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις δοκαριού μέγιστης δυσκαμψίας που παράγεται από κυλινδρικό κορμό διαμέτρου 12 cm.

(β) **Μάθετε γράφοντας** Σχεδιάστε το S συναρτήσει της διαστάσεως w , υποθέτοντας ότι η σταθερά αναλογίας είναι $k = 1$. Συμβαδίζει το γράφημα αυτό με την απάντησή σας στο (α);

(γ) **Μάθετε γράφοντας** Στο ίδιο σχήμα που κάνατε στο (β), σχεδιάστε το S ως προς την άλλη διάσταση, d , υποθέτοντας και πάλι ότι $k = 1$. Συγκρίνετε τα γραφήματα μεταξύ τους και με την απάντησή σας στο (α). Τι θα συμβεί αν η σταθερά αναλογίας k πάρει άλλες τιμές; Ελέγξτε το.

36. **Κίνηση σε ευθεία** Οι συναρτήσεις θέσεως δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1 = \sin t$ και $s_2 = \sin(t + \pi/3)$, όπου s_1 και s_2 σε m και t σε sec.

(α) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \leq t \leq 2\pi$ συναντώνται τα σωματίδια;

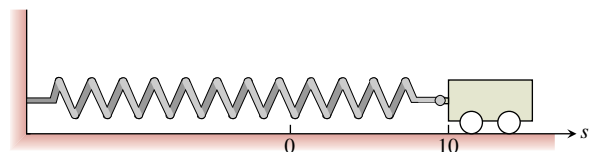
(β) Ποια η μέγιστη μεταξύ τους απόσταση;

(γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \leq t \leq 2\pi$ μεταβάλλεται με μέγιστο ρυθμό η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων;

37. **Καρότσι χωρίς τριβές** Ένα μικρό καρότσι που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και συνδέεται μέσω ελατηρίου με τον τοίχο, απομακρύνεται 10 cm από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να ταλαντωθεί ελεύθερα για 4 sec. Η θέση του τη στιγμή t είναι $s = 10 \cos \pi t$.

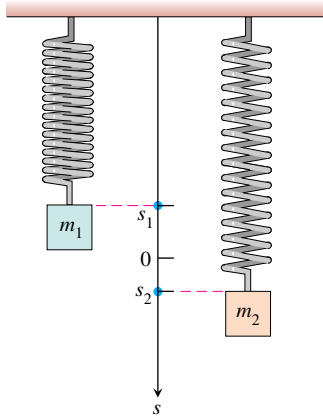
(α) Ποια είναι η μέγιστη (κατά μέτρο) ταχύτητα του καροτσιού και πότε προκύπτει αυτή; Σε ποια θέση βρίσκεται τότε και με πόση επιτάχυνση (κατά μέτρο) κινείται το καρότσι;

(β) Πού βρίσκεται το καρότσι τη στιγμή που το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο; Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητάς του τη στιγμή εκείνη;



38. **Ταλαντούμενες μάζες** Δύο μάζες που κρέμονται από ελατήρια η μια δίπλα στην άλλη έχουν συναρτήσεις θέσεως $s_1 = 2 \sin t$ και $s_2 = \sin 2t$, αντίστοιχα.

- (α) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 < t$ έχουν οι μάζες το ίδιο ύψος; (Υπόδειξη: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.)
- (β) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \leq t \leq 2\pi$ γίνεται μέγιστη η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των μαζών; Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Υπόδειξη: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$.)



39. **Απόσταση μεταξύ δυο πλοίων** Το μεσημέρι, το πλοίο A βρίσκεται 12 ναυτικά μίλια βόρεια του πλοίου B. Το πλοίο A έπλεε τότε με κατεύθυνση νότια και ταχύτητα 12 κόμβων (ναυτικών μιλίων ανά ώρα· 1 ναυτικό μίλι ≈ 1852 m). Το πλοίο B έπλεε με κατεύθυνση ανατολικά και ταχύτητα 8 κόμβων. Και τα δύο πλοία διατήρησαν σταθερή την ταχύτητά τους κατά τη διάρκεια της ημέρας.

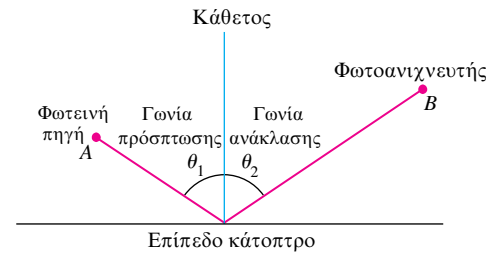
- (α) Με σημείο χρονικής αφετηρίας ($t = 0$) το μεσημέρι εκφράστε την απόσταση s μεταξύ των πλοίων συναρτήσει του t .
- (β) Πόσο γρήγορα μεταβαλλόταν η απόσταση μεταξύ των πλοίων το μεσημέρι; Πόσο μια ώρα αργότερα;
- (γ) Εκείνη την ημέρα η ορατότητα ήταν 5 ναυτικά μίλια. Αντίκρυσε ποτέ το ένα πλοίο το άλλο;

- T** (δ) Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τα s και ds/dt συναρτήσει του t για $-1 \leq t \leq 3$, με διαφορετικά χρώματα αν είναι δυνατόν. Συγκρίνετε τα γραφήματα και συσχετίστε τα με τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα (β) και (γ).
- (ε) Το γράφημα του ds/dt δείχνει να έχει μια οριζόντια ασύμπτωτη στο πρώτο τεταρτημόριο. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι το ds/dt προσεγγίζει μια οριακή τιμή καθώς $t \rightarrow \infty$. Ποια είναι η τιμή αυτή; Ποια η σχέση της με τις ταχύτητες των δύο πλοίων;

40. **Η αρχή του Fermat στην οπτική** Η αρχή του Fermat στην οπτική λέει ότι καθώς το φως ταξιδεύει μεταξύ δύο σημείων, επιλέγει πάντα τη συντομότερη διαδρομή (που ελαχιστοποιεί τον χρόνο). Από μια φωτεινή πηγή A εκπέμπεται φως που ανακλάται σε επίπεδο κάτοπτρο και φτάνει έτσι στον φωτοανιχνευτή B, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δείξτε πως η αρχή του Fermat συνεπάγεται ότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης, όπως αυτές μετρώνται από την κάθετο στην επιφάνεια του κατόπτρου. (Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να παρα-

3.5. Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση

χθεί και χωρίς απειροστικό λογισμό, με καθαρά γεωμετρικά επιχειρήματα.)



41. **Λοιμός του κασσιτέρου** Σε θερμοκρασία κάτω των $13,2^\circ\text{C}$ ο μεταλλικός κασσίτερος βαθμιαία γίνεται εύθραυστος και θρυμματίζεται αφήνοντας μια γκρίζα σκόνη. Αντικείμενα από κασσίτερο που υπόκεινται σε κρύες θερμοκρασίες για μερικά χρόνια θρυμματίζονται τελικά αυθορμητώς. Οι Ευρωπαίοι που έβλεπαν τους σωλήνες από κασσίτερο των εκκλησιαστικών τους οργάνων να θρυμματίζονται τους προηγούμενους αιώνες, ονόμασαν το φαινόμενο αυτό *λοιμό του κασσιτέρου* («tin pest») γιατί φαινόταν μεταδοτικό, και όντως έτσι ήταν, αφού η γκρίζα σκόνη είναι καταλύτης του ίδιου του μηχανισμού σχηματισμού της.

Καταλύτης μιας χημικής αντίδρασης είναι μια ουσία που ελέγχει την ταχύτητα της αντίδρασης χωρίς η ίδια να υφίσταται κάποια μόνιμη μεταβολή. Μια αντίδραση είναι *αυτοκαταλυτική* όταν το ίδιο το προϊόν της καταλύει την αντίδραση. Μια αυτοκαταλυτική αντίδραση θα εξελίσσεται αργά στην αρχή, αφού η ποσότητα του καταλύτη είναι μικρή, αλλά και προς το τέλος, όταν η περισσότερη από την αντιδρώσα ουσία έχει αναλωθεί. Ενδιάμεσα, όμως, όταν τόσο η αντιδρώσα ουσία όσο και ο παραγόμενος καταλύτης υπάρχουν σε αφθονία, η αντίδραση εξελίσσεται με ταχύτερο ρυθμό.

Σε μερικές περιπτώσεις, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα της αντίδρασης $v = dx/dt$ είναι ανάλογη τόσο της ποσότητας της αντιδρώσας ουσίας όσο και της ποσότητας του παραγόμενου καταλύτη. Με άλλα λόγια, το v μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση μόνο του x και να γράψουμε

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2,$$

όπου

x = η ποσότητα του προϊόντος

a = η αρχική ποσότητα της αντιδρώσας ουσίας

k = μια θετική σταθερά.

Για ποια τιμή του x γίνεται μέγιστη η ταχύτητα; Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του v ;

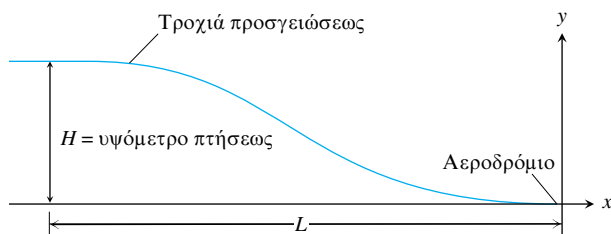
42. **Τροχιά προσγειώσεως αεροπλάνου** Αεροπλάνο πετά σε υψόμετρο H όταν αρχίζει την κάθοδο για να προσγειωθεί σε ειδικό διάδρομο που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση L από το αεροσκάφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι η τροχιά προσγειώσεως του αεροσκάφους είναι η καμπύλη του πολυωνύμου τρίτου βαθμού $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, όπου $y(-L) = H$ και $y(0) = 0$.

(α) Ποια η τιμή του dy/dx για $x = 0$;

(β) Ποια η τιμή του dy/dx για $x = -L$;

- (γ) Χρησιμοποιήστε τις τιμές των dy/dx για $x = 0$ και $x = -L$ καθώς και τις τιμές $y(0) = 0$ και $y(-L) = H$ για να δείξετε ότι

$$y(x) = H \left[2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right].$$



Επιχειρήσεις και οικονομικά

43. **Πώληση εκδρομικών σακκιδίων** Το κόστος παραγωγής και διανομής εκδρομικών σακκιδίων είναι c € ανά τεμάχιο. Αν η τιμή λιανικής πώλησής τους είναι x €, ο αριθμός των πωληθέντων σακκιδίων είναι

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x),$$

όπου a και b είναι θετικές σταθερές. Ποια τιμή λιανικής πώλησής τους θα αποφέρει μέγιστο κέρδος;

44. **Γραφείο ταξιδιών** Οργανώνετε μια εκδρομή με τις ακόλουθες τιμές συμμετοχής:

200 € το άτομο αν 50 άτομα συμμετάσχουν (που είναι και ο ελάχιστος αριθμός για να γίνει η εκδρομή)

Για κάθε επιπλέον άτομο, και για μέχρι 80 συνολικά επιβαίνοντες, η τιμή μειώνεται κατά €2 ανά άτομο.

Το κόστος της εκδρομής είναι 6000 € (πάγιο) συν 32 € ανά άτομο. Για πόσους επιβάτες μεγιστοποιείται το κέρδος;

45. **Τύπος του Wilson** Σύμφωνα με έναν από τους μαθηματικούς τύπους διαχείρισης απογραφής, το μέσο εβδομαδιαίο κόστος παραγγελίας, πληρωμής, και διατήρησης εμπορεύματος είναι

$$A(q) = \frac{km}{q} + cq + \frac{hq}{2},$$

όπου q η ποσότητα που παραγγέλλεται όταν τελειώνει το εμπόρευμα (παπούτσια, ραδιόφωνα, σκούπες, ή οτιδήποτε άλλο), k είναι το κόστος παραγγελίας (ίδιο κάθε φορά, ανεξαρτήτως του πόσο συχνά γίνονται παραγγελίες), c είναι το κόστος του ενός τεμαχίου (σταθερό), m ο αριθμός των τεμαχίων που πωλήθηκαν σε μια εβδομάδα (σταθερός), και h το εβδομαδιαίο κόστος διατήρησης ανά τεμάχιο (μια σταθερά που περιλαμβάνει π.χ. τα έξοδα συντήρησης, ασφάλισης, φύλαξης του καταστήματος κ.λπ.).

- (α) Η αποστολή σας, ως διευθυντής του τμήματος απογραφής, είναι να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους $A(q)$. (Ο τύπος που παίρνετε τότε λέγεται *τύπος του Wilson*.)

- (β) Το κόστος παραγγελίας (που περιλαμβάνει έξοδα

μεταφοράς) εξαρτάται μερικές φορές από το μέγεθος της παραγγελίας. Στην περίπτωση αυτή είναι ρεαλιστικότερο να αντικαταστήσετε το k με το $k + bq$, δηλαδή με το άθροισμα του k και ενός σταθερού πολλαπλασίου του q . Πόση ποσότητα συμφέρει περισσότερο να παραγγείλετε τώρα;

46. **Ποσότητα παραγωγής** Δείξτε ότι, αν υπάρχει τιμή της ποσότητας παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος, αυτή είναι τέτοια ώστε το μέσο κόστος να ισούται με το οριακό κόστος.

47. **Ποσότητα παραγωγής** Δείξτε ότι αν $r(x) = 6x$ και $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ είναι οι συναρτήσεις σας εισοδήματος και κόστους αντίστοιχα, τότε στην καλύτερη περίπτωση το εισόδημά σας απλώς θα ισοφαρίσει το κόστος.

48. **Ποσότητα παραγωγής** Έστω ότι $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20.000x$ είναι το κόστος παραγωγής x τεμαχίων. Βρείτε την ποσότητα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος της παραγωγής x τεμαχίων.

49. **Μέσο ημερήσιο κόστος** Στο Παράδειγμα 6, υποθέστε ότι για μια πρώτη ύλη το πάγιο κόστος παράδοσης είναι d , το κόστος αποθήκευσης είναι s ευρώ ανά τεμάχιο ανά ημέρα, και ο ρυθμός παραγωγής είναι p τεμάχια την ημέρα.

- (α) Αν η παράδοση γίνεται κάθε x ημέρες, πόση ποσότητα πρέπει να παραδίδεται;

- (β) Δείξτε ότι το

$$\text{κόστος ανά κύκλο} = d + \frac{px}{2}sx.$$

- (γ) Βρείτε τον βέλτιστο χρόνο x^* μεταξύ δύο παραδόσεων καθώς και την παραδοτέα ποσότητα που ελαχιστοποιούν το μέσο ημερήσιο κόστος της παράδοσης και αποθήκευσης.

- (δ) Δείξτε ότι η τιμή x^* προκύπτει στο σημείο τομής της υπερβολής $y = d/x$ και την ευθείας $y = ppx/2$.

50. **Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους** Έστω ότι $c(x) = 2000 + 96x + 4x^{3/2}$, όπου το x μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Υπάρχει κάποια ποσότητα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος; Αν ναι, ποια είναι αυτή;

Ιατρική

51. **Ευαισθησία σε φάρμακο** (Συνέχεια του Παραδείγματος 7 της Ενότητας 2.3) Βρείτε την ποσότητα φαρμακευτικής ουσίας στην οποία παρουσιάζει μέγιστη ευαισθησία ο οργανισμός υπολογίζοντας την τιμή M που μεγιστοποιεί την παράγωγο dR/dM , όπου

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

και C είναι μια σταθερά.

52. **Πώς βήχουμε**

- (α) Όταν βήχουμε, η τραχεία συστέλλεται για να αυξήσει την ταχύτητα εξόδου του εκπνεόμενου αέρα. Αυτό γεννά τα ερωτήματα, πρώτον, πόσο πρέπει να συσταλεί η τραχεία για να μεγιστοποιηθεί η ταχύτητα του αέρα, και δεύτερον, αν όντως συστέλλεται τόσο η τραχεία όταν βήχουμε.

Κάνοντας μερικές εύλογες υποθέσεις για την

ελαστικότητα του τραχειακού τοιχώματος και για το πώς επιβραδύνεται ο αέρας κοντά στα τοιχώματα, λόγω τριβής, η μέση ταχύτητα ροής v του αέρα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/sec}, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0,$$

όπου r_0 είναι η ακτίνα ηρεμίας της τραχείας σε cm και c είναι μια θετική σταθερά της οποίας η τιμή εξαρτάται εν μέρει από το μήκος της τραχείας.

Δείξτε ότι η ταχύτητα v είναι μέγιστη όταν $r = (2/3)r_0$, δηλαδή όταν η τραχεία έχει συσταλλεί κατά 33%. Το αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι, όπως επαληθεύεται από ακτινογραφίες, κατά τη διάρκεια του βήχα η τραχεία όντως συστέλλεται περίπου όσο υπολογίσαμε.

- T (β)** Δώστε στο r_0 την τιμή 0,5 και στο c την τιμή 1 και παραστήστε γραφικά την ταχύτητα v στο διάστημα $0 \leq r \leq 0,5$. Επαληθεύει το γράφημα την πρόταση ότι η ταχύτητα v μεγιστοποιείται όταν $r = (2/3)r_0$;

Θεωρία και παραδείγματα

53. *Μια ανισότητα θετικών ακεραίων* Δείξτε ότι αν οι a, b, c , και d είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)}{abcd} \geq 16.$$

54. *Η παράγωγος dt/dx στο Παράδειγμα 4*

- (α) Δείξτε ότι η

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του x .

- (β) Δείξτε ότι η

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

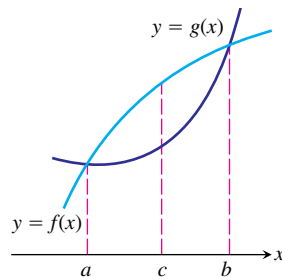
είναι φθίνουσα συνάρτηση του x .

- (γ) Δείξτε ότι η

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του x .

55. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $f(x)$ και $g(x)$ οι διαφορίσιμες συναρτήσεις που σχεδιάζονται στο ακόλουθο σχήμα. Στο σημείο c η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των καμπυλών είναι μέγιστη. Υπάρχει τίποτε το αξιοσημείωτο σχετικά με τις εφαπτομένες των δύο καμπυλών στο c ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



56. *Μάθετε γράφοντας* Σας ζητείται να προσδιορίσετε αν

3.5. Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση

παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές η συνάρτηση $f(x) = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$.

- (α) Εξηγήστε γιατί σας αρκεί να μελετήσετε τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
(β) Είναι ποτέ αρνητική η f ; Εξηγήστε.

