

Ασκήσεις 3

25. *Μπαλόνι που φουσκώνει* Ο όγκος $V = (4/3)\pi r^3$ ενός σφαιρικού μπαλονιού εξαρτάται από την ακτίνα.

- (α) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του όγκου (m^3/m) ως προς την ακτίνα, όταν $r = 0,6 \text{ m}$;
 (β) Πόσο περίπου αυξάνεται ο όγκος όταν η ακτίνα μεταβληθεί από 0,6 σε 0,7 m;

26. *Απογείωση αεροπλάνου* Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση που διανύει ένα αεροσκάφος στον διάδρομο πριν την απογείωση δίδεται από τη σχέση $D = (10/9)t^2$, όπου η απόσταση D μετριέται σε m από το σημείο εκκινήσεως και ο χρόνος t μετριέται σε sec από τη στιγμή που ο πιλότος αφήνει τα φρένα. Το αεροσκάφος απογειώνεται όταν η ταχύτητά του φθάσει τα 200 km/h. Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται γι' αυτό, και πόση απόσταση διανύεται στο μεταξύ;

Στις Ασκήσεις 15-18, να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος κάθε συναρτήσεως.

15. $s = \frac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

16. $r = \frac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

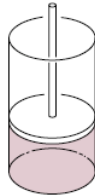
17. $w = \left(\frac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

18. $p = \left(\frac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\frac{q^4 - 1}{q^3}\right)$

29. *Πίεση κυλινδρικού δοχείου* Αν ένας κύλινδρος περιέχει αέριο σε σταθερή θερμοκρασία T , η πίεση P συνδέεται με τον όγκο V μέσω του τύπου

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

όπου a , b , n , και R είναι σταθερές. Βρείτε την dP/dV .



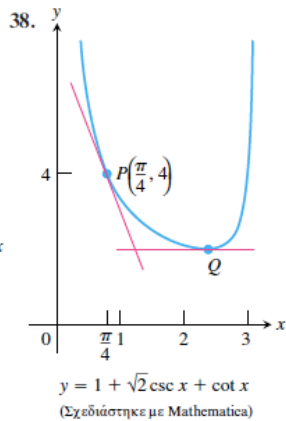
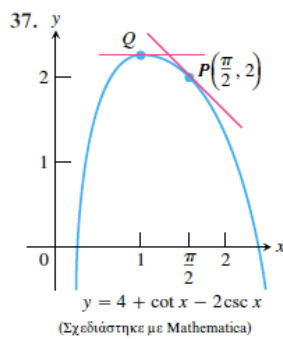
Παράγωγοι

Στις Ασκήσεις 1-12, βρείτε το dy/dx .

1. $y = -10x + 3 \cos x$
 2. $y = \frac{3}{x} + 5 \sin x$
 3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
 4. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$
 5. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
 6. $y = (\sin x + \cos x) \sec x$
 7. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$
 8. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
 9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
 10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$
 11. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
 12. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$
- Στις Ασκήσεις 13-16, βρείτε το ds/dt .

13. $s = \tan t - t$
 14. $s = t^2 - \sec t + 1$
 15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$
 16. $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$
- Στις Ασκήσεις 17-20, βρείτε το $dr/d\theta$.
17. $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$
 18. $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$
 19. $r = \sec \theta \csc \theta$
 20. $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$
- Στις Ασκήσεις 21-24, βρείτε το dp/dq .
21. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$
 22. $p = (1 + \csc q) \cos q$
 23. $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$
 24. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$
25. Βρείτε το y'' αν
(α) $y = \csc x$. (β) $y = \sec x$.
26. Βρείτε το $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ αν
(α) $y = -2 \sin x$. (β) $y = 9 \cos x$.

Στις Ασκήσεις 37 και 38, βρείτε μια εξίσωση για (α) την εφαπτομένη της καμπύλης στο P και (β) την οριζόντια εφαπτομένη στο Q .



42. *Μάθετε γράφοντας* Υπάρχει τιμή του b για την οποία η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

γίνεται συνεχής στο $x = 0$; Διαφορίσιμη στο $x = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

43. Υπολογίστε το $d^{999}/dx^{999} (\cos x)$.

