ΦΩΤΙΟΣ Δ. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΤΕΤΡΑΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟ

Ηράκλειο, Μάιος 2006

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή θα διατυπώσουμε βασικές σχέσεις του ηλεκτρομαγνητισμού με τετραδιανύσματα. Συγκεκριμένα, αφού κάνουμε μια αναφορά στην έννοια της μετρικής και του τανυστή, θα θεωρήσουμε σωμάτιο(α) σε δοθέν ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αλλά και σύστημα σωματίων και πεδίου. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής και θα κλείσουμε με τα καθυστερημένα δυναμικά.

ΜΕΡΟΣ 1

Τανυστές

1.1 Η μετρική

Στην ειδική σχετικότητα οι συντεταγμένες ενός γεγονότος (event) (ct, x, y, z) μπορούν να θεωρηθούν συνιστώσες ενός «τετραδιανύσματος» (four vector) ενός τετραδιάστατου χώρου

$$O_{ctxyz}\,.$$

Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε

$$ct \equiv x^0, \quad x \equiv x^1, \quad y \equiv x^2, \quad z \equiv x^3\,.$$

Θεωρούμε επίσης ότι δίνονται δεκαέξι ποσότητες

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

για $i, k = 0,1,2,3$, με την ιδιότητα

$$g_{ik} = g_{ki}\,.$$

Ορίζουμε

$$g^{ik} = \frac{1}{g}(-1)^{i+k}\,\tilde{g}_{ik}$$

όπου g η ορίζουσα $\det(g_{ik})$ των ποσοτήτων g_{ik} θεωρούμενες ως πίνακας και $\tilde{g}_{ik}$ η ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα (g_{ik}) που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την k στήλη. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι

$$g^{ik} = g^{ki}$$

και

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$$

όπου στην τελευταία έχουμε άθροιση στον δείκτη k κατά τον συνήθη συμβολισμό Einstein. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι, βλέποντας τον (g^{ik}) ως πίνακα, αυτός είναι ο αντίστροφος του πίνακα (g_{ik}). Οι ποσότητες g_{ik} καλούνται **μετρική** του χώρου $O_{x^0x^1x^2x^3}$.

Θεωρώντας δυο γεγονότα να απέχουν απειροστά (με την έννοια της απειροστής διαφοράς των συντεταγμένων τους), ορίζουμε το διάστημα ds μεταξύ τους από την σχέση

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k .$$

1.2 Η έννοια του τανυστή

1.2.1 Ορισμοί

Θεωρούμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

για $i = 0,1,2,3$ οι οποίες μπορούν να αντιστραφούν δίνοντας

$$x^i = x^i (\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3) .$$

Το «αντικείμενο»

$$\overline{A}^{ik}_{lm} = \overline{A}^{ik}_{lm} (\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$$

και αντίστοιχα

$$A^{ik}_{lm} = A^{ik}_{lm} (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

όπου

$$\overline{A}^{ik}_{lm} = J^N A^{ab}_{pr} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^b} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^m}$$

με

$$J = \frac{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial (\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)}$$

καλείται μεικτός **τανυστής** ανταλλοίωτος τάξης (order) 2, συναλλοίωτος τάξης 2 με βάρος N. Αν $N = 0$ έχουμε απόλυτο (absolute) τανυστή. Το άθροισμα $2+2$ θα καλέσουμε επίσης τάξη (rank) του τανυστή. Οι παραπάνω τροποποιούνται με προφανή τρόπο για οποιαδήποτε τάξη.

Σαν παράδειγμα τανυστή τάξης 2 μπορούμε να αναφέρουμε την μετρική g_{ik}, δεδομένου ότι

$$\overline{g}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^k} g_{lm} .$$

Παράδειγμα ανταλλοίωτου τανυστή τάξης 1 είναι το τετραδιάνυσμα $d\overline{x}^i$, για το οποίο

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} dx^k .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$ds^2 = \overline{g}_{ik} d\overline{x}^i d\overline{x}^k .$$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι

$$\overline{g} = \det(\overline{g}_{ik}) = J^2 g$$
$$\overline{g}^{ik} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} g^{lm} .$$

Οι ποσότητες u^i όπου

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

αποτελούν ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα. Χρήσιμος είναι επίσης ο ανταλλοίωτος τανυστής ε^{iklm} τάξης 4 και βάρους $N = +1$ όπου

$$\varepsilon^{0123} = +1$$

και

$$\varepsilon^{iklm} = \begin{cases} +1 & iklm \text{ άρτια μετάθεση του } 0123 \\ -1 & iklm \text{ περιττή μετάθεση του } 0123 \\ 0 & \text{δυο δεικτες ισοι.} \end{cases}$$