57. *Ολικό μέγιστο*

- (α) Η συνάρτηση $y = \cot x - \sqrt{2} \csc x$ εμφανίζει ολικό μέγιστο στο διάστημα $0 < x < \pi$. Βρείτε το.

- T (β)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση και συγκρίνετε το γράφημα με την απάντησή σας στο (α).

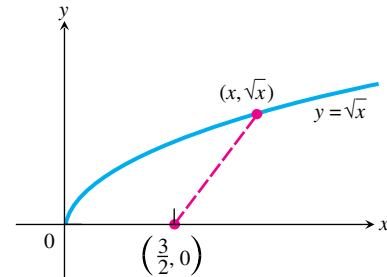
58. *Ολικό ελάχιστο*

- (α) Η συνάρτηση $y = \tan x + 3 \cot x$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο διάστημα $0 < x < \pi/2$. Βρείτε το.

- T (β)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση και συγκρίνετε το γράφημα με την απάντησή σας στο (α).

59. *Απειροστικός λογισμός και γεωμετρία*

- (α) Πόσο κοντά στο σημείο $(3/2, 0)$ διέρχεται η καμπύλη $y = \sqrt{x}$; (Υπόδειξη: Ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο της απόστασης, αποφεύγετε τις τετραγωνικές ρίζες.)



- T (β)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση της απόστασης και την $y = \sqrt{x}$ σε κοινό σχήμα, και επαληθεύστε έτσι την απάντησή σας στο (α).

60. *Απειροστικός λογισμός και γεωμετρία*

- (α) Πόσο κοντά στο σημείο $(1, \sqrt{3})$ διέρχεται το ημικύκλιο $y = \sqrt{16 - x^2}$;

- T (β)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση της απόστασης και την $y = \sqrt{16 - x^2}$ σε κοινό σχήμα, και επαληθεύστε έτσι την απάντησή σας στο (α).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

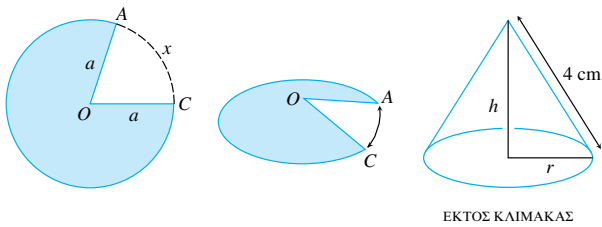
Στις Ασκήσεις 61 και 62, κάνετε χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας.

61. *Γενικευμένο πρόβλημα του κώνου* Κώνος ύψους h και ακτίνας r κατασκευάζεται από επίπεδο κυκλικό δίσκο ακτίνας a cm αν αποκόψουμε έναν κυκλικό τομέα AOC με μήκος τόξου x cm και κατόπιν ενώσουμε τις δυο άκρες OA και OC .

- (α) Να βρεθεί ένας τύπος για τον κωνικό όγκο V συναρτήσει των x και a .

- (β) Να βρεθούν τα r και h για τον κώνο μέγιστου όγκου αν $a = 4, 5, 6, 8$.

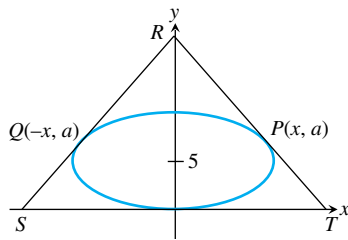
- (γ) *Μάθετε γράφοντας* Για τον κώνο μέγιστου όγκου, βρείτε μια απλή σχέση μεταξύ των r και h που να μην περιέχει το a . Εξηγήστε πώς φθάσατε στην έκφραση αυτή.



62. **Περιγεγραμμένο τρίγωνο σε έλλειψη** Έστω $P(x, a)$ και $Q(-x, a)$ δύο σημεία στο άνω ήμισυ της ελλείψεως

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

με κέντρο το $(0, 5)$. Φέρνουμε τις εφαπτομένες της έλλειψης στα σημεία Q και P και ορίζουμε έτσι το τρίγωνο RST όπως δείχνεται στο σχήμα.



- (α) Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει εμβαδόν

$$A(x) = -f'(x) \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2,$$

όπου $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση με γραφική παράσταση το άνω ήμισυ της έλλειψης.

- (β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εμβαδού A ; Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του A . Πώς σχετίζονται οι ασύμπτωτες του γραφήματος με το πρόβλημα που εξετάζουμε;
- (γ) Προσδιορίστε το ύψος του τριγώνου ελαχίστου εμβαδού. Πώς σχετίζεται αυτό με τη συντεταγμένη y του κέντρου της έλλειψης;
- (δ) Επαναλάβετε τα (α) έως και (γ) για την έλλειψη

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y-B)^2}{B^2} = 1$$

με κέντρο το $(0, B)$. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν το ύψος του είναι $3B$.

3.6

Γραμμικοποίηση και διαφορικά

- Γραμμικοποίηση • Διαφορικά • Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών • Απόλυτη, σχετική, και ποσοστιαία μεταβολή
- Ευαισθησία σε μεταβολές • Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης
- Μετατροπή μάζας σε ενέργεια

Μερικές φορές μπορούμε να προσεγγίζουμε περίπλοκες συναρτήσεις με άλλες απλούστερες, οι οποίες παρουσιάζουν την απαιτούμενη ακρίβεια για τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν και είναι ευκολότερες στον χειρισμό τους από τις αρχικές. Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις που θα δούμε εδώ καλούνται *γραμμικοποιήσεις* και βασίζονται στις εφαπτόμενες ευθείες. Άλλου είδους προσεγγιστικές συναρτήσεις θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 8.

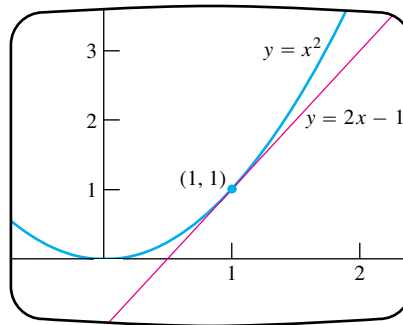
Θα εισαγάγουμε νέες μεταβλητές dx και dy , ορίζοντάς τις με τρόπο που δίνει νέο νόημα στον συμβολισμό του Leibniz dy/dx . Θα συμβολίσουμε με dy το σφάλμα σε μια μέτρηση, ή την ευαισθησία μιας συνάρτησης σε συνθήκες που μεταβάλλονται.

Γραμμικοποίηση

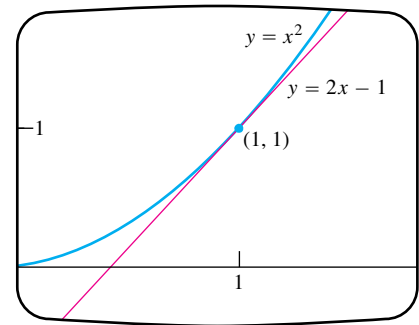


Όπως βλέπετε στο Σχήμα 3.54, η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2$ πλησιάζει την καμπύλη κοντά στο σημείο επαφής. Για ένα μικρό διάστημα εκατέρωθεν του σημείου επαφής, οι συντεταγμένες y των σημείων της εφαπτομένης προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις συντεταγμένες y των σημείων της καμπύλης. Το φαινόμενο φαίνεται καθαρότερα αν μεγεθύνουμε το γράφημα στο σημείο επαφής ή αν εξετάσουμε πίνακες τιμών της κατακόρυφης απόστασης σημείων της καμπύλης και σημείων της εφαπτομένης κοντά στο σημείο επαφής. Σε τοπική κλίμακα, κάθε διαφορίσιμη καμπύλη συμπεριφέρεται ως ευθεία.

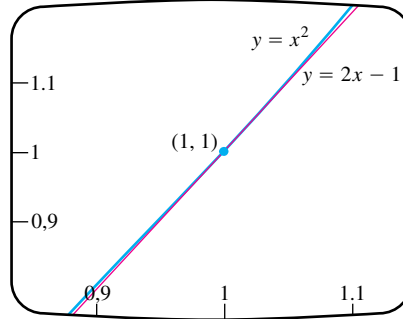
Γενικά, η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε σημείο $x = a$, όπου f είναι διαφορίσιμη (Σχήμα 3.55), διέρχεται από το σημείο $(a, f(a))$, και έτσι



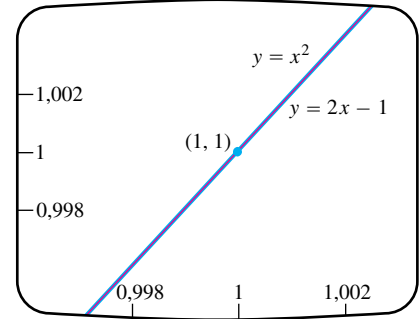
Φαίνεται η $y = x^2$ και η εφαπτομένη της $y = 2x - 1$ στο $(1, 1)$.



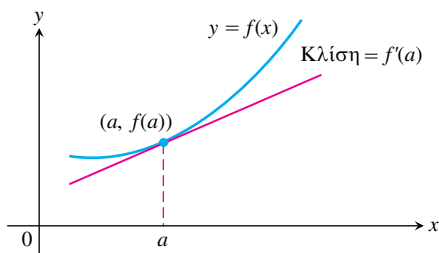
Κοντά στο σημείο $(1, 1)$ η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.



Σε όλο το διάστημα που φαίνεται, η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.



Σε ακόμα μικρότερη περιοχή σχεδίασης, η εφαπτομένη πλησιάζει τόσο πολύ την καμπύλη, ώστε δεν ξεχωρίζει η μια από την άλλη.



ΣΧΗΜΑ 3.55 Η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = a$ είναι η ευθεία $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

ΣΧΗΜΑ 3.54 Όσο περισσότερο μεγεθύνουμε το γράφημα μιας συνάρτησης σε διαφορετικό σημείο της, τόσο εξομαλύνεται η καμπύλη μοιάζοντας όλο και περισσότερο με την εφαπτομένη της στο εν λόγω σημείο.

η εξίσωση σημείου-κλίσεως γίνεται

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη είναι η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Για όσο διάστημα παραμένει κοντά στο γράφημα της f , η $L(x)$ αποτελεί καλή προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$.



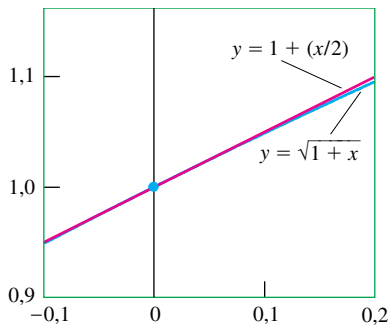
Ορισμός Γραμμικοποίηση

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

είναι η **γραμμικοποίηση** της f στο a .

Η προσέγγιση $f(x) \approx L(x)$ είναι η **κανονική γραμμική προσέγγιση** της f στο a . Το σημείο $x = a$ είναι το **κέντρο** της προσέγγισης.



ΣΧΗΜΑ 3.57 Μεγέθυνση του τετραγώνου του Σχήματος 3.56.

Παράδειγμα 1 Εύρεση γραμμικοποίησης

Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1+x}$ στο $x = 0$ (Σχήμα 3.56).

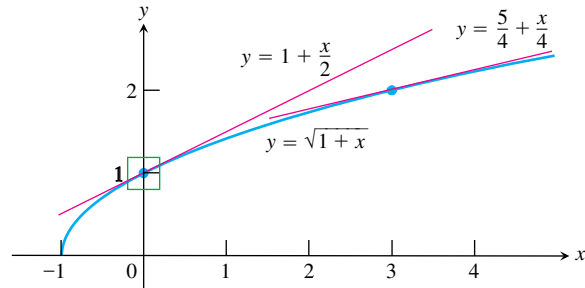
Λύση Εφόσον

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},$$

θα έχουμε $f(0) = 1, f'(0) = 1/2$, και

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Δείτε το Σχήμα 3.56.



ΣΧΗΜΑ 3.56 Γραφική παράσταση της $y = \sqrt{1+x}$ και των γραμμικοποιήσεών της στα σημεία $x = 0$ και $x = 3$. Το Σχήμα 3.57 δείχνει μια μεγέθυνση του τετραγώνου γύρω από το σημείο 1 του άξονα y .

Ας δούμε πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ για τιμές του x κοντά στο 0.

Προσέγγιση	Πραγματική τιμή – προσέγγιση
$\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,10$	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1,05} \approx 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{0,005}{2} = 1,00250$	$< 10^{-5}$

Καθώς απομακρυνόμαστε από το μηδέν, η ακρίβεια της προσέγγισης μειώνεται. Για παράδειγμα, για $x = 2$, η γραμμικοποίηση δίνει το 2 ως προσέγγιση του $\sqrt{3}$, αποτέλεσμα που δεν είναι ακριβές ούτε καν στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο.

Μην παρασυρθείτε από τους υπολογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος και νομίσετε ότι ο ρόλος της γραμμικοποίησης τελειώνει μόλις προμηθευτούμε έναν υπολογιστή τσέπης. Στην πράξη δεν θα εφαρμόζαμε ποτέ γραμμικοποίηση για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας κάποιου αριθμού. Η χρησιμότητα της γραμμικοποίησης έγκειται στη δυνατότητα που μας παρέχει να αντικαθιστούμε έναν περίπλοκο τύπο με κάποιον απλούστερο σε όλη την έκταση ενός διαστήματος τιμών. Για παράδειγμα, αν πρέπει να εργαστούμε με τη συνάρτηση $\sqrt{1+x}$ για x κοντά στο 0 και μας επιτρέπεται ένα μικρό σφάλμα, τότε αντ' αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα $1 + (x/2)$. Φυσικά, θα πρέπει να γνωρίζουμε πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα που υπεισέρχεται έτσι στους υπολογισμούς μας. Το ζήτημα αυτό θα το εξετάσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 8.

Μια γραμμική προσέγγιση γίνεται συνήθως λιγότερο ακριβής καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της. Όπως δείχνει το Σχήμα 3.56, η προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ παραείναι χονδροειδής για να είναι χρήσιμη κοντά στο $x = 3$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να γραμμικοποιήσουμε στο $x = 3$.

CD-ROM**ΔΙΚΤΥΟΤΟΠΟΣ****Βιογραφικά στοιχεία**

François Viète
(1540-1603)

Παράδειγμα 2 Εύρεση δεύτερης γραμμικοποίησης

Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1+x}$ στο $x = 3$.

Λύση Από την Εξίσωση (1), βρίσκουμε τη γραμμικοποίηση της f στο $x = 3$. Θέτοντας

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

παίρνουμε

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Για $x = 3,2$, η γραμμικοποίηση του Παραδείγματος 2 δίνει

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3,2}{4} = 1,250 + 0,800 = 2,050,$$

αποτέλεσμα που διαφέρει λιγότερο του ενός χιλιοστού από την ακριβή τιμή $\sqrt{4,2} \approx 2,04939$. Η γραμμικοποίηση του Παραδείγματος 1 δίνει

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx 1 + \frac{3,2}{2} = 1 + 1,6 = 2,6,$$

το οποίο απέχει από την ακριβή τιμή περισσότερο από 25%.

Παράδειγμα 3 Εύρεση ριζών και δυνάμεων

Η σημαντικότερη γραμμική προσέγγιση για ρίζες και δυνάμεις είναι

$$(1+x)^k \approx 1+kx \quad (x \text{ κοντά στο } 0, k \text{ τυχών αριθμός}) \quad (2)$$

(Άσκηση 7). Η προσέγγιση αυτή, που ισχύει για τιμές του x κοντά στο μηδέν, έχει ευρύ πεδίο εφαρμογών.

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του Παραδείγματος 3

Οι ακόλουθες προσεγγίσεις απορρέουν από το Παράδειγμα 3.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1+x$$

$k = -1$
αντικαθιστούμε
το x με το $-x$.

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4$$

$k = 1/3$
αντικαθιστούμε
το x με το $5x^4$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$k = -1/2$
αντικαθιστούμε
το x με το $-x^2$.

**Συνήθεις γραμμικές προσεγγίσεις,
 $x \approx 0$**

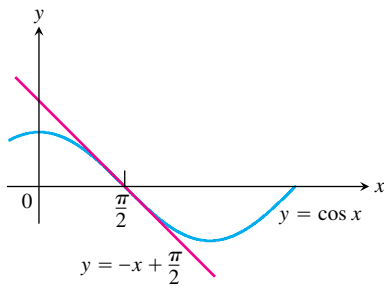
$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

$$(1+x)^k \approx 1+kx$$

(Άσκήσεις 6 και 7)



ΣΧΗΜΑ 3.58 Το γράφημα της $f(x) = \cos x$ και η γραμμικοποίησή της στο $x = \pi/2$. Κοντά στο $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$. (Παράδειγμα 5)

Παράδειγμα 5 Εύρεση γραμμικοποίησης

Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ στο $x = \pi/2$ (Σχήμα 3.58).

Λύση Εφόσον $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$, και $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, έχουμε

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Διαφορικά

Μερικές φορές συμβολίζουμε με dy/dx την παράγωγο του y ως προς x . Το σύμβολο αυτό, παρότι μοιάζει με λόγο δυο ποσοτήτων, δεν είναι κάτι τέτοιο. Εισάγουμε τώρα δυο νέες μεταβλητές dx και dy που έχουν την ιδιότητα ότι αν υπάρχει ο λόγος τους, θα ισούται με την παράγωγο.

Ορισμός Διαφορικά

Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Το **διαφορικό** dx είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Το **διαφορικό** dy ισούται με

$$dy = f'(x) dx.$$

Σε αντίθεση με την ανεξάρτητη μεταβλητή dx , η μεταβλητή dy είναι πάντα εξαρτημένη. Εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το dx .

Παράδειγμα 6 Εύρεση του διαφορικού dy

Να βρεθεί το dy αν

(α) $y = x^5 + 37x$

(β) $y = \sin 3x$.

Λύση

(α) $dy = (5x^4 + 37) dx$

(β) $dy = (3 \cos 3x) dx$

Αν $dx \neq 0$, τότε το πηλίκο του διαφορικού dy προς το διαφορικό dx ισούται με την παράγωγο $f'(x)$ διότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) dx}{dx} = f'(x).$$

Συνηθίζεται να γράφουμε

$$df = f'(x) dx$$

αντί για $dy = f'(x) dx$, οπότε καλούμε το df **διαφορικό της f** . Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2 - 6$, τότε

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx.$$

Κάθε τύπος παραγώγισης, π.χ. ο

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{ή} \quad \text{ο} \quad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

έχει μια αντίστοιχη διαφορική μορφή, π.χ. την

$$d(u+v) = du + dv \quad \text{ή} \quad \text{την} \quad d(\sin u) = \cos u du.$$

Το νόημα των dx και dy

Τις περισσότερες φορές, το διαφορικό dx της ανεξάρτητης μεταβλητής ισούται με τη μεταβολή Δx , αλλά εμείς δεν επιβάλαμε στον ορισμό τέτοιον περιορισμό.