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 13-26.

$$13. q = \sqrt{2r - r^2}$$

$$14. s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

$$15. r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1} \quad 16. r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$$

$$17. y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x \quad 18. y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$$

$$19. y = \frac{1}{21} (3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$$

$$20. y = (4x + 3)^4 (x + 1)^{-3}$$

$$21. h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7 \quad 22. k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$23. f(\theta) = \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}\right)^2 \quad 24. r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta)$$

$$25. r = \sec \sqrt{\theta} \tan\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad 26. q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$$

Στις Ασκήσεις 33-40, γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που ορίζει το εκάστοτε t . Στο ίδιο σημείο να υπολογιστεί η τιμή της d^2y/dx^2 .

$$33. x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t = \pi/4$$

$$34. x = \cos t, \quad y = \sqrt{3} \cos t, \quad t = 2\pi/3$$

$$35. x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$$

$$36. x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$$

$$37. x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$$

Με τη μέθοδο παραγωγισής πεπλεγμένης συναρτήσεως βρείτε την dy/dx στις Ασκήσεις 13-22.

$$13. x^2y + xy^2 = 6$$

$$14. 2xy + y^2 = x + y$$

$$15. x^3 - xy + y^3 = 1$$

$$16. x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$$

$$17. y^2 = \frac{x-1}{x+1}$$

$$18. x^2 = \frac{x-y}{x+y}$$

$$19. x = \tan y$$

$$20. x + \sin y = xy$$

$$21. y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$$

$$22. y^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$$

Βρείτε την $dr/d\theta$ στις Ασκήσεις 23-26.

$$23. \theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$$

$$24. r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$$

$$25. \sin(r\theta) = \frac{1}{2}$$

$$26. \cos r + \cos \theta = r\theta$$

Στις Ασκήσεις 27-30, εφαρμόστε παραγωγή πεπλεγμένης συναρτήσεως για να βρείτε την dy/dx και κατόπιν την d^2y/dx^2 .

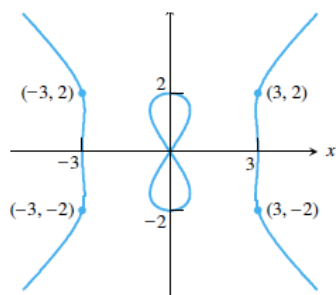
$$27. x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$28. y^2 = x^2 + 2x$$

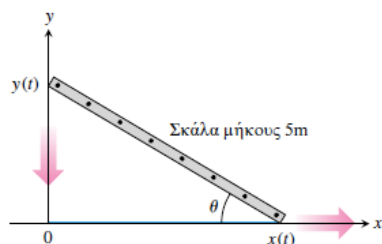
$$29. 2\sqrt{y} = x - y$$

$$30. xy + y^2 = 1$$

51. Η «καμπύλη του ... διαβόλου» (του Gabriel Cramer, γνωστή από τον ομώνυμο κανόνα, 1750) Βρείτε την κλίση της μύλης του διαβόλου» $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ στα τέρα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα.



13. *Σκάλα που ολισθαίνει* Μια σκάλα μήκους 5 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν τοίχο όταν η βάση της αρχίζει να ολισθαίνει. Τη στιγμή που η βάση απέχει 4 m από τον τοίχο, η ταχύτητα ολίσθησης της βάσης είναι 1,5 m/sec.



- (α) Με ποια ταχύτητα κινείται εκείνη τη στιγμή η κορυφή της σκάλας;
 (β) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο, και το έδαφος;
 (γ) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος;
24. *Καφές φίλτρου* Από ένα κωνικό φίλτρο χύνεται καφές σε μια κυλινδρική καφετιέρα με ρυθμό $100 \text{ cm}^3/\text{min}$.
- (α) Πόσο γρήγορα ανεβαίνει η στάθμη του καφέ στην καφετιέρα τη στιγμή που στο φίλτρο ο καφές έχει βάθος 5 cm;
 (β) Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του καφέ στο φίλτρο τότε;

