

Αλγεβρική εύρεση πλευρικών ορίων

Στις Ασκήσεις 27-32, να βρεθούν τα όρια:

$$27. \lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right)$$

$$29. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$30. \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$$

$$31. (α) \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2} \quad (β) \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}$$

$$32. (α) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$$

Σε ποια σημεία παύουν να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 11 και 12; Σε ποια από αυτά η ασυνέχεια είναι αιρόμενη, και σε ποια μη αιρόμενη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

11. Άσκηση 11, Παράγραφος 1.1

12. Άσκηση 12, Παράγραφος 1.1

Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 13-20;

$$13. y = \frac{1}{x-2} - 3x$$

$$14. y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$$

$$15. z = \frac{t+1}{t^2-4t+3}$$

$$16. u = \frac{1}{|t|+1} - \frac{t^2}{2}$$

$$17. r = \frac{\cos \theta}{\theta}$$

$$18. y = \tan \frac{\pi \theta}{2}$$

$$19. s = \sqrt{2v+3}$$

$$20. y = \sqrt[4]{3x-1}$$

Σύνθετες συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 21-24, να βρεθούν τα όρια. Είναι συνεχείς οι συναρτήσεις στο σημείο υπολογισμού κάθε ορίου;

$$21. \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$$

$$22. \lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$$

$$23. \lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$$

$$24. \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin \theta^{1/3})\right)$$

Όρια και συνέχεια

1. Σχεδιάστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Κατόπιν μελετήστε λεπτομερώς τα όρια, τα πλευρικά όρια, τη συνέχεια, και την πλευρική συνέχεια της f στα σημεία $x = -1, 0$, και 1 . Είναι καμία από τις ασυνέχειες αιρόμενη; Εξηγήστε.

2. Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην Άσκηση 1 για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Έστω ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι ορισμένες για κάθε t και ότι $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = -7$ και $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0$. Βρείτε τα όρια, καθώς $t \rightarrow t_0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$(α) 3f(t)$$

$$(β) (f(t))^2$$

Εύρεση ορίων

Στις Ασκήσεις 9-16, βρείτε κάθε όριο ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$$

(α) καθώς $x \rightarrow 0$

(β) καθώς $x \rightarrow 2$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$$

(α) καθώς $x \rightarrow 0$

(β) καθώς $x \rightarrow -1$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$$

$$13. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

Στις Ασκήσεις 17-28, να βρεθούν τα όρια.

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{5x+7}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 7x + 1}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x}{x+1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\int_1^x x} \quad (\text{Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε τη συνάρτηση για } -5 \leq x \leq 5.)$

$$(γ) f(t) \cdot g(t)$$

$$(δ) \frac{f(t)}{g(t)-7}$$

$$(ε) \cos(g(t))$$

$$(στ) |f(t)|$$

$$(ζ) f(t) + g(t)$$

$$(η) 1/f(t)$$

4. Έστω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι ορισμένες για κάθε x και ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sqrt{2}$. Βρείτε τα όρια, καθώς $x \rightarrow 0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$(α) -g(x)$$

$$(β) g(x) \cdot f(x)$$

$$(γ) f(x) + g(x)$$

$$(δ) 1/f(x)$$

$$(ε) x + f(x)$$

$$(στ) \frac{f(x) \cdot \cos x}{x-1}$$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, βρείτε ποια τιμή πρέπει να έχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ώστε να αληθεύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 - g(x)}{x} \right) = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -4} \left(x \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \right) = 2$$

7. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

$$(α) f(x) = x^{1/3}$$

$$(β) g(x) = x^{3/4}$$

$$(γ) h(x) = x^{-2/3}$$

$$(δ) k(x) = x^{-1/6}$$