Σε αντίθεση με την ανεξάρτητη μεταβλητή dx , η μεταβλητή dy είναι πάντοτε εξαρτημένη. Εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το dx .

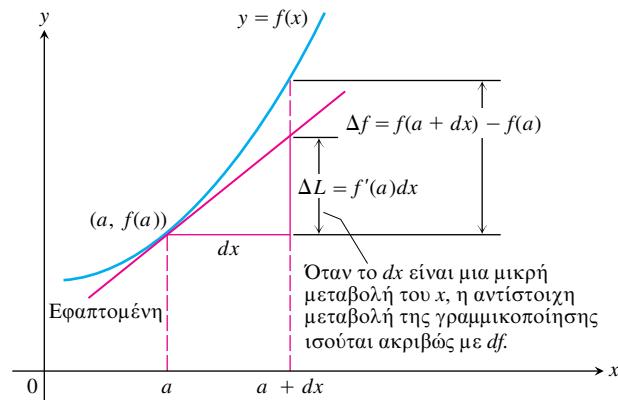
Παράδειγμα 7 Εύρεση διαφορικού συναρτήσεως

$$(α) \quad d(\tan 2x) = \sec^2(2x) d(2x) = 2 \sec^2 2x dx$$

$$(β) \quad d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)dx - x d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{xdx + dx - xdx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών

Έστω ότι γνωρίζουμε την τιμή μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως $f(x)$ σε ένα σημείο a και επιθυμούμε να προβλέψουμε πόσο θα μεταβληθεί η συγκεκριμένη τιμή της αν μετακινηθούμε στο γειτονικό σημείο $a + dx$. Αν το dx είναι μικρό, τόσο η f όσο και η γραμμικοποίησή της L στο a θα μεταβληθούν κατά την ίδια περίπου ποσότητα (Σχήμα 3.59). Και αφού οι τιμές της L υπολογίζονται εύκολα, η εύρεση της μεταβολής της L θα δίνει μια πρακτικά καλή εκτίμηση της μεταβολής της f .



ΣΧΗΜΑ 3.59 Προσεγγίζουμε τη μεταβολή της συνάρτησης f με τη μεταβολή της γραμμικοποίησης της f .

Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του Σχήματος 3.59, η μεταβολή της f είναι

$$\Delta f = f(a + dx) - f(a).$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της L είναι

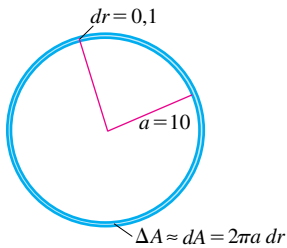
$$\begin{aligned} \Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \\ &= f'(a) dx. \end{aligned}$$

Έτσι, το διαφορικό $df = f'(x) dx$ αποκτά μια γεωμετρική ερμηνεία: Η τιμή του df στο $x = a$ ισούται με ΔL , που είναι η μεταβολή της γραμμικοποίησης της f που αντιστοιχεί στη μεταβολή dx .

Διαφορική εκτίμηση μεταβολής

Έστω ότι η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$. Η κατά προσέγγιση μεταβολή της τιμής της f καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο $a + dx$ είναι

$$df = f'(a) dx.$$



ΣΧΗΜΑ 3.60 Όταν το dr είναι μικρό συγκριτικά με το a , για παράδειγμα όταν $dr = 0,1$ και $a = 10$, το διαφορικό $dA = 2\pi a dr$ προσεγγίζει ικανοποιητικά το ΔA . (Παράδειγμα 8)

Παράδειγμα 8 Εκτίμηση μεταβολών με χρήση διαφορικών

Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνει από $a = 10$ m σε $a = 10,1$ m (Σχήμα 3.60). Αν μια πρώτη εκτίμηση της αύξησης του εμβαδού A του κυκλικού δίσκου δίδεται από το διαφορικό dA , να συγκρίνετε την εκτίμηση αυτή με την πραγματική μεταβολή ΔA .

Λύση Εφόσον $A = \pi r^2$, η εκτιμώμενη μεταβολή ισούται με

$$dA = A'(a) dr = 2\pi a dr = 2\pi(10)(0,1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

Η πραγματική μεταβολή είναι

$$\Delta A = \pi(10,1)^2 - \pi(10)^2 = (102,01 - 100)\pi = \underbrace{(2\pi)}_{dA} + \underbrace{(0,01\pi)}_{\text{σφάλμα}} \text{ m}^2.$$

Απόλυτη, σχετική, και ποσοστιαία μεταβολή

Καθώς μετακινούμαστε από το a στο γειτονικό σημείο $a + dx$, μπορούμε να περιγράψουμε τη μεταβολή της f με τρεις τρόπους:

	Πραγματική	Εκτιμώμενη
Απόλυτη μεταβολή	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a) dx$
Σχετική μεταβολή	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Ποσοστιαία μεταβολή	$\frac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\frac{df}{f(a)} \times 100$

Παράδειγμα 9 Υπολογισμός ποσοστιαίας μεταβολής

Η εκτιμώμενη ποσοστιαία μεταβολή του εμβαδού του κύκλου στο Παράδειγμα 8 είναι

$$\frac{dA}{A(a)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\%.$$

Η πραγματική ποσοστιαία μεταβολή είναι

$$\frac{\Delta A}{A(a)} \times 100 = \frac{2,01\pi}{100\pi} \times 100 = 2,01\%.$$

Παράδειγμα 10 Έμφραξη αρτηριών

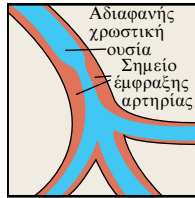
Στα τέλη της δεκαετίας του 1830, ο Γάλλος φυσιολόγος Jean Poiseuille (Πουαζόι) ανακάλυψε έναν μαθηματικό τύπο που περιγράφει πόσο πρέπει να διασταλεί η ακτίνα μιας μερικώς εμφραγμένης αρτηρίας για να αποκατασταθεί η κανονική ροή του αίματος. Ο τύπος του Poiseuille, που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα, είναι

$$V = kr^4,$$

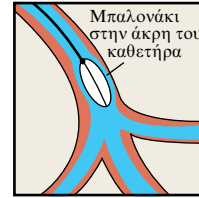
και μας λέει ότι ο όγκος V του υγρού που διέρχεται από μικρό σωλήνα ανά μονάδα χρόνου υπό σταθερή πίεση είναι ανάλογος της τέταρτης δύναμης της ακτίνας r του σωλήνα. Πώς θα επηρεάσει τον όγκο V μια αύξηση της ακτίνας r κατά 10%;

Λύση Τα διαφορικά των r και V συνδέονται μέσω της εξίσωσης

$$dV = \frac{dV}{dr} dr = 4kr^3 dr.$$

**Αγγειογράφιση**

Αδιαφανής χρωστική ουσία εγχέεται στη μερικώς εμφραγμένη αρτηρία, καθιστώντας δυνατή την παρατήρησή της με ακτίνες Χ. Έτσι εντοπίζεται το ακριβές σημείο της έμφραξης και διαπιστώνεται η σοβαρότητα του προβλήματος.

**Αγγειοπλαστική**

Στο εσωτερικό της αρτηρίας εισάγεται καθετήρας και το μπαλονάκι που βρίσκεται στην απόληξή του διογκώνεται, διευρύνοντας την αρτηρία στο σημείο έμφραξης.

Η σχετική μεταβολή του V είναι

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = 4 \frac{dr}{r}.$$

Η σχετική μεταβολή του V είναι τετραπλάσια της σχετικής μεταβολής του r , κι έτσι μια αύξηση κατά 10% του r θα οδηγήσει σε αύξηση της ροής κατά 40%.

Ευαισθησία σε μεταβολές

Η εξίσωση $df = f'(x) dx$ μας λέει πόσο *ευαίσθητη* είναι η τιμή εξόδου της f σε μεταβολές των τιμών εισόδου, για διάφορα x . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της f' στο x , τόσο μεγαλύτερες συνέπειες προκαλεί μια δεδομένη μεταβολή dx .

Παράδειγμα 11 Εύρεση του βάθους πηγαδιού

Σας ζητείται να υπολογίσετε το βάθος πηγαδιού κάνοντας χρήση της εξίσωσης $s = 4,9t^2$ και χρονομετρώντας πόσο κάνει να ακουστεί ο παφλασμός μιας πέτρας από τη στιγμή που την αφήνετε να πέσει στο πηγάδι. Πόση ευαισθησία εμφανίζουν οι υπολογισμοί σας σε σφάλμα 0,1 sec στη χρονομέτρηση;

Λύση Το ds στην εξίσωση

$$ds = 9,8t dt$$

εξαρτάται από τον χρόνο t . Για $t = 2$ sec και $dt = 0,1$, το σφάλμα στον υπολογισμό είναι

$$ds = 9,8(2)(0,1) = 1,96 \text{ m.}$$

Τρία δευτερόλεπτα αργότερα, για $t = 5$ sec, το ίδιο dt δίνει σφάλμα

$$ds = 9,8(5)(0,1) = 4,9 \text{ m.}$$

Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης

Έστω συνάρτηση $f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και έστω Δx μια μεταβολή του x . Υπάρχουν δύο τρόποι περιγραφής της μεταβολής της f καθώς το x μεταβάλλεται από a σε $a + \Delta x$:

Η πραγματική μεταβολή: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Η διαφορική εκτίμηση: $df = f'(a) \Delta x$.

Πόσο αξιόπιστα προσεγγίζει το διαφορικό df τη μεταβολή Δf ;

Μετράμε το σφάλμα προσέγγισης αφαιρώντας το df από το Δf :

$$\begin{aligned}\text{Προσεγγιστικό σφάλμα} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a) \Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a) \Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right)}_{\text{Έστω } \epsilon \text{ η ποσότητα αυτή}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x.\end{aligned}$$

Καθώς $\Delta x \rightarrow 0$, το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

τείνει στο $f'(a)$ (θυμηθείτε τον ορισμό της παραγώγου $f'(a)$), και η ποσότητα εντός της παρενθέσεως γίνεται ένας πολύ μικρός αριθμός (που τον ονομάζουμε συνεπώς ϵ). Ουσιαστικά, $\epsilon \rightarrow 0$ καθώς $\Delta x \rightarrow 0$. Για μικρό Δx , το προσεγγιστικό σφάλμα $\epsilon \Delta x$ είναι ακόμη μικρότερο.

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{πραγματική μεταβολή}} = \underbrace{f'(a) \Delta x}_{\text{εκτιμώμενη μεταβολή}} + \underbrace{\epsilon \Delta x}_{\text{σφάλμα}}$$

Παρόλο που δεν ξέρουμε ακριβώς πόσο μικρό είναι το σφάλμα, και ούτε μπορούμε να πούμε περισσότερα επί του θέματος προτού μελετήσουμε το Κεφάλαιο 8, υπάρχει κάτι που αξίζει της προσοχής μας στο σημείο αυτό: η *μορφή* της τελευταίας εξίσωσης.

Μεταβολή της $y = f(x)$ κοντά στο $x = a$

Αν η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$ και το x μεταβάλλεται από a σε $a + \Delta x$, η μεταβολή Δy της f δίδεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \epsilon \Delta x \quad (3)$$

όπου $\epsilon \rightarrow 0$ καθώς $\Delta x \rightarrow 0$.

Μετατροπή μάζας σε ενέργεια

Παράδειγμα 12 Χρήση προσεγγίσεων στη φυσική του Einstein

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma,$$

εμπεριέχει την υπόθεση ότι η μάζα είναι σταθερή, αλλά γνωρίζουμε ότι αυτό δεν είναι αυστηρά σωστό εφόσον η μάζα ενός σώματος αυξάνεται με την ταχύτητά του. Στον ορθότερο τύπο του Einstein, η μάζα έχει την τιμή

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

όπου η «μάζα ηρεμίας» m_0 παριστάνει τη μάζα ακίνητου σώματος και c είναι η ταχύτητα του φωτός που ισούται με 300.000 km/sec περίπου. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} x^2 \quad (4)$$

από το Παράδειγμα 4 για να εκτιμήσετε τη μεταβολή της μάζας Δm εξαιτίας της κίνησης με ταχύτητα v .

Λύση

Όταν το v είναι πολύ μικρότερο του c , η ποσότητα v^2/c^2 είναι σχεδόν μηδενική και είναι ικανοποιητική η χρήση της προσέγγισης

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)$$

[Εξίσωση (4) με $x = v/c$], οπότε

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

δηλαδή

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right). \quad (5)$$

Η Εξίσωση (5) εκφράζει την αύξηση της μάζας λόγω αύξησης της ταχύτητας v .

Ερμηνεία

Στη νευτώνεια φυσική, $(1/2)m_0 v^2$ είναι η κινητική ενέργεια (ΚΕ) του σώματος, οπότε αν ξαναγράψουμε την Εξίσωση (5) στη μορφή

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

βλέπουμε ότι

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 (0)^2 = \Delta(\text{ΚΕ}),$$

δηλαδή

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{ΚΕ}). \quad (6)$$

Με άλλα λόγια, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας $\Delta(\text{ΚΕ})$ καθώς το σώμα μεταβαίνει από ταχύτητα 0 σε ταχύτητα v ισούται κατά προσέγγιση με $(\Delta m)c^2$.

Αντικαθιστώντας το c με την αριθμητική του τιμή $3 \times 10^8 \text{ m/sec}$, η Εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή

$$\Delta(\text{ΚΕ}) \approx 90.000.000.000.000.000 \Delta m \text{ Joule} \quad \text{Η μάζα σε kg}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι μια μικρή μεταβολή στη μάζα προξενεί μεγάλη μεταβολή στην ενέργεια. Η ενέργεια που απελευθερώνει μια ατομική βόμβα 20 κιλοτόνων, για παράδειγμα, προκύπτει από τη μετατροπή ενός, μόλις, γραμμαρίου μάζας σε ενέργεια. Το προϊόντα δηλαδή της έκρηξης ζυγίζουν μόλις 1 g λιγότερο από το αρχικό υλικό προ της έκρηξης. Ένα κέρμα του ενός λεπτού ζυγίζει περίπου 3 g!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.6

Εύρεση γραμμικοποιήσεων

CD-ROM

Διακτυότοπος

Στις Ασκήσεις 1-5, βρείτε τη γραμμικοποίηση $L(x)$ της συνάρτησεως $f(x)$ στο $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$

6. **Συνήθειες γραμμικές προσεγγίσεις στο $x = 0$** Να βρεθούν οι γραμμικοποιήσεις των ακόλουθων συναρτήσεων στο $x = 0$.

(α) $\sin x$

(β) $\cos x$

(γ) $\tan x$

CD-ROM
ΔικτυότοποςCD-ROM
Δικτυότοπος**Γραμμικοποιήσεις για δυνάμεις και ρίζες**

7. Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^k$ στο $x = 0$ είναι $L(x) = 1 + kx$.
8. Χρησιμοποιήστε τη γραμμική προσέγγιση $(1+x)^k \approx 1 + kx$ για να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο μηδέν.

(α) $f(x) = (1-x)^6$

(β) $f(x) = \frac{2}{1-x}$

(γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(δ) $f(x) = \sqrt{2+x^2}$

(ε) $f(x) = (4+3x)^{1/3}$

(στ) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{2+x}\right)^2}$

Η γραμμικοποίηση ως προσέγγιση

Στις Ασκήσεις 9-12, επιλέξτε μια γραμμικοποίηση με κέντρο όχι το $x = a$ αλλά ένα κοντινό σημείο όπου η συνάρτηση και η παράγωγος υπολογίζονται εύκολα. Δηλώστε ποια γραμμικοποίηση κάνατε και ποιο το κέντρο της.

9. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $a = -0,9$

10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8,5$

11. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $a = 1,3$

12. $f(x) = \cos x$, $a = 1,7$

13. **Γρηγορότερα κι από κομπιουτεράκι** Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $(1+x)^k \approx 1 + kx$ για να εκτιμήσετε τις ακόλουθες ποσότητες.

(α) $(1,0002)^{50}$

(β) $\sqrt[3]{1,009}$

14. **Μάθετε γράφοντας** Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ στο $x = 0$. Πώς σχετίζεται αυτή με τις επιμέρους γραμμικοποιήσεις των ποσοτήτων $\sqrt{x+1}$ και $\sin x$ στο $x = 0$;

Παράγωγοι σε διαφορική μορφή

Στις Ασκήσεις 15-24, βρείτε το dy .

15. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

16. $y = x\sqrt{1-x^2}$

17. $y = \frac{2x}{1+x^2}$

18. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

19. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

20. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

21. $y = \sin(5\sqrt{x})$

22. $y = \cos(x^2)$

23. $y = 4 \tan(x^3/3)$

24. $y = \sec(x^2 - 1)$

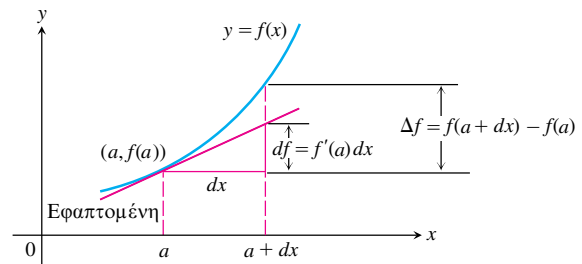
Προσεγγιστικό σφάλμα

Στις Ασκήσεις 25-28, η συνάρτηση f μεταβάλλεται καθώς το x μεταβαίνει από το a στο $a + dx$. Βρείτε

(α) την απόλυτη μεταβολή $\Delta f = f(a + dx) - f(a)$

(β) την εκτιμώμενη μεταβολή $df = f'(a) dx$

(γ) το προσεγγιστικό σφάλμα $|\Delta f - df|$.



25. $f(x) = x^2 + 2x$, $a = 0$, $dx = 0,1$

26. $f(x) = x^3 - x$, $a = 1$, $dx = 0,1$

27. $f(x) = x^{-1}$, $a = 0,5$, $dx = 0,05$

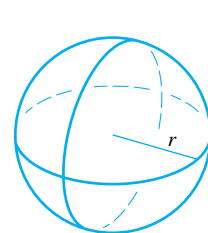
28. $f(x) = x^4$, $a = 1$, $dx = 0,01$

Διαφορικές εκτιμήσεις μεταβολών

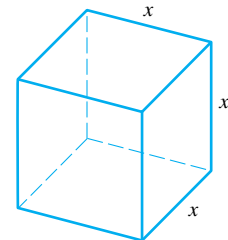
Στις Ασκήσεις 29-32, γράψτε έναν διαφορικό τύπο που να εκτιμά την εκάστοτε μεταβολή όγκου ή εμβαδού επιφανείας.