1.2.2 Πράξεις μεταξύ τανυστών

Ορίσουμε η πρόσθεση δύο τανυστών A, B να είναι ο τανυστής C με

$$C^{ik}_{lm} = A^{ik}_{lm} + B^{ik}_{lm} .$$

Ορίζουμε το ευθύ γινόμενο (direct ή outer product) δύο τανυστών A, B να είναι ο τανυστής C με

$$C^{ikab}_{lmpr} = A^{ik}_{lm} B^{ab}_{pr}$$

και την πράξη της συστολής (contraction)

$$C_l^i = A_{lk}^{ik}$$

όπου, στην τελευταία, αθροίζουμε ως προς το k.

Έστω τετραδιάνυσμα με ανταλλοίωτες συνιστώσες A^i. Ορίζουμε τις συναλλοίωτες (covariant) συνιστώσες A_i από την σχέση

$$A_i = g_{ik} A^k .$$

Αποδεικνύεται ότι

$$A^i = g^{ik} A_k .$$

Έστω A^i, B^i τετραδιανύσματα. Ο αριθμός M όπου

$$M^2 = A^i A_i = g_{ik} A^i A^k$$

καλείται **μέτρο** του A. Η ποσότητα

$$g_{ik} A^i B^k = A_k B^k$$

καλείται **εσωτερικό γινόμενο** των A, B. Κατά συνέπεια τα A, B θα χαρακτηρίζονται κάθετα αν

$$g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = 0 .$$

Έτσι λοιπόν, αν A^i τετραδιάνυσμα

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} A^k$$
$$A_i = g_{ik} A^k$$
$$\overline{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k ,$$

και αν A^{ik} τανυστής

$$A_i^{\ k} = g_{il} A^{lk}$$
$$A_{ik} = g_{km} A_i^{\ m} = g_{km} g_{il} A^{lm} .$$

1.3 Παραγώγιση – ολοκλήρωση

Στην περίπτωση όπου g_{ik} σταθερές και ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι τέτοιος ώστε οι παράγωγοι $\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}$ να είναι επίσης σταθερές, έχουμε:

$$\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} x^k$$

δηλαδή το x^i είναι ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα. Κατά συνέπεια το x_i με

$$x_i = g_{ik} x^k$$

είναι συναλλοίωτο τετραδιάνυσμα.

Μια σημαντική συνέπεια της αρχικής υπόθεσής μας είναι ότι η παράγωγος ενός (απολύτου) τανυστή είναι τανυστής. Συγκεκριμένα αν

$$\frac{\partial A^{ik}{}_{ab}}{\partial x^l} = B^{ik}{}_{abl}$$

ο $B^{ik}{}_{abl}$ είναι τανυστής.

Μπορούμε επίσης να μιλήσουμε για ολοκλήρωση και συγκεκριμένα να διατυπώσουμε μια γενίκευση του θεωρήματος της απόκλισης. Ειδικότερα, έστω μια υπερεπιφάνεια

$$x^i = x^i(u, v, w), \quad i = 0, 1, 2, 3 .$$

Ορίζουμε

$$dS^i = -\frac{1}{6} \varepsilon^{iklm} dS_{klm}$$

όπου

$$dS^{ikl} = \frac{\partial (x^i, x^k, x^l)}{\partial (u, v, w)} du dv dw .$$

Έστω επίσης

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 .$$

Τότε

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial}{\partial x^i} A^i d\Omega .$$

Στην ειδική σχετικότητα

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

ή ισοδύναμα

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

ΜΕΡΟΣ 2

Τανυστές και ηλεκτρομαγνητισμός

2.1 Σωμάτιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

2.1.1 Ο μετασχηματισμός Lorentz

Ο μετασχηματισμός Lorentz είναι μετασχηματισμός συντεταγμένων της μορφής

$$x^i = \Lambda^i_{\ k} \overline{x}^k$$

με, χωρίς βλάβη της γενικότητας,

$$(\Lambda^i_{\ k}) = \begin{pmatrix} 1/\gamma & \frac{V}{c}\Big/\gamma & 0 & 0 \\ \frac{V}{c}\Big/\gamma & 1/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

ή με το γνωστό συμβολισμό

$$x = \frac{\bar{x} + V\bar{t}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \frac{\bar{t} + \frac{V}{c^2}\bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

2.1.2 Σωμάτιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Η δράση S σωματίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από την

$$S = \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

με

$$A^i = (\phi, \mathbf{A})$$

δηλαδή

$$A^0 = \phi, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z .$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

με

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

την Λαγκρανζιανή του συστήματος.

