

Υπολογισμοί ορίων

Στις Ασκήσεις 11-14, να βρεθούν τα όρια:

11. (α) $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$ (β) $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$

(γ) $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$ (δ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$

12. (α) $\lim_{r \rightarrow -2} (r^3 - 2r^2 + 4r + 8)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 6}$

(γ) $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{4/3}$ (δ) $\lim_{\theta \rightarrow 5} \frac{\theta - 5}{\theta^2 - 25}$

13. (α) $\lim_{t \rightarrow -5} \frac{t^2 + 3t - 10}{t + 5}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

(γ) $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\sqrt{y + 3} - 2}$

14. (α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$ (β) $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\theta^4 - 1}{\theta^3 - 1}$

(γ) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{t}}{9 - t}$

Χρήση του Θεωρήματος «σάντουιτς»

15. Μάθετε γράφοντας (α) Μπορεί ναδειχτεί ότι οι ανισότητες

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

ισχύουν για κάθε x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

T (β) Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2 \cos x)$, και $y = 1$, για $-2 \leq x \leq 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \rightarrow 0$.

16. Μάθετε γράφοντας (α) Οι ανισότητες

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

ισχύουν για x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

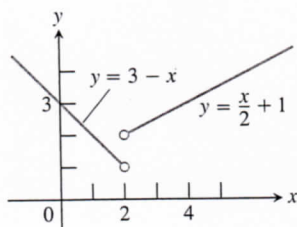
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

T (β) Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$, και $y = 1/2$, για $-2 \leq x \leq 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \rightarrow 0$.

22. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$$



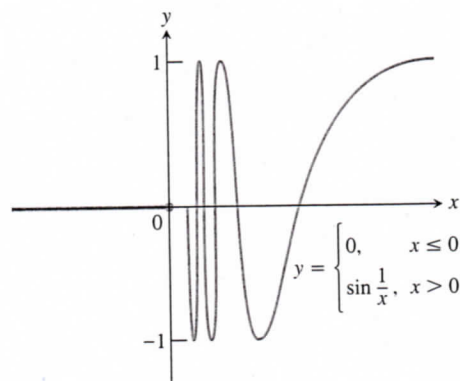
(α) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

(β) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$.

(δ) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

23. Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

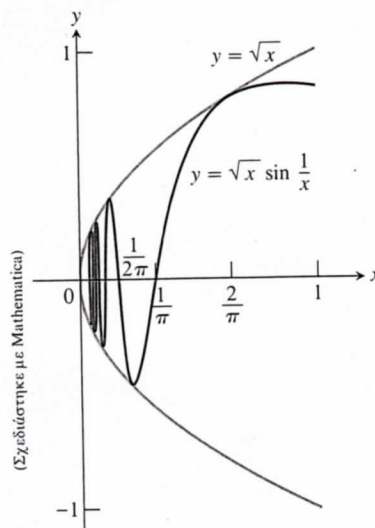


(α) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

24. Έστω $g(x) = \sqrt{x} \sin(1/x)$.



(α) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;