29. **Όγκος** Η μεταβολή του όγκου σφαίρας $V = (4/3)\pi r^3$ όταν η ακτίνα της μεταβάλλεται από a σε $a + dr$

30. **Εμβαδόν επιφανείας** Η μεταβολή του εμβαδού επιφάνειας σφαίρας $S = 4\pi r^2$ όταν η ακτίνα της μεταβάλλεται από a σε $a + dr$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$$



$$V = x^3, \quad S = 6x^2$$

31. **Όγκος** Η μεταβολή του όγκου κύβου $V = x^3$ όταν τα μήκη των ακμών του μεταβάλλονται από a σε $a + dx$

32. **Εμβαδόν επιφανείας** Η μεταβολή του εμβαδού επιφάνειας κύβου $S = 6x^2$ όταν τα μήκη των ακμών του μεταβάλλονται από a σε $a + dx$

Εφαρμογές

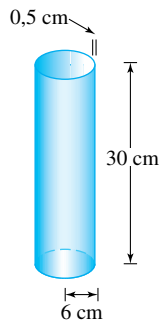
33. **Κύκλος που διαστέλλεται** Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται από 2,00 σε 2,02 m.

(α) Εκτιμήστε την προκύπτουσα μεταβολή του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

(β) Εκφράστε την εκτίμηση αυτή ως ποσοστό του αρχικού εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

34. **Δέντρο που μεγαλώνει** Ένα δέντρο είχε κορμό διαμέτρου 10 cm. Το επόμενο έτος, η περιφέρεια του κορμού αυξήθηκε κατά 2 cm. Πόσο περίπου αυξήθηκε η διάμετρος καθώς και το εμβαδόν διατομής του κορμού;

35. **Εκτίμηση όγκου** Εκτιμήστε πόσος όγκος περιέχεται σε κυλινδρικό κέλυφος ύψους 30 cm, ακτίνας 6 cm, και πάχους 0,5 cm.



36. **Εκτίμηση ύψους** Ένας τεχνικός που στέκεται σε απόσταση 30 m από τη βάση ενός κτιρίου, μετρά τη γωνία με την οποία φαίνεται η κορυφή του κτιρίου, και τη βρίσκει ίση με 75° . Αν θέλουμε το σφάλμα στην εκτίμηση του ύψους του κτιρίου να μην υπερβαίνει το 4%, τότε με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η γωνία αυτή;
37. **Επιτρεπτό σφάλμα** Το ύψος ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου ισούται με την ακτίνα του, οπότε ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi h^3$. Ο όγκος πρέπει να υπολογιστεί με σφάλμα το πολύ 1% της πραγματικής τιμής του. Υπολογίστε κατά προσέγγιση το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη μέτρηση του h , και εκφράστε το ως ποσοστό επί της πραγματικής τιμής του h .
38. **Επιτρεπτό σφάλμα**
- (α) Με πόση περίπου ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η εσωτερική διάμετρος μιας κυλινδρικής δεξαμενής ύψους 10 m, έτσι ώστε ο υπολογισμός της χωρητικότητάς της να έχει σφάλμα μικρότερο του 1%;
 - (β) Με πόση περίπου ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η εξωτερική διάμετρος της ίδιας δεξαμενής έτσι ώστε αν υπολογίσουμε την απαιτούμενη ποσότητα μολύβδου για να βαφτεί η πλευρική επιφάνεια της δεξαμενής, να μην κάνουμε σφάλμα μεγαλύτερο του 5%;
39. **Έκδοση νομισμάτων** Το νομισματοκοπείο πρόκειται να εκδόσει μια σειρά νομισμάτων. Περίπου πόσο σφάλμα dr στην ακτίνα των νομισμάτων είναι επιτρεπτό, ώστε κάθε νόμισμα να μην αποκλίνει περισσότερο από 1/1000 από το ιδανικό του βάρος; Υποθέστε ότι το πάχος κάθε νομίσματος δεν μεταβάλλεται.
40. **Σχεδιάζοντας τη μεταβολή του όγκου ενός κύβου** Ο όγκος $V = x^3$ ενός κύβου με μήκη πλευρών x αυξάνεται κατά ΔV όταν το x αυξηθεί κατά Δx . Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να δείξετε πώς η μεταβολή ΔV μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά ως το άθροισμα των όγκων

- (α) τριών πλακών με διαστάσεις x επί x επί Δx , και
- (β) τριών ράβδων με διαστάσεις x επί Δx επί Δx , και
- (γ) ενός κύβου με διαστάσεις Δx επί Δx επί Δx .

Ο διαφορικός τύπος $dV = 3x^2 dx$ περιλαμβάνει μονάχα τη συνεισφορά των τριών πλακών.

41. **Η επίδραση που ασκούν στην καρδιά οι ελιγμοί πτήσεως** Το μηχανικό έργο που παράγεται κατά τη λειτουργία της κυριότερης αντλίας της καρδιάς, της αριστερής κοιλίας, δίδεται από την εξίσωση

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

όπου W είναι το έργο ανά μονάδα χρόνου, P είναι η μέση πίεση του αίματος, V είναι ο όγκος του αίματος που αντλείται σε μοναδιαίο χρόνο, δ είναι το ειδικό βάρος του αίματος, v η μέση ταχύτητα του αίματος καθώς εξέρχεται από την κοιλία, και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για σταθερά P , V , δ , και v , το W γίνεται συνάρτηση του g , και η εξίσωση παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ σταθερές}).$$

Ως μέλος της ιατρικής ομάδας της NASA, θέλετε να ξέρετε πόσο ευαίσθητο είναι το W σε φαινομενικές μεταβολές του g εξαιτίας των ελιγμών πτήσεως, αλλά η μεταβολή αυτή του W εξαρτάται και από την αρχική τιμή του g . Αποφασίζετε να συγκρίνετε την επίδραση που έχει στο W μια δεδομένη μεταβολή dg στη Σελήνη, όπου $g = 1,6 \text{ m/sec}^2$, με την επίδραση που η ίδια μεταβολή dg θα είχε στη Γη, όπου $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. Χρησιμοποιήστε την απλοποιημένη εξίσωση που δίδεται παραπάνω για να βρείτε τον λόγο $dW_{\text{Σελήνη}} / dW_{\text{Γη}}$.

42. **Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας** Όταν κρατάμε σταθερό το μήκος L ενός ρολογιού με εκκρεμές ελέγχοντας τη θερμοκρασία, η περίοδος T του εκκρεμούς εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g . Συνεπώς, αν μετακινούμε το εκκρεμές από τόπο σε τόπο στη γήινη επιφάνεια, η περίοδος θα μεταβάλλεται εξαιτίας της μεταβολής του g . Μετρώντας και καταγράφοντας το ΔT , μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή του g από την εξίσωση $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ που συσχετίζει τα T , g , και L .
- (α) Με το L σταθερό και το g ως ανεξάρτητη μεταβλητή, υπολογίστε το dT και χρησιμοποιήστε το στα (β) και (γ).
- (β) **Μάθετε γράφοντας** Αν αυξηθεί το g , τότε το T θα αυξηθεί ή θα μειωθεί; Το ρολόι θα πηγαίνει τότε πιο γρήγορα ή πιο αργά; Εξηγήστε.
- (γ) Ένα ρολόι με εκκρεμές μήκους 100 cm μετακινείται από τοποθεσία όπου $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ σε μια νέα τοποθεσία. Η μετακίνηση αυτή προκαλεί μια αύξηση της περιόδου κατά $dT = 0,001 \text{ sec}$. Βρείτε το dg και εκτιμήστε την τιμή του g στη νέα τοποθεσία.
43. **Μεγεθύνοντας για να «δούμε» τη διαφορισιμότητα** Είναι καμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις διαφορίσιμη στο $x = 0$;

$$f(x) = |x| + 1, \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 0,0001} + 0,99$$

- (α) Ξέρουμε ήδη ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$, όπου το γράφημά της εμφανίζει γωνιώδη χαρακτηριστήρα. Σχεδιάστε την f και μεγεθύνετε αρκετές φορές το γράφημα στο σημείο $(0, 1)$. Δείχνει καθόλου ίχνη «εξομάλυνσης» το γωνιακό σημείο;
- (β) Κάνετε το ίδιο με τη συνάρτηση g . Δείχνει καθόλου ίχνη «εξομάλυνσης» το γράφημα της g ; Γνωρίζουμε ότι η g είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ και μάλιστα έχει οριζόντια εφαπτομένη εκεί.
- (γ) Πόσες μεγεθύνσεις απαιτούνται για να φαίνεται το γράφημα της g ακριβώς σαν μια οριζόντια ευθεία;
- (δ) Σχεδιάστε τώρα την f και την g μαζί, δηλαδή σε ενιαίο σχήμα. Οι δυο καμπύλες μοιάζουν ταυτόσημες προτού αρχίσετε τις μεγεθύνσεις. Η διαφορί-

σιμη συνάρτηση τελικά εξομαλύνεται, ενώ η μη διαφορίσιμη συνάρτηση παραμένει εντυπωσιακά αμετάβλητη.

- Τ 44. Μέτρηση της παραγώγου από το γράφημα** Η ιδέα ότι οι διαφορίσιμες καμπύλες εξομαλύνονται όταν μεγεθυνθούν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τις τιμές των παραγώγων συναρτήσεων σε διάφορα σημεία τους. Μεγεθύνουμε την καμπύλη στο σημείο που μας ενδιαφέρει μέχρις ότου το τμήμα της που βλέπουμε να μοιάζει με ευθεία, και κατόπιν μετράμε πάνω στο γράφημα την κλίση της εξομαλυνθείσας καμπύλης.

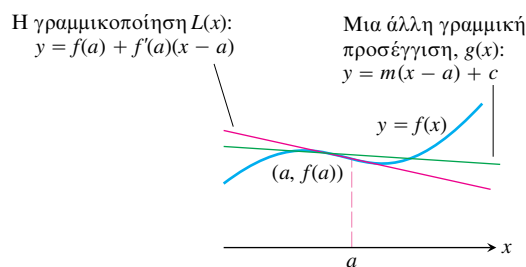
(α) Για να δείτε πώς εξελίσσεται η διαδικασία, κάντε μια πρώτη δοκιμή με τη συνάρτηση $y = x^2$ στο $x = 1$. Η κλίση που μετράτε θα πρέπει να ισούται με 2.

(β) Κατόπιν, εφαρμόστε τη διαδικασία στην καμπύλη $y = e^x$ στα σημεία $x = 1$, $x = 0$, και $x = -1$. Συγκρίνετε την εκτίμηση της παραγώγου που κάνετε με την τιμή της e^x στο εκάστοτε σημείο. Διακρίνετε κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά; Δοκιμάστε και με άλλες τιμές του x .

- 45. Η γραμμικοποίηση είναι η καλύτερη γραμμική προσέγγιση** (Γι' αυτό και τη χρησιμοποιούμε.) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$ και ότι η $g(x) = m(x - a) + c$ είναι μια γραμμική συνάρτηση, όπου m και c σταθερές. Αν το σφάλμα $E(x) = f(x) - g(x)$ ήταν ικανοποιητικά μικρό στο $x = a$, θα θέλαμε να επιλέξουμε την g ως γραμμική προσέγγιση της f , αντί της γραμμικοποίησης $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Δείξτε ότι αν επιβάλουμε στην g τους περιορισμούς

- $E(a) = 0$ Το προσεγγιστικό σφάλμα μηδενίζεται για $x = a$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x - a} = 0$ Το σφάλμα είναι ασήμαντο συγκρινόμενο με το $x - a$.

τότε $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Συνεπώς, η γραμμικοποίηση $L(x)$ αποτελεί τη μόνη γραμμική προσέγγιση της οποίας το σφάλμα και μηδενίζεται στο $x = a$ και είναι αμελητέο σε σύγκριση με την ποσότητα $x - a$.



- 46. Δευτεροβάθμιες προσεγγίσεις**

(α) Έστω $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ μια δευτεροβάθμια προσέγγιση της $f(x)$ στο $x = a$ με τις ιδιότητες:

- $Q(a) = f(a)$
- $Q'(a) = f'(a)$
- $Q''(a) = f''(a)$

Προσδιορίστε τους συντελεστές b_0 , b_1 , και b_2 .

(β) Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $f(x) = 1/(1 - x)$ στο $x = 0$.

- Τ (γ)** Παραστήστε γραφικά την $f(x) = 1/(1 - x)$ και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της στο $x = 0$. Κατόπιν μεγεθύνετε και τα δύο γραφήματα στο σημείο $(0, 1)$. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

- Τ (δ)** Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $g(x) = 1/x$ στο $x = 1$. Παραστήστε γραφικά σε κοινό σχήμα την g και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

- Τ (ε)** Βρείτε τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της $h(x) = \sqrt{1 + x}$ στο $x = 0$. Παραστήστε γραφικά σε κοινό σχήμα την h και τη δευτεροβάθμια προσέγγισή της. Σχολιάστε την εικόνα που βλέπετε.

(στ) Ποιες είναι οι γραμμικοποιήσεις των f , g , και h στα αντίστοιχα σημεία των (β), (δ), και (ε);

- 47.** Η προσέγγιση της $\sqrt{1 + x}$ από τη γραμμικοποίησή της στην αρχή των αξόνων θα πρέπει να βελτιώνεται καθώς $x \rightarrow 0$. Υποστηρίξτε την πρόταση αυτή δείχνοντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{1 + (x/2)} = 1.$$

- 48. Μάθετε γράφοντας** Έστω ότι το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ έχει μια οριζόντια εφαπτομένη στο $x = a$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη γραμμικοποίηση της f στο $x = a$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- Τ 49. Γραμμικοποιήσεις σε σημεία καμπής** Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.58, οι γραμμικοποιήσεις αποβαίνουν ιδιαίτερα ικανοποιητικές σε σημεία καμπής. Το γιατί θα το καταλάβετε στο Κεφάλαιο 8. Ως ένα άλλο παράδειγμα, σχεδιάστε την οφιοειδή του Νεύτωνα, $f(x) = 4x/(x^2 + 1)$, σε κοινό σχήμα με τις γραμμικοποιήσεις της στα σημεία $x = 0$ και $x = \sqrt{3}$.

- 50. Μάθετε γράφοντας: Επαναλαμβανόμενος υπολογισμός ρίζας**

(α) Αφού πληκτρολογήσετε τον αριθμό 2 στο κομπιουτεράκι σας, υπολογίστε διαδοχικές τετραγωνικές ρίζες πατώντας κατ' επανάληψη το πλήκτρο της τετραγωνικής ρίζας (ή υψώνοντας εις την 0,5 τον εκάστοτε αριθμό που βλέπετε στην οθόνη σας). Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά παρατηρείτε; Εξηγήστε τι συμβαίνει. Τι θα συμβεί αν υπολογίσετε κατ' επανάληψη διαδοχικές δέκατες ρίζες;

(β) Επαναλάβετε τη διαδικασία με αρχικό αριθμό τον 0,5 αντί του 2. Τι προκύπτει τώρα; Δοκιμάστε με οποιονδήποτε θετικό αριθμό x αντί του 2. Εξηγήστε τι συμβαίνει.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σύγκριση συναρτήσεων με τις γραμμικοποιήσεις τους

Στις Ασκήσεις 51-54, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτιμήσετε το μέτρο του σφάλματος που προκύπτει αν χρησιμοποιήσετε τη γραμμικοποίηση αντί της ίδιας της συνάρτησης στο καθορισμένο διάστημα I . Εκτελέστε τα ακόλουθα.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση f στο I .

(β) Βρείτε τη γραμμικοποίηση L της συναρτήσεως στο σημείο a .

- (γ) Σχεδιάστε την f και την L σε ενιαίο σχήμα.
- (δ) Παραστήστε γραφικά το απόλυτο σφάλμα $|f(x) - L(x)|$ στο διάστημα I και βρείτε τη μέγιστη τιμή του.
- (ε) Από το σχήμα σας του ερωτήματος (δ), εκτιμήστε το μεγαλύτερο δυνατόν $\delta > 0$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

για $\epsilon = 0,5, 0,1$, και $0,01$. Κατόπιν ελέγξτε γραφικά τις εκτιμήσεις του δ που κάνατε για να δείτε αν είναι σωστές.

51. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $[-1, 2]$, $a = 1$

52. $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}$, $[-3/4, 1]$, $a = \frac{1}{2}$

53. $f(x) = x^{2/3}(x-2)$, $[-2, 3]$, $a = 2$

54. $f(x) = \sqrt{x} - \sin x$, $[0, 2\pi]$, $a = 2$

3.7

Μέθοδος του Νεύτωνα

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα • Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου • Συνήθως η μέθοδος συγκλίνει • Όμως κάτι μπορεί να πάει στραβά • Μορφοκλασματικές λεκάνες και η μέθοδος του Νεύτωνα

CD-ROM

Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Neils Henrik Abel
(1802-1829)

Έχουμε στη διάθεσή μας απλούς τύπους επίλυσης γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ενώ για εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού υπάρχουν άλλοι πιο περίπλοκοι τύποι. Κάποτε οι επιστήμονες πίστευαν ότι θα μπορούσαν να βρεθούν παρόμοιοι τύποι για εξισώσεις βαθμού πέμπτου και άνω, αλλά ο Νορβηγός μαθηματικός Neils Henrik Abel έδειξε ότι αυτό είναι αδύνατο για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από τέσσερα.

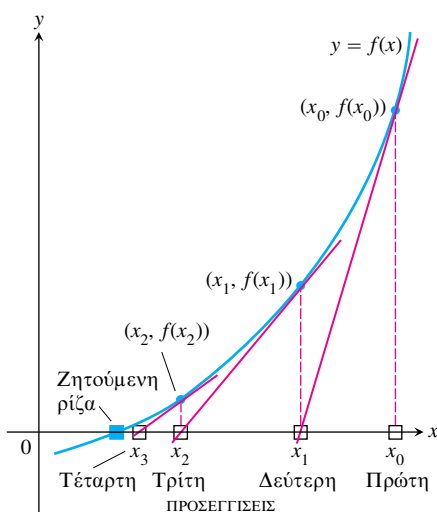
Όταν δεν διαθέτουμε ακριβείς τύπους επίλυσης της εξίσωσης $f(x)=0$, μπορούμε να προστρέξουμε σε αριθμητικές μεθόδους του απειροστικού λογισμού για να προσεγγίσουμε τις λύσεις που αναζητούμε. Μία από τις τεχνικές αυτές είναι η *μέθοδος του Νεύτωνα* (Newton), ή, ακριβέστερα, η *μέθοδος των Newton-Raphson*. Η βασική ιδέα της τεχνικής αυτής είναι να αντικαταστήσουμε την καμπύλη $y = f(x)$ σε σημεία μηδενισμού της f , με εφαπτόμενες ευθείες. Και εδώ, όπως θα δούμε, η γραμμικοποίηση παίζει ουσιώδη ρόλο.

