

Ασκήσεις 4

Τοπικά ακρότατα και κρίσιμα σημεία

Στις Ασκήσεις 31-38, βρείτε την παράγωγο σε κάθε κρίσιμο σημείο και προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα.

31. $y = x^{2/3}(x + 2)$

32. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

33. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

34. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

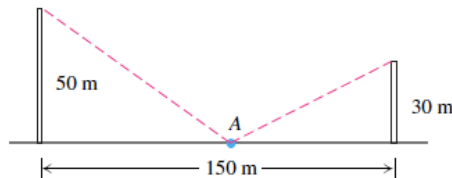
35. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

36. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

37. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

38. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

Μήκος καλωδίου Δύο πύργοι έχουν ύψος 50 m και 30 m αντίστοιχα, και απέχουν 150 m. Ένα καλώδιο πρόκειται να συνδέσει το σημείο A με την κορυφή κάθε πύργου.



- (α) Εντοπίστε τη θέση του A που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος του καλωδίου.
- (β) Δείξτε γενικά ότι, ανεξαρτήτως του ύψους των πύργων, το μήκος του καλωδίου ελαχιστοποιείται αν οι γωνίες με κορυφή το σημείο A γίνουν ίσες.

51. **Ένα ελάχιστο άνευ παραγώγου** Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ παρόλο που η f δεν είναι διαφορίσιμη εκεί. Είναι συμβατό αυτό με το Θεώρημα 2; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

52. **Άρτιες συναρτήσεις** Αν μια άρτια συνάρτηση $f(x)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της f στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

53. **Περιττές συναρτήσεις** Αν μια περιττή συνάρτηση $g(x)$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = c$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της g στο $x = -c$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

35. **Γεωμετρικός μέσος των a και b** Ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών a και b ισούται με $\sqrt{ab}$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = 1/x$ στο θετικό διάστημα $[a, b]$ για να δείξετε ότι το c (που εμφανίζεται στο θεώρημα) ισούται με $c = \sqrt{ab}$.

Στις Ασκήσεις 35 και 36, εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.

(α) Βρείτε πού εμφανίζονται και ποια είναι τα ολικά ακρότατα της f .

(β) Βρείτε όποια σημεία καμπής υπάρχουν.

(γ) Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση της f .

35. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	δεν υπάρχει	-3
f''	0	-1	δεν υπάρχει	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	-
f'	+	-	-
f''	-	-	-

36. Η f είναι άρτια και συνεχής στο $[-3, 3]$, και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

x	0	1	2
f	2	0	-1
f'	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει
f''	δεν υπάρχει	0	δεν υπάρχει

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	-	-
f'	-	-	+
f''	+	-	-

Ευθείες φάσεων και καμπύλες λύσεων

Στις Ασκήσεις 1-8,

(α) Βρείτε τις τιμές ισορροπίας. Ποιες από αυτές αντιστοιχούν σε ευσταθή και ποιες σε ασταθή ισορροπία;

(β) Κατασκευάστε την ευθεία φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y'' .

(γ) Σχεδιάστε ποιοτικά μερικές καμπύλες λύσεων.

1. $\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$

2. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\frac{dy}{dx} = y^3 - y$

4. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}$, $y > 0$

6. $y' = y - \sqrt{y}$, $y > 0$

7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

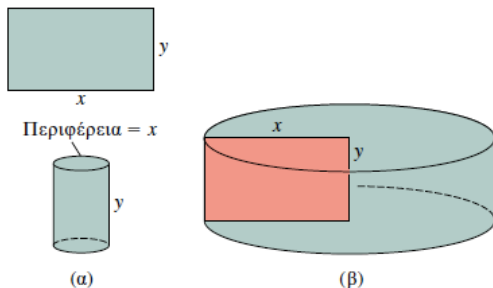
8. $y' = y^3 - y^2$

8. **Η ελάχιστη περιφέρεια** Ένα χωράφι αρακά έκτασης 216 m^2 και σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου πρόκειται να περιφραχτεί και κατόπιν να μοιραστεί στα δύο, πάλι με φράχτη, παράλληλο στις δύο πλευρές του. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του εξωτερικού παραλληλογράμμου για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μήκος περιφράξης; Πόση περίφραξη θα χρειαστεί τότε;

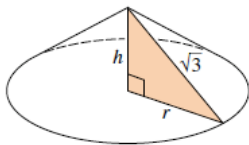
16. **Αντίσταση ανάλογη του $\sqrt{v}$** Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα και προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα v_0 . Υποθέστε ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της ταχύτητας και βρείτε την τελική ταχύτητα με γραφική ανάλυση.
17. **Ιστιοπλοΐα** Ένα ιστιοφόρο ακολουθεί ευθεία πορεία, με τον άνεμο να δημιουργεί μια σταθερή δύναμη πρόωσης μέτρου 25 N. Η μόνη άλλη δύναμη που δρα στο ιστιοφόρο είναι η αντίσταση από το νερό κατά την κίνησή του. Η δύναμη αντίστασης έχει μέτρο που ισούται με το πενταπλάσιο της ταχύτητας του ιστιοφόρου· η αρχική ταχύτητα είναι 1 m/sec. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα σε m ανά sec που μπορεί να αναπτύξει το σκάφος με τέτοιο άνεμο;

26. **Κατασκευή κυλίνδρων** Συγκρίνετε τις απαντήσεις στα ακόλουθα προβλήματα κατασκευής.

