

Ονοματεπώνυμο:

ΑΜ:

1. Με χρήση της σχέσης $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$ ή με κάποιο άλλο τρόπο να βρεθούν οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

(α) $f(x) = \cot^{-1}(x)$

(β) $f(x) = \sin^{-1}(x)$

2. Δίδεται ο κύκλος ο μοναδιαίος $x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $y = -\frac{x}{5} + 2$. Να βρεθεί το σημείο στην ευθεία το οποίο απέχει την μικρότερη απόσταση από τον κύκλο.
3. Δίδεται η παραβολή $y = x^2 - 1$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(x, y) = (2, 1)$ από την παραβολή.
4. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $f(x) = 2x \cos(2x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Να βρεθεί ο αριθμός και η θέση κατά προσέγγιση των κρίσιμων σημείων της με χρήση της μεθόδου του Νεύτωνα ή άλλη μέθοδο.
5. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^9 + z^6 + 5z^3 + 5 = 0$.
6. Σύμφωνα με την λογιστική εξίσωση $\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$ ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού είναι ανάλογος του πληθυσμού $P(t)$ την χρονική στιγμή t και ανάλογος της διαφοράς του από τον μέγιστο πληθυσμό M τον οποίο μπορεί να συντηρήσει το σύστημα. Υποθέτουμε τώρα ότι η παράμετρος r εξαρτάται και αυτή από τον πληθυσμό μέσω της συναρτησιακής σχέσης $r = r(t) = k\left(\frac{3M}{4} - P\right)$, όπου k σταθερά. Να βρεθούν
- (α) Η πλήρης ευθεία φάσεων της νέας λογιστικής εξίσωσης
- (β) Να σχεδιαστούν οι διαφορετικές πληθυσμιακές καμπύλες (λύσεις) της νέας εξίσωσης στις μεταβλητές (P, t) για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.
- (γ) Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από την νέα εξίσωση;

7. Να υπολογισθούν τα όρια

(α) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{1/5} - 2x + 10}{5x^{3/5} + 3x + 9}$

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x - 2\sqrt{x}}{x + 2 \sin x}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos 2x}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

(α) Να γίνει ανάλυση της συνάρτησης, να βρεθούν τα ακρότατα, ο αριθμός των ριζών της και να γίνει γραφική παράσταση.

(β) Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Νεύτωνα και να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης σε ακρίβεια μικρότερη από 5%. Πόσα βήματα χρειάζονται;

9. Να βρεθεί η πρώτη και δεύτερη παράγωγος ως προς την μεταβλητή x για τις παρακάτω περιπτώσεις

(α) Παραμετρική καμπύλη $x(t) = \cot^2(x)$, $y(t) = \sin(x)$

(β) Πεπλεγμένη συνάρτηση $x^{1/2} + y^{2/3} + 5x^3y = 1$

10. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

(α) $f(x) = \frac{\ln(x^4 + 2)}{\sqrt{x} - 3\sin x + 2}$

(β) $f(x) = \cos(\ln(x^{4x}))$

(γ) $f(x) = \frac{x \ln(3x) + 10^{6x}}{\sqrt{x^4 + 2}}$

(δ) $f(x) = 7^{7^x}$

(ε) $f(x) = 7^{7^{7^x}}$

**ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**