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα

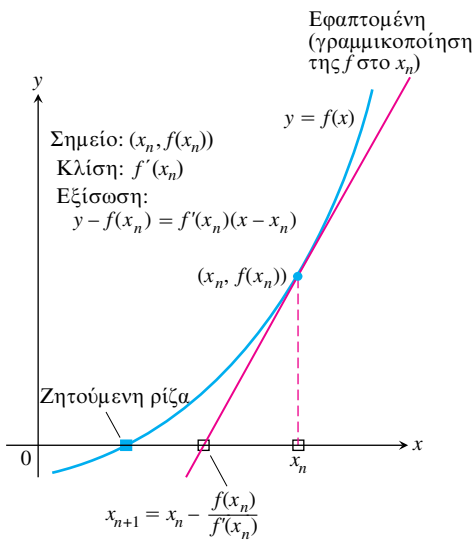
Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια αριθμητική μέθοδος που προσεγγίζει το σημείο μηδενισμού μιας συναρτήσεως με τα σημεία μηδενισμού διαδοχικών γραμμικοποιήσεών της. Αν οι συνθήκες είναι ευνοϊκές, οι ρίζες των γραμμικοποιήσεων *συγκλίνουν* ταχύτατα σε μια προσέγγιση ικανοποιητικής ακρίβειας. Επιπλέον, η μέθοδος εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα συναρτήσεων, και συνήθως αποδίδει καρπούς μετά από λίγα μόνο βήματα. Ας δούμε τώρα πώς δουλεύει.

Μπορούμε να επιλέξουμε μια τιμή εκκινήσεως, x_0 , από το γράφημα της συναρτήσεως ή και απλώς στην τύχη. Κατόπιν η μέθοδος προσεγγίζει την καμπύλη $y = f(x)$ στο $(x_0, f(x_0))$ με την εφαπτομένη της, καλώντας x_1 το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα x (Σχήμα 3.61). Συνήθως ο αριθμός x_1 αποτελεί καλύτερη προσέγγιση της ρίζας απ' ό,τι ο x_0 . Το σημείο x_2 όπου τέμνει τον άξονα x η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_1, f(x_1))$ είναι ο επόμενος όρος στην ακολουθία προσεγγίσεων. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας κάθε προσέγγιση για να παραγάγουμε την επόμενη μέχρι να έρθουμε σε ικανοποιητική απόσταση από τη ρίζα, οπότε σταματάμε.

Υπάρχει ένας τύπος που δίνει την $(n+1)$ -στή προσέγγιση x_{n+1} συναρτήσει της n -στής προσέγγισης x_n . Η εξίσωση σημείου-κλίσεως για



ΣΧΗΜΑ 3.61 Η μέθοδος του Νεύτωνα ξεκινά με την επιλογή μιας τιμής εκκινήσεως x_0 , την οποία (υπό ευνοϊκές συνθήκες) σταδιακά βελτιώνει.



ΣΧΗΜΑ 3.62 Η γεωμετρία των διαδοχικών προσεγγίσεων της μεθόδου του Νεύτωνα. Από το x_n κινούμαστε κατακόρυφα ως την καμπύλη και μετά ακολουθούμε την εφαπτομένη προς τα κάτω μέχρι το x_{n+1} .

την εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_n, f(x_n))$ είναι

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Μπορούμε να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα x θέτοντας $y = 0$ (Σχήμα 3.62).

$$\begin{aligned} 0 - f(x_n) &= f'(x_n)(x - x_n) \\ -f(x_n) &= f'(x_n) \cdot x - f'(x_n) \cdot x_n \\ f'(x_n) \cdot x &= f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n) \\ x &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Αν $f'(x_n) \neq 0$

Η τιμή αυτή του x είναι η επόμενη προσέγγιση x_{n+1} . Συνοψίζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα στον πίνακα που ακολουθεί.

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα

1. Επιλέγουμε (αυθαίρετα) μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η επιλογή μας αυτή γίνεται ορθολογικότερα αν έχουμε το γράφημα της $y = f(x)$.
2. Από την πρώτη προσέγγιση βρίσκουμε τη δεύτερη, από τη δεύτερη την τρίτη, κ.ο.κ., μέσω του τύπου

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1)$$

Πρακτική εφαρμογή της μεθόδου

Ως πρώτο παράδειγμα, βρίσκουμε δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ προβαίνοντας σε διαδοχικά ακριβέστερες προσεγγίσεις της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

Παράδειγμα 1 Εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του 2

Βρείτε τη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Λύση Με $f(x) = x^2 - 2$ και $f'(x) = 2x$, η Εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Φέρνουμε την εξίσωση αυτή σε μορφή που περιλαμβάνει λιγότερες αριθμητικές πράξεις, για να μπορέσουμε να τη χειριστούμε καλύτερα με το κομπιουτεράκι μας:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

Η εξίσωση

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

μας επιτρέπει να μεταβούμε από τη μία προσέγγιση στην επόμενη με λίγα μόνο βήματα. Με τιμή εκκινήσεως την $x_0 = 1$, παίρνουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που ακολουθεί. (Με ακρίβεια πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, $\sqrt{2} = 1,41421$.)

Αλγόριθμος και επανάληψη

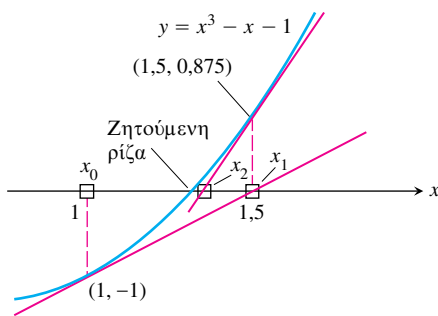
Συνήθίζεται να αποκαλούμε *αλγόριθμο* μια ακολουθία υπολογιστικών βημάτων όπως αυτά της μεθόδου του Νεύτωνα. Όταν ένας αλγόριθμος επαναλαμβάνει ένα δεδομένο σύνολο βημάτων ξανά και ξανά, τροφοδοτώντας με την απάντηση του προηγούμενου βήματος το επόμενο βήμα, τότε ο αλγόριθμος καλείται *επαναληπτικός* και κάθε «κύκλος» καλείται *επανάληψη*. Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι μια από τις γρηγορότερες επαναληπτικές μεθόδους εύρεσης ριζών.

	Σφάλμα	Αριθμός ορθών ψηφίων
$x_0 = 1$	-0,41421	1
$x_1 = 1,5$	0,08579	1
$x_2 = 1,41667$	0,00246	3
$x_3 = 1,41422$	0,00001	5

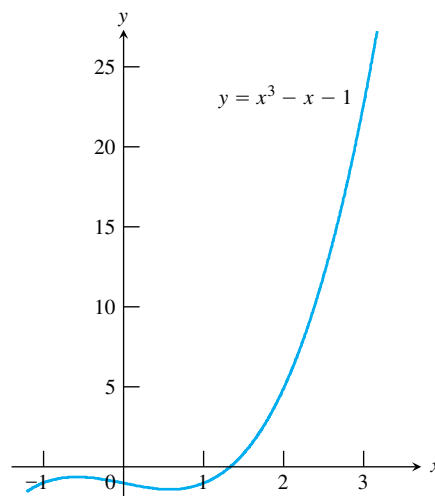
Οι περισσότεροι υπολογιστές τσέπης (κομπιουτεράκια) χρησιμοποιούν τη μέθοδο του Νεύτωνα για τον υπολογισμό ριζών λόγω της γρήγορης σύγκλισης της μεθόδου (περισσότερα για το ζήτημα αυτό θα πούμε αργότερα). Αν στο Παράδειγμα 1 θέλαμε ακρίβεια 13 ψηφίων αντί για 5, τότε στο επόμενο βήμα θα είχαμε ήδη μια έκφραση του $\sqrt{2}$ ορθή κατά περισσότερα από 10 δεκαδικά ψηφία.

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση της μεθόδου του Νεύτωνα

Βρείτε τη συντεταγμένη x του σημείου τομής της καμπύλης $y = x^3 - x$ με την οριζόντια ευθεία $y = 1$.



ΣΧΗΜΑ 3.64 Οι τρεις πρώτες τιμές x του Πίνακα 3.1.



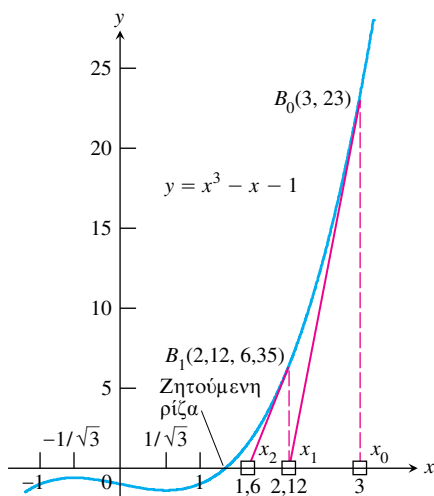
ΣΧΗΜΑ 3.63 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 1$. (Παράδειγμα 2)

Λύση Η καμπύλη τέμνει την ευθεία όταν $x^3 - x = 1$ ή $x^3 - x - 1 = 0$. Πότε μηδενίζεται η $f(x) = x^3 - x - 1$; Το γράφημα της f (Σχήμα 3.63) δείχνει ότι υπάρχει μία ρίζα, μεταξύ των $x = 1$ και $x = 2$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα στη συνάρτηση f με τιμή εκκινήσεως τη $x_0 = 1$. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 3.64.

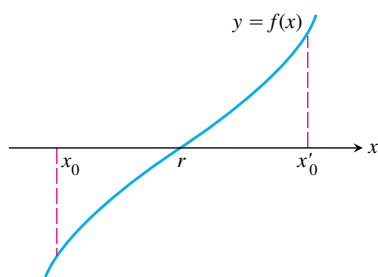
Για $n = 5$, έχουμε $x_6 = x_5 = 1,324717957$. Όταν όμως είναι $x_{n+1} = x_n$, η Εξίσωση (1) μας δίνει $f(x_n) = 0$. Έτσι βρήκαμε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων.

Πίνακας 3.1 Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα στην $f(x) = x^3 - x - 1$ με $x_0 = 1$

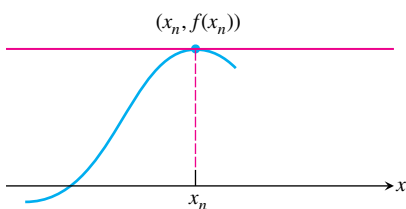
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,3478 26087
2	1,3478 26087	0,1006 82173	4,4499 05482	1,3252 00399
3	1,3252 00399	0,0020 58362	4,2684 68292	1,3247 18174
4	1,3247 18174	0,0000 00924	4,2646 34722	1,3247 17957
5	1,3247 17957	-1,8672E-13	4,2646 32999	1,3247 17957



ΣΧΗΜΑ 3.65 Κάθε τιμή εκκινήσεως x_0 μεγαλύτερη του $x = 1/\sqrt{3}$ θα οδηγήσει στη ρίζα.



ΣΧΗΜΑ 3.66 Η μέθοδος του Νεύτωνα θα συγκλίνει στο r από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης.



ΣΧΗΜΑ 3.67 Αν $f'(x_n) = 0$, τότε η εφαπτομένη δεν τέμνει τον άξονα x και δεν ορίζεται το x_{n+1} .

Στο Σχήμα 3.65, εξετάζουμε τι θα συνέβαινε στο Παράδειγμα 2 αν ξεκινούσαμε από το σημείο $B_0(3, 23)$ της καμπύλης, με $x_0 = 3$. Το σημείο B_0 απέχει αρκετά από τον άξονα x , αλλά η εφαπτομένη στο B_0 τέμνει τον άξονα x περίπου στο σημείο $(2, 12, 0)$, βελτιώνοντας σημαντικά την τιμή εκκινήσεως x_0 . Κάνοντας επανειλημμένη χρήση της Εξίσωσης (1) όπως και πριν, με $f(x) = x^3 - x - 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 1$, ξαναβρίσκουμε τη λύση $x_7 = x_6 = 1,3247\ 17957$ σε επτά βήματα.

Η καμπύλη του Σχήματος 3.65 εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1/\sqrt{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = +1/\sqrt{3}$. Αν επιλέγαμε μια τιμή εκκινήσεως x_0 μεταξύ των δυο αυτών σημείων δεν θα αναμέναμε ικανοποιητικά αποτελέσματα από τη μέθοδο, ενώ οποιοδήποτε σημείο εκκινήσεως στα δεξιά του $x = 1/\sqrt{3}$ θα μας έδινε τελικά την ορθή απάντηση. Ακόμα κι αν ξεκινήσουμε πολύ δεξιότερα του B_0 , για παράδειγμα από το $x_0 = 10$, η μέθοδος θα συγκλίνει (με λίγα περισσότερα βήματα) στην ίδια απάντηση όπως και πριν.

Συνήθως η μέθοδος συγκλίνει

Στην πράξη, η μέθοδος του Νεύτωνα συνήθως συγκλίνει με εντυπωσιακή ταχύτητα, αλλά δεν υπάρχει εγγύηση γι' αυτό. Ένας τρόπος να ελέγξουμε αν υπάρχει σύγκλιση είναι ο εξής: Κατ' αρχάς, παριστούμε γραφικά τη συνάρτηση και από το γράφημά της κάνουμε μια καλή επιλογή της τιμής εκκινήσεως x_0 . Έπειτα υπολογίζουμε το $|f(x_n)|$ για να ελέγξουμε αν η συνάρτηση πλησιάζει στο μηδέν, ενώ υπολογίζοντας το $|x_n - x_{n+1}|$ ελέγχουμε αν η μέθοδος συγκλίνει.

Στο σημείο αυτό η θεωρία μπορεί να βοηθήσει την κατάσταση. Ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού λέει ότι αν ισχύει

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \quad (2)$$

για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή τιμών γύρω από τη ρίζα r , τότε η μέθοδος θα συγκλίνει στο r για κάθε τιμή εκκίνησης x_0 που ανήκει στην περιοχή αυτή.

Η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει πάντοτε αν η $y = f(x)$ είναι κοίλη (κοίλα κάτω) για $x_0 < r$ και κυρτή (κοίλα άνω) για $x_0 > r$. (Δείτε το Σχήμα 3.66.)

Υπό ευνοϊκές συνθήκες, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα στη ρίζα r δίδεται από τον ακόλουθο τύπο του προχωρημένου απειροστικού λογισμού

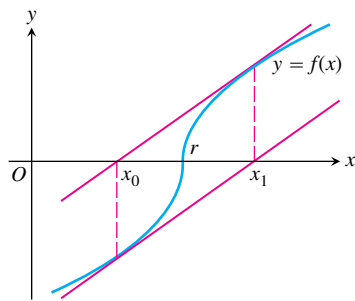
$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{σφάλμα } e_{n+1}} \leq \frac{\max |f''|}{2 \min |f'|} |x_n - r|^2 = \text{σταθερά} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{σφάλμα } e_n}, \quad (3)$$

όπου οι όροι “max” και “min” αναφέρονται στις μέγιστες και στις ελάχιστες τιμές σε ένα διάστημα που περιέχει το r . Ο τύπος αυτός λέει ότι το σφάλμα στο βήμα $n + 1$ δεν είναι μεγαλύτερο από μια σταθερά επί το τετράγωνο του σφάλματος στο βήμα n . Αν αυτό δεν σας λέει πολλά, ξανασκεφτείτε το. Αν η σταθερά είναι μικρότερη ή ίση του 1 και $|x_n - r| < 10^{-3}$, τότε $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$. Δηλαδή σε ένα μόνο βήμα, η μέθοδος μεταβαίνει από ακρίβεια τριών σε ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων!

Οι Εξισώσεις (2) και (3) έχουν ως προϋπόθεση ότι η f είναι «καλά συμπεριφερόμενη». Για παράδειγμα, στην Εξίσωση (3), η r θεωρείται απλή ρίζα της f , οπότε $f'(r) \neq 0$. Αν όμως η r είναι πολλαπλή ρίζα της f , τότε η σύγκλιση μπορεί να γίνει με πιο αργό ρυθμό.

Όμως κάτι μπορεί να πάει στραβά

Η μέθοδος του Νεύτωνα σταματά αν $f'(x_n) = 0$ (Σχήμα 3.67). Στην περί-



ΣΧΗΜΑ 3.68 Εδώ η μέθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει. Απλώς ταλαντεύεται από το x_0 στο x_1 και πάλι πίσω στο x_0 , χωρίς να πλησιάζει καθόλου στο r .

πτώση αυτή, δοκιμάστε με ένα νέο σημείο εκκινήσεως. Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση οι f και f' να έχουν μια κοινή ρίζα. Για να διαπιστώσετε αν αυτό όντως συμβαίνει, δεν έχετε παρά να βρείτε πρώτα τις ρίζες της $f'(x) = 0$ και κατόπιν να υπολογίσετε την f για τις τιμές αυτές, ή μπορείτε να παραστήσετε γραφικά σε κοινό σχήμα τις f και f' .

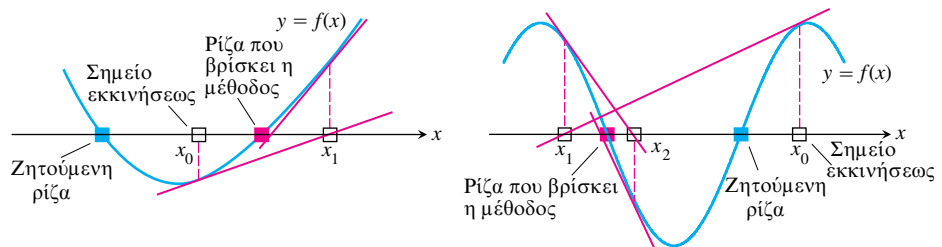
Η μέθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει πάντοτε. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r, \end{cases}$$

τότε η γραφική παράσταση θα μοιάζει με αυτήν του Σχήματος 3.68. Αν ξεκινήσουμε από την τιμή $x_0 = r - h$, παίρνουμε $x_1 = r + h$, και οι διαδοχικές προσεγγίσεις ταλαντεύονται μεταξύ των δυο αυτών τιμών. Όσες φορές και να επαναλάβουμε, δεν πλησιάζουμε καθόλου τη ρίζα.

Όταν η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει, συγκλίνει αναγκαστικά σε μια ρίζα. Όμως προσέξτε! Υπάρχουν περιπτώσεις που η μέθοδος δείχνει να συγκλίνει κάπου όπου όμως δεν υπάρχει ρίζα. Ευτυχώς, αυτές οι περιπτώσεις είναι σπάνιες.