- (α) Ένα ορθογώνιο φύλλο περιμέτρου 36 cm και διαστάσεων x cm επί y cm τυλίγεται σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος;
- (β) Το ίδιο φύλλο περιστρέφεται γύρω από τη μια του πλευρά μήκους y διαγράφοντας τον κύλινδρο που φαίνεται στο σχήμα (β). Για ποιες τιμές των x και y μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;



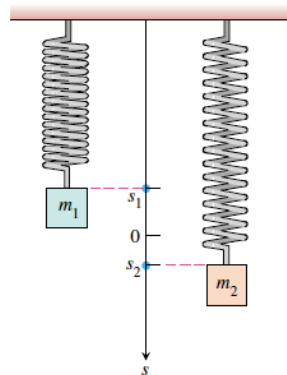
27. **Κατασκευή κώνων** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο υποτείνουσας $\sqrt{3}$ m περιστρέφεται γύρω από τη μία κάθετη πλευρά του, διαγράφοντας κώνο. Να βρεθεί η ακτίνα, το ύψος, και ο όγκος του κώνου, όταν ο όγκος είναι μέγιστος.



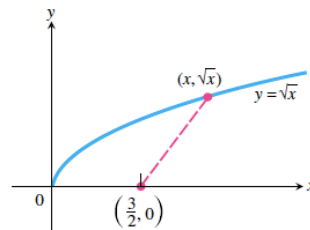
5. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε τη θετική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = 1$ και βρείτε το x_2 .
6. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρείτε την αρνητική τέταρτη ρίζα του 2 επιλύοντας την εξίσωση $x^4 - 2 = 0$. Ξεκινήστε με $x_0 = -1$ και βρείτε το x_2 .

38. **Ταλαντούμενες μάζες** Δύο μάζες που κρέμονται από ελατήρια η μια δίπλα στην άλλη έχουν συναρτήσεις θέσεως $s_1 = 2 \sin t$ και $s_2 = \sin 2t$, αντίστοιχα.

- (α) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 < t$ έχουν οι μάζες το ίδιο ύψος; (Υπόδειξη: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.)
- (β) Σε ποιες χρονικές στιγμές του διαστήματος $0 \leq t \leq 2\pi$ γίνεται μέγιστη η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των μαζών; Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Υπόδειξη: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$.)



- (α) Πόσο κοντά στο σημείο $(3/2, 0)$ διέρχεται η καμπύλη $y = \sqrt{x}$; (Υπόδειξη: Ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο της απόστασης, αποφεύγετε τις τετραγωνικές ρίζες.)



- (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση της απόστασης και την $y = \sqrt{x}$ σε κοινό σχήμα, και επαληθεύστε έτσι την απάντησή σας στο (α).

Παράγωγοι σε διαφορική μορφή

Στις Ασκήσεις 15-24, βρείτε το dy .

- | | |
|-----------------------------|---|
| 15. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$ | 16. $y = x\sqrt{1-x^2}$ |
| 17. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ | 18. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$ |
| 19. $2y^{3/2} + xy - x = 0$ | 20. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$ |
| 21. $y = \sin(5\sqrt{x})$ | 22. $y = \cos(x^2)$ |
| 23. $y = 4 \tan(x^3/3)$ | 24. $y = \sec(x^2 - 1)$ |

12. *Οριζόντια εφαπτομένη* Για ποια τιμή ή τιμές της σταθεράς k θα έχει η καμπύλη $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη;
13. *Μέγιστο εγγεγραμμένο τρίγωνο* Από τρία σημεία A, B , και C του μοναδιαίου κύκλου, τα δυο πρώτα είναι αντιδιαμετρικά αντίθετα. Αληθεύει ότι η περίμετρος του τριγώνου ABC γίνεται μέγιστη όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές; Πώς το ξέρετε;

Στις Ασκήσεις 41 και 42,

- (α) Εντοπίστε τα σημεία ηρεμίας. Ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή;
- (β) Κατασκευάστε την ευθεία των φάσεων. Βρείτε τα πρόσημα των y' και y'' .
- (γ) Σχεδιάστε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των καμπυλών λύσεων.

41. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$

42. $\frac{dy}{dx} = y - y^2$