Όταν η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει σε μια ρίζα, αυτή μπορεί να μην είναι η ρίζα που ζητάτε. Το Σχήμα 3.69 δείχνει δύο δυνατούς τρόπους για να συμβεί αυτό.



ΣΧΗΜΑ 3.69 Αν ξεκινήσετε πολύ μακριά από την περιοχή που σας ενδιαφέρει, η μέθοδος του Νεύτωνα ενδέχεται να μη βρει τη ρίζα που ζητάτε, αλλά μια άλλη ρίζα.

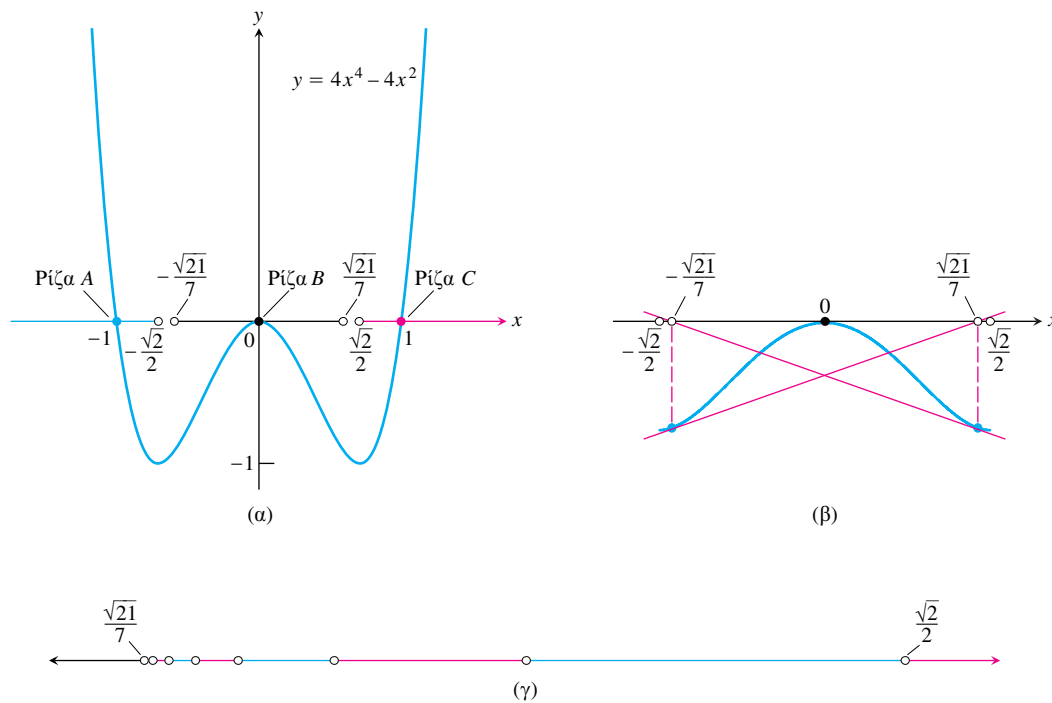
Μορφοκλασματικές λεκάνες και η μέθοδος του Νεύτωνα

Η διαδικασία εύρεσης ριζών με τη μέθοδο του Νεύτωνα μπορεί να καταστεί ασταθής υπό την έννοια ότι, για κάποιες εξισώσεις, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι εξαιρετικά ευαίσθητο ως προς τη θέση του σημείου εκκινήσεως.

Η εξίσωση $4x^4 - 4x^2 = 0$ είναι μια τέτοια περίπτωση (Σχήμα 3.70α). Αν οι τιμές εκκινήσεως ανήκουν στην μπλε περιοχή του άξονα x , η μέθοδος οδηγεί στη ρίζα A . Τιμές εκκινήσεως που βρίσκονται στη μαύρη περιοχή οδηγούν στη ρίζα B , ενώ τιμές που βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή οδηγούν στη ρίζα C . Τα σημεία $\pm\sqrt{2}/2$ έχουν οριζόντιες εφαπτομένες. Τα σημεία $\pm\sqrt{21}/7$ «εναλλάσσονται», δηλαδή το ένα οδηγεί στο άλλο (Σχήμα 3.70β).

Το διάστημα μεταξύ $\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{2}/2$ περιέχει άπειρο πλήθος ανοιχτών διαστημάτων που οδηγούν στη ρίζα A , εναλλασσόμενων με διαστήματα σημείων που οδηγούν στη ρίζα C (Σχήμα 3.70γ). Τα (άπειρα) συνοριακά σημεία που διαχωρίζουν τα διαδοχικά αυτά διαστήματα δεν οδηγούν σε ρίζες, αλλά σε παλινδρόμηση από το ένα στο άλλο. Επιπλέον, καθώς επιλέγουμε σημεία εκκινήσεως που πλησιάζουν από δεξιά την τιμή $\sqrt{21}/7$, γίνεται ολοένα και δυσκολότερο να διακρίνουμε ποια από αυτά οδηγούν στη ρίζα A και ποια στη ρίζα C . Σε κάθε πλευρά του $\sqrt{21}/7$, βρίσκουμε σημεία που αν και είναι αυθαίρετα κοντά το ένα στο άλλο, εν τούτοις οδηγούν σε ρίζες διαφορετικές.

Αν φανταστούμε τις ρίζες ως «ελκυστές» άλλων σημείων, τότε οι αποχρώσεις του Σχήματος 3.70 δείχνουν τα διαστήματα των οποίων τα



ΣΧΗΜΑ 3.70 (α) Τιμές εκκίνησης που ανήκουν στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$, και $(\sqrt{2}/2, \infty)$ οδηγούν αντίστοιχα στις ρίζες A , B , και C . (β) Οι τιμές $x = \pm\sqrt{21}/7$ οδηγούν η μία στην άλλη. (γ) Μεταξύ των $\sqrt{21}/7$ και $\sqrt{2}/2$, υπάρχουν άπειρα ανοιχτά διαστήματα σημείων που έλκονται προς το A · τα διαστήματα αυτά εναλλάσσονται με επίσης άπειρα ανοιχτά διαστήματα σημείων που έλκονται προς το C . Αντίστοιχη συμπεριφορά προκύπτει και στο διάστημα $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7)$.

σημεία έλκονται από κάθε ρίζα (τα «διαστήματα έλξης»). Μπορεί να ξεγελαστείτε νομίζοντας ότι σημεία ανάμεσα στις ρίζες A και B θα έλκονται είτε προς το A είτε προς το B , όμως θα δούμε ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Μεταξύ των A και B υπάρχει άπειρο πλήθος διαστημάτων σημείων που έλκονται προς το C . Ομοίως, μεταξύ των B και C υπάρχει άπειρο πλήθος διαστημάτων σημείων που έλκονται στο A .

Ένα ακόμη πιο εύγλωττο παράδειγμα τέτοιας συμπεριφοράς προκύπτει όταν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να λύσουμε την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Υπάρχουν εδώ έξι ρίζες: 1 , -1 , και οι τέσσερις συνδυασμοί $\pm(1/2) \pm (\sqrt{3}/2)i$. Όπως δείχνει το Σχήμα 3.71, καθεμία από τις ρίζες αυτές έχει άπειρο πλήθος ελκτικών «λεκανών» στο μιγαδικό επίπεδο (Παράρτημα 3). Σημεία εκκινήσεως που ανήκουν στις κόκκινες λεκάνες έλκονται στη ρίζα 1 , εκείνα στις πράσινες λεκάνες έλκονται στη ρίζα $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, κ.ο.κ. Κάθε τέτοια λεκάνη έχει ένα σύνορο του οποίου το περίπλοκο σχέδιο επαναλαμβάνεται ατέρμονα, όσες μεγεθύνσεις κι αν κάνουμε. Οι λεκάνες αυτές καλούνται **μορφοκλασματικές λεκάνες**.



ΣΧΗΜΑ 3.71 Αυτό το τοπίο τιμών εκκίνησης σχεδιάστηκε με υπολογιστή. Με διαφορετικό χρώμα δείχνονται οι περιοχές σημείων του μιγαδικού επιπέδου που καταλήγουν σε διαφορετικές ρίζες όταν τα χρησιμοποιήσουμε ως τιμές εκκίνησης στη μέθοδο του Νεύτωνα για την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$. Σημεία της κόκκινης περιοχής οδηγούν στο 1 , της πράσινης περιοχής στο $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, της σκούρας μπλε στο $(-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, κ.ο.κ. Τιμές εκκινήσεως που παράγουν ακολουθίες οι οποίες δεν συγκλίνουν σε κάποια ρίζα με απόκλιση μικρότερη των $0,1$ μονάδων μετά από 32 βήματα επανάληψης, χρωματίστηκαν μαύρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.7

CD-ROM

Δικτυότοπος

Εύρεση ριζών

- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 1 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 1$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2 .
- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τη μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 3x + 1 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = 0$ και κατόπιν βρείτε το x_2 .
- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα δύο σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $f(x) = x^4 + x - 3$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 1$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2 .
- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα δύο σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $f(x) = 2x - x^2 + 1$. Ξεκινήστε με $x_0 = 0$ για τη μικρότερη ρίζα και με $x_0 = 2$ για τη μεγαλύτερη. Έπειτα, για κάθε περίπτωση, βρείτε το x_2 .
- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τη θετική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = 1$ και βρείτε το x_2 .
- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε την αρνητική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ και βρείτε το x_2 .

Θεωρία, παραδείγματα, και εφαρμογές

- Μαντεύοντας μια ρίζα** Ας υποθέσουμε ότι σταθήκατε τυχεροί και η τιμή x_0 εκκίνησης που διαλέξατε είναι ρίζα της $f(x) = 0$. Αν η $f'(x_0)$ ορίζεται και δεν μηδενίζεται, τι συμβαίνει στο x_1 και στις επόμενες προσεγγίσεις;
- Μάθετε γράφοντας: Εκτίμηση του π** Θέλετε να εκτιμήσετε το $\pi/2$ με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα στην εξίσωση $\cos x = 0$. Έχει σημασία ποια τιμή εκκίνησης επιλέγετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Ταλάντωση** Δείξτε ότι αν $h > 0$, η εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα στην

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

οδηγεί στο αποτέλεσμα $x_1 = -h$ αν $x_0 = h$ και $x_1 = h$ αν $x_0 = -h$. Κάντε ένα σχήμα για να δείξετε τι συμβαίνει.

- Προσεγγίσεις που ολοένα χειροτερεύουν** Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα στη συνάρτηση $f(x) = x^{1/3}$ με $x_0 = 1$ και βρείτε τα x_1, x_2, x_3 , και x_4 . Βρείτε έναν τύπο για το $|x_n|$. Πώς συμπεριφέρεται το $|x_n|$ καθώς $n \rightarrow \infty$; Κάντε ένα σχήμα για να εξηγήσετε τι συμβαίνει.
- Μάθετε γράφοντας** Εξηγήστε γιατί και οι τέσσερις προτάσεις που ακολουθούν έχουν το ίδιο ζητούμενο:
 - Να βρεθούν οι ρίζες της $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3$ με την ευθεία $y = 3x + 1$.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3 - 3x$ με την οριζόντια ευθεία $y = 1$.

iv. Να βρεθούν οι τιμές x όπου η παράγωγος της $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ μηδενίζεται.

- Εντοπισμός πλανήτη** Στη διαδικασία υπολογισμού των συντεταγμένων πλανητών στον χώρο, προκύπτουν εξισώσεις του τύπου $x = 1 + 0,5 \sin x$. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησεως $f(x) = x - 1 - 0,5 \sin x$ είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει μια ρίζα κοντά στο $x = 1,5$. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βελτιώσετε την πρώτη αυτή εκτίμηση. Με άλλα λόγια, ξεκινήστε με $x_0 = 1,5$ και βρείτε το x_1 . (Με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων η ρίζα ισούται με 1,49870.) Θυμηθείτε να χρησιμοποιήσετε ακτίνια.

CD-ROM
Δικτυότοπος

T 13. Η μέθοδος του Νεύτωνα σε προγραμματιστικό περιβάλλον Έστω $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Στα παρακάτω περιγράψουμε έναν αλγόριθμο εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα σε προγραμματιζόμενο κομπιουτεράκι.

- Θέτουμε $y_0 = f(x)$ και $y_1 = \text{NDER } f(x)$.
- Αποθηκεύουμε το $x_0 = -0,3$ στη μεταβλητή x .
- Κατόπιν αποθηκεύουμε το $x - (y_0/y_1)$ στη μεταβλητή x και πατάμε επανειλημμένα το πλήκτρο "Enter". Παρατηρούμε ότι οι εμφανιζόμενοι στην οθόνη αριθμοί συγκλίνουν στο σημείο μηδενισμού της f .
- Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) και (γ) με διαφορετικές τιμές εκκίνησης x_0 .
- Γράψτε μια δική σας εξίσωση και επιλύστε τη με τη μέθοδο του Νεύτωνα ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με αυτό που σας δίνει η ενσωματωμένη πράξη εύρεσης ριζών συναρτήσεως στο κομπιουτεράκι σας.

T 14. (Συνέχεια της Ασκήσεως 11)

- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τα δύο σημεία μηδενισμού της $f(x) = x^3 - 3x - 1$ που κείνται στα αριστερά της αρχής, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.
- Παραστήστε γραφικά την $f(x) = x^3 - 3x - 1$ στο διάστημα $-2 \leq x \leq 2,5$. Χρησιμοποιήστε τις λειτουργίες μεγεθύνσεως ("zoom") και εντοπισμού ("trace") για να εκτιμήσετε τα σημεία μηδενισμού της f με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.
- Παραστήστε γραφικά την $g(x) = 0,25x^4 - 1,5x^2 - x + 5$. Χρησιμοποιήστε τις λειτουργίες μεγεθύνσεως ("zoom") και εντοπισμού ("trace") με κατάλληλη αλλαγή κλίμακας για να βρείτε, με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων, τις τιμές του x όπου το γράφημα έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

T 15. **Τεμνόμενες καμπύλες** Η καμπύλη $y = \tan x$ τέμνει την ευθεία $y = 2x$ κάπου μεταξύ των $x = 0$ και $x = \pi/2$. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε πού.

CD-ROM
Δικτυότοπος

T 16. **Πραγματικές ρίζες πολυωνύμου τετάρτου βαθμού** Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τις δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

T 17. **Εύρεση ριζών**

- Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\sin 3x = 0,99 - x^2$;

(β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να τις βρείτε.

T 18. *Τομή καμπυλών* (α) Ισούνται ποτέ με x η συνάρτηση $\cos 3x$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

CD-ROM
Δικτυότοπος

(β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε πού ισχύει η ισότητα.

T 19. *Πολλαπλές ρίζες* Βρείτε τις τέσσερις πραγματικές ρίζες της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

CD-ROM
Δικτυότοπος

T 20. *Εκτίμηση της τιμής του π* Εκτιμήστε το π με ακρίβεια όσων ψηφίων χωρά η οθόνη που έχει το κομπιουτεράκι σας, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα για να λύσετε την εξίσωση $\tan x = 0$ με $x_0 = 3$.

CD-ROM
Δικτυότοπος

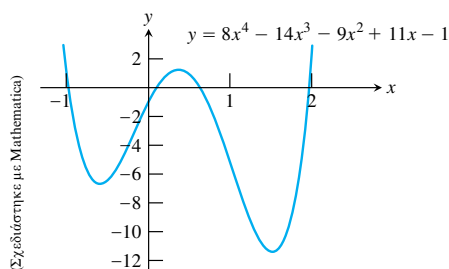
T 21. *Τομή καμπυλών* Για ποιο (ποια) x ισχύει η ισότητα $\cos x = 2x$;

22. *Τομή καμπυλών* Για ποιο (ποια) x ισχύει η ισότητα $\cos x = -x$;

23. *Εύρεση ρίζας* Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής της Ενότητας 1.4 για να δείξετε ότι η $f(x) = x^3 + 2x - 4$ έχει μια ρίζα μεταξύ των $x = 1$ και $x = 2$. Έπειτα βρείτε τη ρίζα με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων.

T 24. *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου τετάρτου βαθμού* Βρείτε προσεγγιστικά τις τιμές των r_1 μέχρι και r_4 στην παραγοντοποίηση

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T 25. *Σύγκλιση σε διαφορετικές ρίζες* Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ χρησιμοποιώντας τις τιμές εκκίνησης που δίδονται (Σχήμα 3.70).

CD-ROM
Δικτυότοπος

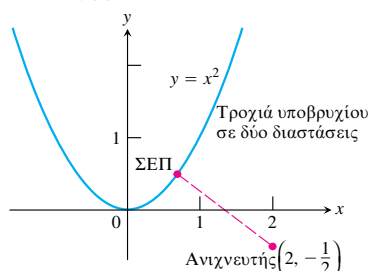
(α) $x_0 = -2$ και $x_0 = -0,8$, για ρίζες στο διάστημα $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$

(β) $x_0 = -0,5$ και $x_0 = 0,25$, για ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$

(γ) $x_0 = 0,8$ και $x_0 = 2$, για ρίζες στο διάστημα $(\sqrt{2}/2, \infty)$

(δ) $x_0 = -\sqrt{21}/7$ και $x_0 = \sqrt{21}/7$

26. *Το πρόβλημα της υπερηχητικής ανίχνευσης* Σε προβλήματα εντοπισμού υποβρυχίων, είναι συχνά απαραίτητο να βρεθεί το σημείο εγγύτερης προσέγγισης υποβρυχίου σε ηχοανιχνευτή που επιπλέει στο νερό. Έστω ότι το υποβρύχιο κινείται στην παραβολική τροχιά $y = x^2$ και ότι ο ανιχνευτής βρίσκεται στη θέση $(2, -1/2)$.

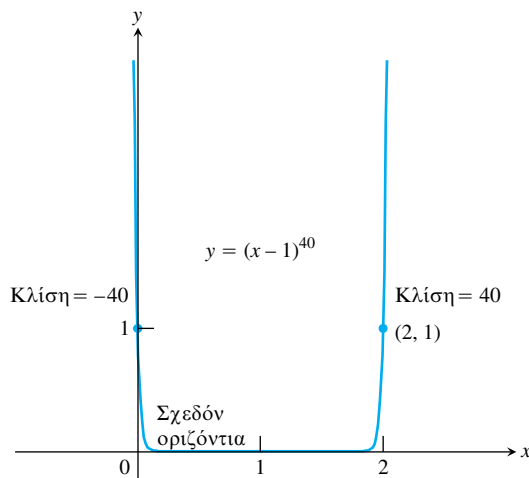


(Πηγή: The Contraction Mapping Principle, του C. O. Wilde, UMAP Unit 326, Arlington, MA, COMAP, Inc.)

(α) Δείξτε ότι η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ του υποβρυχίου και του ανιχνευτή είναι η λύση της εξίσωσης $x = 1/(x^2 + 1)$.

(β) Λύστε την εξίσωση $x = 1/(x^2 + 1)$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

27. *Καμπύλες που είναι σχεδόν οριζόντιες στην περιοχή της ρίζας* Μερικές καμπύλες είναι τόσο «οριζόντιες» ώστε, στην πράξη, η μέθοδος του Νεύτωνα σταματά αρκετά μακριά από τη ρίζα που ζητούμε. Για να δείτε περί τίνος πρόκειται, προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 1)^{40}$ με τιμή εκκίνησης $x_0 = 2$ και παρατηρήστε πόσο προσεγγίζει ο υπολογιστής σας τη ρίζα $x = 1$.



28. *Εύρεση άλλης ρίζας από αυτήν που ψάχναμε* Και οι τρεις ρίζες της $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ μπορούν να βρεθούν αν διαλέξουμε ως τιμή εκκίνησης κοντά στο $x = \sqrt{21}/7$. Δοκιμάστε το. Δείτε το Σχήμα 3.70.

29. *Εύρεση συγκεντρώσεως ιόντων* Κατά τον υπολογισμό της οξύτητας ενός κορεσμένου διαλύματος υδροξειδίου του μαγνησίου σε υδροχλωρικό οξύ, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{3,64 \times 10^{-11}}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} = [\text{H}_3\text{O}^+] + 3,6 \times 10^{-4}$$

όπου $[\text{H}_3\text{O}^+]$ η συγκέντρωση ιόντων υδρονίου. Για να βρούμε την τιμή του $[\text{H}_3\text{O}^+]$, θέτουμε $x = 10^4[\text{H}_3\text{O}^+]$ και φέρνουμε έτσι την εξίσωση στη μορφή

$$x^3 + 3,6x^2 - 36,4 = 0.$$

Λύστε την εξίσωση αυτή με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Ποια τιμή βρίσκετε για το x ; (Φτάστε σε ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.) Πόση είναι συνεπώς η συγκεντρωση $[\text{H}_3\text{O}^+]$;

T 30. *Μιγαδικές ρίζες* Αν έχετε υπολογιστή ή κομπιουτεράκι που μπορεί να εκτελέσει πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς, λύστε την εξίσωση $z^6 - 1 = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Η αναδρομική σχέση που προκύπτει είναι

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5} \quad \text{δηλαδή} \quad z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}.$$

Δοκιμάστε με τις εξής τιμές εκκίνησης (αλλά και με άλλες που θα επιλέξετε): $2, i, \sqrt{3} + i$.

Επαναληπτικές ερωτήσεις

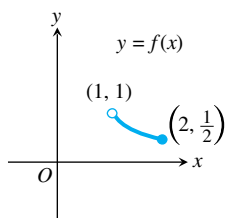
1. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις τιμές μιας συνάρτησης που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα;
2. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση εμφανίζει τοπικό ακρότατο στο πεδίο ορισμού της; Το ίδιο ερώτημα για ολικό ακρότατο. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τοπικών και ολικών ακροτάτων, και ποια είναι αυτή; Δώστε μερικά παραδείγματα.
3. Ποια σχέση ικανοποιεί η παράγωγος f' σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού όπου υπάρχει τοπικό ακρότατο, και πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το ακρότατο αυτό;
4. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα συνεχούς συναρτήσεως σε κλειστό διάστημα; Δώστε μερικά παραδείγματα.
5. Ποιες οι προϋποθέσεις και ποιο το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle; Είναι πράγματι απαραίτητες οι προϋποθέσεις; Εξηγήστε.
6. Ποιες οι προϋποθέσεις και ποιο το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής; Τι είδους φυσικές ερμηνείες επιδέχεται το θεώρημα;
7. Αναφέρετε τα τρία πορίσματα του θεωρήματος μέσης τιμής.
8. Πώς μπορούμε μερικές φορές να βρίσκουμε τον τύπο μιας συνάρτησης $f(x)$ όταν είναι γνωστή η f' και η τιμή της f σε κάποιο σημείο $x = x_0$; Δώστε ένα παράδειγμα.
9. Τι είναι μια διαφορική εξίσωση και τι η λύση της; Δώστε μερικά παραδείγματα.
10. Ποιο είναι το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις; Πώς μπορεί να μας χρησιμεύσει στον έλεγχο για τοπικά ακρότατα;
11. Πώς ελέγχουμε την κοιλότητα μιας διπλά παραγωγίσιμης συναρτήσεως; Δώστε μερικά παραδείγματα.
12. Τι είναι το σημείο καμής; Δώστε ένα παράδειγμα. Ποια η φυσική σημασία των σημείων καμής;
13. Ποιο είναι το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα; Εξηγήστε με μερικά παραδείγματα πώς εφαρμόζεται.
14. Τι μπορούν να μας πουν για το σχήμα μιας γραφικής παράστασης οι παράγωγοι μιας συναρτήσεως;
15. Τι είναι η αυτόνομη διαφορική εξίσωση; Τι ονομάζουμε σημεία ισορροπίας της εξίσωσης αυτής; Σε τι διαφέρουν αυτά από τα κρίσιμα σημεία; Τι είναι η ευσταθής και τι η ασταθής ισορροπία;
16. Πώς κατασκευάζουμε την ευθεία φάσεων μιας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης; Σε τι χρησιμεύει η ευθεία αυτή στην κατασκευή ποιοτικών καμπυλών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης;
17. Περιγράψτε συνοπτικά μια γενική μεθοδολογία εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων. Δώστε μερικά παραδείγματα.
18. Τι είναι η γραμμικοποίηση $L(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x = a$; Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η f στο a για να υπάρχει η γραμμικοποίησή της; Πώς χρησιμοποιούμε τις γραμμικοποιήσεις; Δώστε μερικά παραδείγματα.
19. Καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο γειτονικό $a + dx$, με ποιον τρόπο εκτιμούμε την αντίστοιχη μεταβολή της τιμής μιας διαφορίσιμης συναρτήσεως $f(x)$; Πώς εκτιμούμε τη σχετική μεταβολή και πώς την ποσοστιαία μεταβολή; Δώστε ένα παράδειγμα.
20. Περιγράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την επίλυση εξισώσεων. Δώστε ένα παράδειγμα. Τι πρέπει να προσέχετε όταν εφαρμόζετε τη μέθοδο;

Ασκήσεις κεφαλαίου

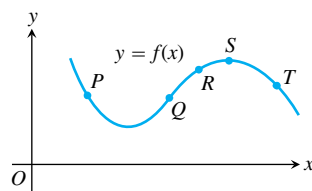
Συμπεράσματα από γραφικές παραστάσεις

Στις Ασκήσεις 1-4, κάνετε χρήση του παρατιθέμενου γραφήματος για να απαντήσετε στα ερωτήματα.

1. Εντοπίστε τα ολικά ακρότατα της f και για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτά.



Σχήμα Άσκησης 1



Σχήμα Άσκησης 2

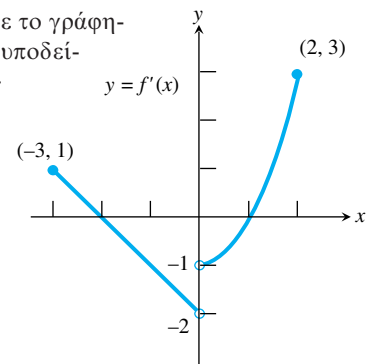
2. Για ποιο από τα πέντε σημεία του γραφήματος της $y = f(x)$ που παρατίθεται εδώ

- (α) είναι ταυτόχρονα αρνητικές οι y' και y'' ;
 - (β) είναι αρνητική η y' και θετική η y'' ;
3. Εκτιμήστε τα διαστήματα όπου η $y = f(x)$ είναι

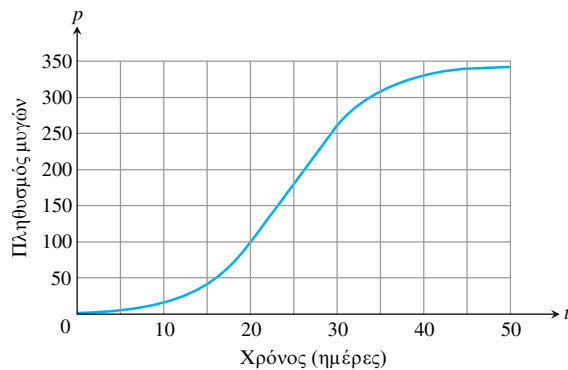
(α) αύξουσα

(β) φθίνουσα

- (γ) Χρησιμοποιήστε το γράφημα της f' για να υποδείξετε πού προκύπτουν τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως, και αν αυτά είναι ελάχιστα ή μέγιστα.



4. Παρατίθεται η γραφική παράσταση ενός πληθυσμού μυγών. Ποια μέρα περίπου άλλαξε από αύξων σε φθίνων ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού;



Υπαρξη ακροτάτων

5. **Μάθετε γράφοντας: Τοπικά ακρότατα** Εμφανίζει η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
6. **Μάθετε γράφοντας: Τοπικά μέγιστα** Εμφανίζει η συνάρτηση $g(x) = \csc x + 2 \cot x$ τοπικά μέγιστα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
7. **Μάθετε γράφοντας: Ακρότατα** Εμφανίζει η συνάρτηση $f(x) = (7+x)(11-3x)^{1/3}$ ολικά ελάχιστα ή μέγιστα; Αν ναι, βρείτε τα, αν όχι, εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν. Καταγράψτε όλα τα κρίσιμα σημεία της f .
8. **Μάθετε γράφοντας: Τοπικά ακρότατα** Βρείτε για ποιες τιμές των a και b η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

εμφανίζει τοπικό ακρότατο ίσο με 1 στο σημείο $x = 3$. Πρόκειται για ελάχιστο ή για μέγιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. **Μάθετε γράφοντας** Η συνάρτηση αέραςιας τιμής $f(x) = \int_0^x t \, dt$, που ορίζεται για κάθε x , εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$ για κάθε σημείο του $[0, 1)$. Μπορεί το τοπικό αυτό μέγιστο (αλλά και κάθε άλλο τοπικό μέγιστο της f) να θεωρηθεί και τοπικό ελάχιστο της f ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
10. (α) Δώστε ένα παράδειγμα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f της οποίας η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται σε σημείο c όπου η f δεν εμφανίζει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο.
- (β) **Μάθετε γράφοντας** Αντιβαίνουν τα παραπάνω στο Θεώρημα 2 της Ενότητας 3.1; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
11. **Ολικά ακρότατα** Η συνάρτηση $y = 1/x$ δεν εμφανίζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο διάστημα $0 < x < 1$ παρά το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο συγκεκριμένο διάστημα. Το γεγονός αυτό αντιβαίνει ή όχι το θεώρημα ακροτάτων συνεχών συναρτήσεων, και γιατί;
12. **Ολικά ακρότατα** Ποια είναι τα ελάχιστα και ποια τα μέγιστα της συναρτήσεως $y = |x|$ στο διάστημα $-1 \leq x < 1$; Προσέξτε ότι το διάστημα δεν είναι κλειστό. Παραβιάζεται έτσι το θεώρημα ακροτάτων συνεχών συναρτήσεων, και γιατί;

Το θεώρημα μέσης τιμής

13. (α) Δείξτε ότι η $g(t) = \sin^2 t - 3t$ είναι φθίνουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.
- (β) **Μάθετε γράφοντας** Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\sin^2 t - 3t = 5$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
14. (α) Δείξτε ότι η $y = \tan \theta$ είναι αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.
- (β) **Μάθετε γράφοντας** Αν αληθεύει το συμπέρασμα στο (α), τότε πώς εξηγείτε το ότι η τιμή $\tan \pi = 0$ είναι μικρότερη της $\tan(\pi/4) = 1$;
15. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, 1]$.
- (β) Χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι σας, βρείτε μια λύση της εξίσωσης με ακρίβεια όσων περισσότερων δεκαδικών ψηφίων μπορείτε.
16. (α) **Μια αύξουσα συνάρτηση** Δείξτε ότι η $f(x) = x/(x+1)$ είναι αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.
- (β) **Μια συνάρτηση χωρίς τοπικά ακρότατα** Δείξτε ότι η $f(x) = x^3 + 2x$ δεν εμφανίζει τοπικά ελάχιστα ούτε μέγιστα.

17. **Ταμειευτήρας νερού** Λόγω ισχυρών βροχοπτώσεων, ο όγκος του νερού σε υδατοταμειωτήρα αυξήθηκε κατά 1,7 εκατομμύρια κυβικά μέτρα μέσα σε 24 h. Δείξτε ότι κάποια στιγμή ο όγκος του νερού αυξανόταν με ρυθμό μεγαλύτερο από 1.000.000 L/min.

18. **Μάθετε γράφοντας** Ο τύπος $F(x) = 3x + C$ δίνει μια διαφορετική συνάρτηση για κάθε τιμή του C . Ωστόσο όλες αυτές οι συναρτήσεις έχουν την ίδια παράγωγο ως προς x , αφού $F'(x) = 3$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι μόνες με παράγωγο 3; Μήπως υπάρχουν κι άλλες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

19. **Μάθετε γράφοντας** Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x+1} \right)$$

παρά το ότι

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

Μήπως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Πόρισμα 2 του θεωρήματος μέσης τιμής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

20. **Σύγκριση παραγώγων** Υπολογίστε τις πρώτες παραγώγους των $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ και $g(x) = -1/(x^2 + 1)$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών;

Σχεδίαση γραφικών παραστάσεων

Σχεδιάστε τις καμπύλες στις Ασκήσεις 21-26.

21. $y = x^2 - (x^3/6)$
22. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$
23. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$
24. $y = x^3(8 - x)$

25. $y = x - 3x^{2/3}$

26. $y = x\sqrt{3-x}$

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 27-30 δίδεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησεως $y = f(x)$.

(α) Σε ποια σημεία (αν υπάρχουν), παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο ή σημείο καμπής η γραφική παράσταση της f ;

(β) Κατασκευάστε το γενικό σχήμα του γραφήματος.

27. $y' = 16 - x^2$

28. $y' = x^2 - x - 6$

29. $y' = 6x(x+1)(x-2)$

30. $y' = x^4 - 2x^2$

Κίνηση

Συμπεράσματα από γραφικές παραστάσεις Στις Ασκήσεις 31 και 32 παρατίθεται το γράφημα της συνάρτησης θέσεως $s = f(t)$ ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα (t είναι ο χρόνος). Σε ποιες περίπου χρονικές στιγμές (αν υπάρχουν) θα μηδενίζεται

(α) η ταχύτητα;

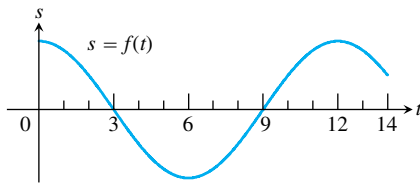
(β) η επιτάχυνση;

Σε ποια περίπου χρονικά διαστήματα κινείται το σώμα

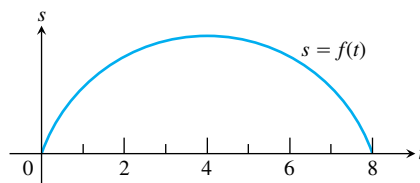
(γ) προς τα εμπρός;

(δ) προς τα πίσω;

31.



32.



33. **Ευθύγραμμη κίνηση** Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία και η συνάρτηση θέσης του είναι $s(t) = 3 + 4t - 3t^2 - t^3$. Να βρεθούν

(α) η ταχύτητα

(β) η επιτάχυνσή του.

(γ) Να περιγραφεί η κίνηση του σωματιδίου για $t \geq 0$.

34. **Ευθύγραμμη κίνηση** Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία και η συνάρτηση θέσης του είναι $s(t) = (1/2)t^4 - 4t^3 + 6t^2$, $t \geq 0$. Για ποια χρονικά διαστήματα κινείται το σώμα προς τα εμπρός; Προς τα πίσω;

Διαφορικές εξισώσεις

Στις Ασκήσεις 35-38, να βρεθούν όλες οι δυνατές συναρτήσεις που έχουν ως παράγωγο τη δοθείσα συνάρτηση.

35. $f'(x) = x^{-5} + \sin 2x$

36. $f'(x) = \sec x \tan x$

37. $f'(x) = \frac{2}{x^2} + x^2 + 1, x > 0$

38. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Στις Ασκήσεις 39 και 40, δίδεται η αρχική θέση σωματιδίου καθώς και η ταχύτητα v ή η επιτάχυνσή του a . Να βρεθεί η θέση s του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t .

39. $v = 9,8t + 5, \quad s = 10 \quad \text{για } t = 0$

40. $a = 32, \quad v = 20 \quad \text{και } s = 5 \quad \text{για } t = 0$

Αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις και ευθείες φάσεων

Στις Ασκήσεις 41 και 42,

(α) Εντοπίστε τα σημεία ηρεμίας. Ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή;

(β) Κατασκευάστε την ευθεία των φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y'' .

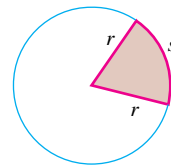
(γ) Σχεδιάστε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των καμπυλών λύσεων.

41. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$

42. $\frac{dy}{dx} = y - y^2$

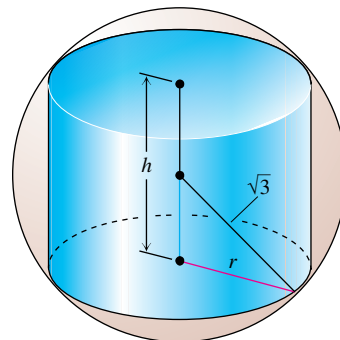
Βελτιστοποίηση

43. **Εμβαδόν κυκλικού τομέα** Αν η περίμετρος του κυκλικού τομέα που φαίνεται εδώ είναι σταθερή και ίση με 100 m, τότε για ποιες τιμές των r και s θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του τομέα;



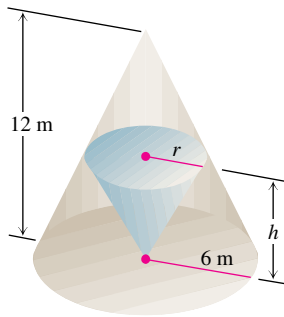
44. **Εμβαδόν τριγώνου** Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή που ορίζεται από τα ίσα «σκέλη» στην αρχή των αξόνων, την απέναντι πλευρά του παράλληλη στον άξονα x , και τις άλλες δύο κορυφές πάνω από τον άξονα x και επί της καμπύλης $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν του τριγώνου.

45. **Εγγεγραμμένος κύλινδρος** Να βρεθεί το ύψος και η ακτίνα του μεγαλύτερου ορθού κυκλικού κυλίνδρου ο οποίος μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα ακτίνας $\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



46. **Κώνος στο εσωτερικό κώνου** Στο σχήμα φαίνονται δυο ορθοί κυκλικοί κώνοι, εκ των οποίων ο ένας έχει αναστραφεί και εισαχθεί στο εσωτερικό του άλλου. Οι βάσεις των κώνων είναι παράλληλες, και η κορυφή του

μικρότερου κώνου συμπίπτει με το κέντρο της βάσης του άλλου. Για ποιες τιμές των r και h αποκτά μέγιστο όγκο ο μικρός κώνος;



47. **Βιομηχανία ελαστικών** Η εταιρεία σας μπορεί να παράγει ημερησίως x εκατοντάδες ελαστικά τύπου Α και y εκατοντάδες ελαστικά τύπου Β, όπου $0 \leq x \leq 4$ και

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

Για κάθε ελαστικό τύπου Α έχετε διπλάσιο κέρδος απ' ό,τι για ελαστικό τύπου Β. Ποιος είναι ο επικερδέστερος συνδυασμός παραγωγής ελαστικών κάθε τύπου;

48. **Κίνηση σωματιδίων** Οι θέσεις δύο σωματιδίων στον άξονα s είναι $s_1 = \cos t$ και $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

(α) Πόση είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σωματιδίων;

(β) Πότε συγκρούονται τα σωματίδια;

49. **Κουτί ανοιχτό** Ένα ανοιχτό ορθογώνιο κουτί κατασκευάζεται από χαρτόνι διαστάσεων 10×16 cm αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές και διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Βρείτε με αναλυτικές μεθόδους τις διαστάσεις του κουτιού μέγιστου όγκου και τον όγκο αυτό. Κάντε ένα σχήμα για να στηρίξετε την απάντησή σας.

50. **Σχεδίαση κάδου** Πρόκειται να σχεδιάσετε έναν ατσάλινο κάδο τετράγωνης βάσης και χωρητικότητας 32 m^3 . Ο κάδος θα κατασκευαστεί από φύλλο πάχους ενός cm και το βάρος του δεν θα πρέπει να είναι περισσότερο απ' όσο χρειάζεται. Ποιες διαστάσεις προτείνετε;

Γραμμικοποίηση

51. Να βρεθούν οι γραμμικοποιήσεις των

(α) $\tan x$ στο $x = -\pi/4$ (β) $\sec x$ στο $x = -\pi/4$.

Σε ενιαίο σχήμα, παραστήστε γραφικά τις καμπύλες και τις γραμμικοποιήσεις τους.

52. Μπορούμε να εξαγάγουμε μια χρήσιμη γραμμική προσέγγιση της συναρτήσεως $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ στο $x = 0$ αν συνδυάσουμε τις προσεγγίσεις

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{και} \quad \tan x \approx x$$

οπότε παίρνουμε

$$\frac{1}{1+\tan x} \approx 1-x.$$

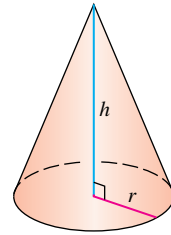
Δείξτε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι η κανονική γραμμική προσέγγιση της $1/(1 + \tan x)$ στο $x = 0$.

53. Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1+x} + \sin x - 0,5$ στο $x = 0$.

54. Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = 2/(1-x) + \sqrt{1+x} - 3,1$ στο $x = 0$.

Διαφορικές εκτιμήσεις μεταβολών

55. **Όγκος κώνου** Γράψτε μια προσεγγιστική έκφραση για τη μεταβολή του όγκου ορθού κυκλικού κώνου όταν η ακτίνα μεταβάλλεται από r_0 σε $r_0 + dr$ και το ύψος παραμένει αμετάβλητο.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

(Εμβαδόν πλευρικής επιφάνειας)

56. **Έλεγχος σφάλματος**

(α) Με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρήσετε το μήκος της ακμής κύβου για να είστε βέβαιοι ότι ο υπολογισμός του εμβαδού της κυβικής επιφάνειας δεν περιέχει σφάλμα μεγαλύτερο του 2%;

(β) Έστω ότι μετρήσατε την ακμή με την απαιτούμενη ακρίβεια του ερωτήματος (α). Με πόση περίπου ακρίβεια μπορεί τώρα να υπολογιστεί ο κυβικός όγκος; Για να το βρείτε, θα πρέπει να εκτιμήσετε το ποσοστιαίο σφάλμα στον υπολογισμό όγκου που υπεισέρχεται λόγω του σφάλματος μέτρησης της ακμής.

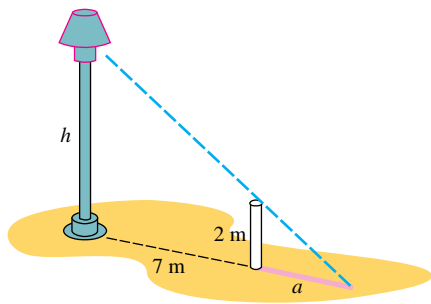
57. **Συσσωρευόμενο σφάλμα** Η ισημερινή περιφέρεια μιας σφαίρας μετρίεται και βρίσκεται ότι είναι 10 cm με πιθανό σφάλμα 0,4 cm. Από τη μέτρηση αυτή υπολογίζουμε κατά σειρά την ακτίνα, το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας. Εκτιμήστε τα ποσοστιαία σφάλματα στον υπολογισμό

(α) της ακτίνας

(β) του εμβαδού της σφαιρικής επιφάνειας

(γ) του όγκου.

58. **Εύρεση ύψους** Για να βρείτε το ύψος του στύλου (δείτε το σχήμα), στήνεται ένα δοκάρι ύψους 2 m σε απόσταση 7 m από τον στύλο και μετράτε το μήκος a της σκιάς του, το οποίο βρίσκετε ότι είναι 5 m, με ακρίβεια ενός εκατοστομέτρου. Υπολογίστε το ύψος του στύλου για $a = 5$ και εκτιμήστε το πιθανό σφάλμα στον υπολογισμό αυτόν.



Τ Μέθοδος του Νεύτωνα

Στις Ασκήσεις 59-62, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να εκτιμήσετε τα σημεία μηδενισμού των συναρτήσεων που δίδονται. Χρησιμοποιήστε κομπιουτεράκι και απαντήστε με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων.

59. $f(x) = 3x - x^3, \quad 1 \leq x \leq 2$

60. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad x < 0$

61. $g(t) = 2 \cos t - \sqrt{1-t}, \quad -\infty < t \leq 1$

62. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad t > 0$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

1. **Μάθετε γράφοντας** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για μια συνάρτηση της οποίας η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή σε κάποιο διάστημα είναι ίσες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
2. **Μάθετε γράφοντας** Αληθεύει ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο σε ένα κλειστό διάστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. **Μάθετε γράφοντας** Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα ακρότατα μιας συνεχούς συναρτήσεως σε ένα ανοιχτό διάστημα; Το ίδιο ερώτημα για ένα ημιανοιχτό διάστημα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
4. **Τοπικά ακρότατα** Χρησιμοποιήστε το τοπίο προσήμων της παραγώγου

$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

για να εντοπίσετε τα σημεία όπου η f εμφανίζει μέγιστα και ελάχιστα.

5. **Τοπικά ακρότατα**

(α) Έστω ότι η πρώτη παράγωγος της $y = f(x)$ είναι

$$y' = 6(x+1)(x-2)^2.$$

Σε ποια σημεία, αν υπάρχουν, εμφανίζει το γράφημα της f τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, και σημείο καμπής;

(β) Έστω ότι η πρώτη παράγωγος της $y = f(x)$ είναι

$$y' = 6x(x+1)(x-2).$$

Σε ποια σημεία, αν υπάρχουν, εμφανίζει το γράφημα της f τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, και σημείο καμπής;

6. **Μάθετε γράφοντας: Φραγμένη συνάρτηση** Αν $f'(x) \leq 2$ για κάθε x , τότε πόση είναι η μέγιστη αύξηση της f στο $[0, 6]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
7. **Φραγμένη συνάρτηση** Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και c ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Δείξτε ότι αν $f'(x) \leq 0$ στο $[a, c]$ και $f'(x) \geq 0$ στο $(c, b]$, τότε η $f(x)$ δεν γίνεται ποτέ μικρότερη της $f(c)$ στο $[a, b]$.
8. **Μια ανισότητα**
 - (α) Δείξτε ότι $-1/2 \leq x/(1+x^2) \leq 1/2$ για κάθε x .

- (β) Έστω ότι η παράγωγος της f είναι $f'(x) = x/(1+x^2)$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) δείξτε ότι

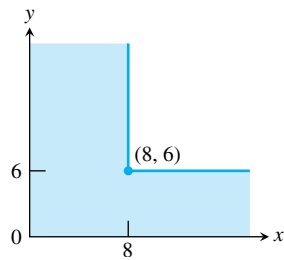
$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

για τυχόντα a και b .

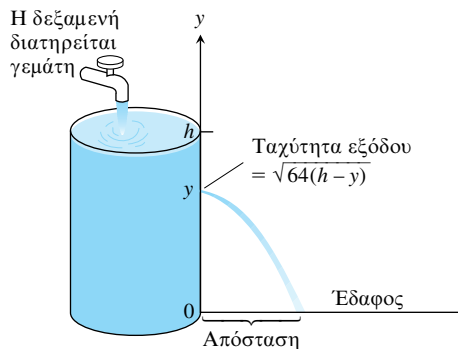
9. **Μάθετε γράφοντας** Η παράγωγος της $f(x) = x^2$ μηδενίζεται για $x = 0$, αλλά η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό δεν αντιβαίνει στο πόρισμα του θεωρήματος μέσης τιμής που λέει ότι συναρτήσεις με μηδενική παράγωγο είναι σταθερές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
10. **Ακρότατα και σημεία καμπής** Έστω $h = fg$ το γινόμενο δυο διαφορίσιμων συναρτήσεων του x .
 - (α) Αν οι f και g είναι θετικές, με τοπικά μέγιστα στο $x = a$, και αν οι f' και g' αλλάζουν πρόσημο στο a , τότε θα εμφανίζει η h τοπικό μέγιστο στο a ;
 - (β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σημεία καμπής για $x = a$, τότε θα έχει και η γραφική παράσταση της h σημείο καμπής στο a ;

Για κάθε ένα από τα παραδείγματα αυτά, αν η απάντησή σας είναι καταφατική, δώστε μιαν απόδειξη. Αν είναι αρνητική, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.
11. **Εύρεση συναρτήσεως** Χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα δεδομένα βρείτε τις τιμές των a , b , και c στον τύπο $f(x) = (x+a)/(bx^2+cx+2)$.
 - i. Τα a , b , και c είναι είτε 0 είτε 1.
 - ii. Το γράφημα της f διέρχεται από το σημείο $(-1, 0)$.
 - iii. Η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη του γραφήματος της f .
12. **Οριζόντια εφαπτομένη** Για ποια τιμή ή τιμές της σταθεράς k θα έχει η καμπύλη $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη;
13. **Μέγιστο εγγεγραμμένο τρίγωνο** Από τρία σημεία A , B , και C του μοναδιαίου κύκλου, τα δυο πρώτα είναι αντιδιαμετρικά αντίθετα. Αληθεύει ότι η περίμετρος του τριγώνου ABC γίνεται μέγιστη όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές; Πώς το ξέρετε;
14. **Το πρόβλημα της σκάλας** Πόσο είναι περίπου το μήκος (σε μέτρα) της μακρύτερης σκάλας που μπορείτε να μετα-

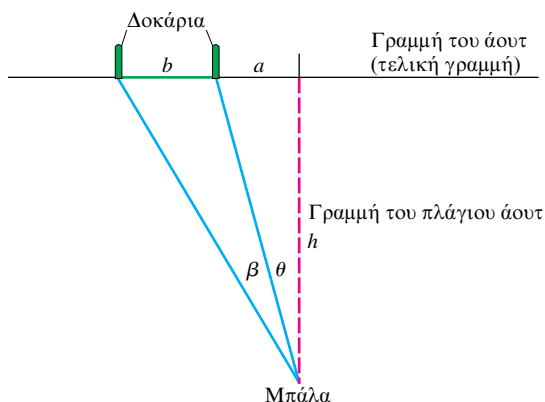
φέρετε οριζόντια, ενώ διασχίζετε τη γωνία του διαδρόμου που φαίνεται στο σχήμα; Στρογγυλοποιήστε την απάντησή σας στο πλησιέστερο μέτρο.



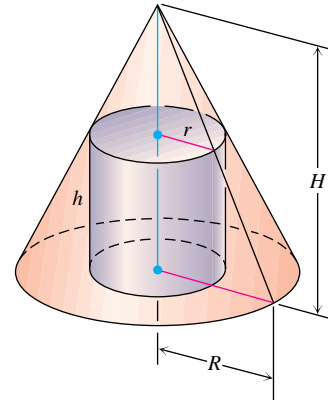
15. **Τρύπα σε δεξαμενή νερού** Θέλετε να ανοίξετε μια τρύπα στο πλαϊνό τοίχωμα της δεξαμενής που φαίνεται στο σχήμα, σε τέτοιο ύψος ώστε το εξερχόμενο νερό να εκτινάσσεται όσο το δυνατόν μακρύτερα από τη δεξαμενή προτού φτάσει στο έδαφος. Αν ανοίξετε την τρύπα κοντά στην οροφή της δεξαμενής, όπου η πίεση είναι χαμηλή, το νερό θα εξέρχεται με μικρότερη ταχύτητα αλλά θα κινείται για περισσότερο χρόνο προτού φτάσει στο έδαφος. Αν πάλι ανοίξετε την τρύπα κοντά στον πυθμένα της δεξαμενής, το νερό θα εκτινάσσεται με μεγαλύτερη ταχύτητα αλλά θα έχει λιγότερο χρόνο για να απομακρυνθεί. Ποια είναι η βέλτιστη θέση της τρύπας, αν υπάρχει τέτοια; (Υπόδειξη: Πόσο χρόνο θα κάνει ένα μόριο νερού που εξέρχεται από ύψος y να πέσει στο έδαφος;)



16. **Σκοράρισμα από τη γραμμή του πλάγιου άουτ** Ένας ποδοσφαιριστής θέλει να σκοράρει από σημείο της γραμμής του πλάγιου άουτ. Τα δοκάρια του τέρματος απέχουν b μέτρα μεταξύ τους, ενώ το πλησιέστερο στη γραμμή του πλάγιου άουτ δοκάρι απέχει $a > 0$ μέτρα από αυτήν. (Δείτε το παρατιθέμενο σχήμα.) Βρείτε την απόσταση h από τη γραμμή του άουτ (τελική γραμμή) που δίνει στον παίκτη τη μεγαλύτερη γωνία στόχευσης β . Θεωρήστε ότι το γήπεδο είναι επίπεδο.



17. **Ένα πρόβλημα μεγίστου-ελαχίστου με μεταβλητή απάντηση** Μερικές φορές η λύση προβλημάτων μεγίστου-ελαχίστου εξαρτάται από τις αναλογίες των μεγεθών που εμπλέκονται. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας r και ύψους h εγγράφεται σε ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας R και ύψους H , όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε την τιμή του r (συνάρτησε των R και H) που μεγιστοποιεί το συνολικό εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας (συμπεριλαμβανομένου του εμβαδού των βάσεων). Όπως θα δείτε, η λύση εξαρτάται από το αν είναι $H \leq 2R$ ή $H > 2R$.



18. **Ελαχιστοποίηση παραμέτρου** Βρείτε την ελάχιστη τιμή της θετικής σταθεράς m έτσι ώστε η ποσότητα $mx - 1 + (1/x)$ να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός για κάθε θετικό x .
19. **Απόδειξη του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου** Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για τοπικά μέγιστα και ελάχιστα (Ενότητα 3.3) λέει ότι:

(α) Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$ αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$

(β) Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$ αν $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$.

Για να αποδείξετε το (α), έστω $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

για να συμπεράνετε ότι για κάποιο $\delta > 0$, θα ισχύει

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0.$$

Έτσι, η $f'(c+h)$ είναι θετική για $-\delta < h < 0$ και αρνητική για $0 < h < \delta$. Με παρόμοιο τρόπο αποδείξτε το (β).

20. **Ανισότητα του Schwarz**

(α) Δείξτε ότι αν $a > 0$, τότε $f(x) = ax^2 + 2bx + c \geq 0$ για κάθε (πραγματικό) x αν και μόνο αν $b^2 \leq ac$.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του (α) στο άθροισμα

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2.$$

- (γ) Δείξτε ότι το σύμβολο της ισότητας στην ανισότητα του Schwarz θα ισχύει μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο το $a_i x$ ισούται με $-b_i$ για κάθε i από 1 έως και n .
21. **Περίοδος ρολογιού εκκρεμούς** Η περίοδος T ενός ρολογιού με εκκρεμές (δηλαδή ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης) δίδεται από τον τύπο $T^2 = 4\pi^2 L/g$, όπου το T μετριέται σε sec, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$, και το L , το μήκος του εκκρεμούς, μετριέται σε m. Βρείτε προσεγγιστικά
- (α) το μήκος ενός ρολογιού εκκρεμούς με περίοδο $T = 1 \text{ sec}$
 - (β) τη μεταβολή dT της περιόδου T αν το εκκρεμές του ερωτήματος (α) επιμηκυνθεί κατά $0,001 \text{ m}$
 - (γ) το συνολικό χρονικό διάστημα που κερδίζει ή χάνει το ρολόι σε μια ημέρα ως συνέπεια της μεταβολής της περιόδου κατά την ποσότητα dT που βρήκατε στο (β).
22. **Εκτίμηση αντιστρόφου χωρίς διαίρεση** Μπορείτε να εκτιμήσετε τον αντίστροφο ενός αριθμού a χωρίς να εκτελέσετε την πράξη διαίρεσης της μονάδας με a , αλλά εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $f(x) = (1/x) - a$. Για παράδειγμα, αν $a = 3$, η σχετική συνάρτηση είναι η $f(x) = (1/x) - 3$.
- (α) Παραστήστε γραφικά την $y = (1/x) - 3$. Πού τέμνει το γράφημα τον άξονα x ;
 - (β) Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή ο αναδρομικός τύπος της ρίζας της εξίσωσης γίνεται

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

οπότε όντως δεν χρειάζεται να εκτελεστεί η διαίρεση για να βρεθεί ο αντίστροφος.