Όπως είναι γνωστό οι εξισώσεις του τελευταίου είναι οι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

όπου

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z} \right) \equiv \nabla L$$

και όμοια για την $\partial L / \partial \mathbf{v}$. Μετά από πράξεις οι τελευταίες παίρνουν την γνωστή μορφή:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

όπου

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\,.$$

2.1.3 Οι εξισώσεις με τετραδιανύσματα

Μπορούμε όμως να εργαστούμε και με την S που δόθηκε αρχικά, με σκοπό την εξαγωγή εξισώσεων με τετραδιανύσματα:

Ορίζουμε τον τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου F^{ik}

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,.$$

Κατά τα γνωστά από την κλασσική μηχανική θεωρούμε

$$x^i \to x^i + \delta x^i$$

απαιτώντας

$$\delta S = 0\,.$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στις

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$$

όπου

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας.

Με τους ορισμούς που δόθηκαν ήδη εύκολα φαίνεται ότι

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

όπου θεωρήσαμε ότι

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$$
$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)\,.$$

Συμβολικά επίσης γράφουμε

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})\,.$$

Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω για $i = 1,2,3$ δίνουν τις $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \dfrac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ και για $i = 0$ την

$$\frac{d\mathcal{E}_{\kappa\iota\nu.}}{dt} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

με

$$\mathcal{E}_{\kappa\iota\nu.} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Όπως σε οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα, μπορούμε να ορίσουμε το τετραδιάνυσμα της γενικευμένης ορμής (generalized momentum four vector)

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

και εύκολα βλέπουμε ότι

$$P^i = \left(\frac{\mathcal{E}_{\kappa\iota\nu.} + e\phi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right).$$

Δεδομένου ότι $A^i = (\phi, \mathbf{A})$ τετραδιάνυσμα, μπορούμε να γράψουμε τον μετασχηματισμό Lorentz γι’ αυτό. Αν

$$A^i = (\phi, \mathbf{A})$$
$$\overline{A}^i = (\phi', \mathbf{A}')$$

$$\phi = \frac{\phi' + \dfrac{V}{c}\mathrm{A}'_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \dfrac{V}{c}\phi'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z\,.$$

Εξάλλου, εφόσον F^{ik} τανυστής είναι

$$F^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\overline{F}^{ml}$$

και αν

$$F_{ik} = (\mathbf{E},\mathbf{B}), \quad \overline{F}_{ik} = (\mathbf{E}',\mathbf{B}')$$

ο τελευταίος «κανόνας μετασχηματισμού» γράφεται

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}B'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}B'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Όπως είναι γνωστό (εξ. Maxwell)

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\mathbf{B} = 0 .$$

Οι εξισώσεις αυτές, που μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτουν από τις εκφράσεις $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, γράφονται και ως εξής:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

(το πρώτο μέλος της τελευταίας είναι αντισυμμετρικός τανυστής και με δεδομένη την αντισυμμετρικότητα και του F_{ik} εύκολα φαίνεται ότι οι τελευταίες είναι τέσσερις μόνο εξισώσεις).

Μια ισοδύναμη μορφή της παραπάνω είναι η

$$\varepsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 .$$

Στην περίπτωση πολλών σωματίων η δράση S δίνεται από την

$$S = -\sum\int_a^b mcds - \sum\int_a^b \frac{e}{c}A_i dx^i$$

οπότε οι εξισώσεις για το κάθε σωμάτιο είναι αυτές που προαναφέρθηκαν.

2.2 Το σύστημα «πεδίο + σωμάτια»

Η τελευταία δίνει τις εξισώσεις του κάθε σωματίου όταν το πεδίο δίνεται. Όταν οι εξισώσεις δεν δίνονται μπορούμε να δούμε το συνολικό σύστημα (πεδίο + σωμάτια) ως ένα μηχανικό σύστημα με δράση S την

$$S = -\sum \int_a^b mcds - \sum \int_a^b \frac{e}{c} A_i dx^i - \frac{1}{16\pi c} \int_\Omega F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι σε περιοχή στον τετραδιάστατο χώρο και βέβαια, τώρα,

$$S = S(x^0, x^1, x^2, x^3, A_0, A_1, A_2, A_3) .$$

Για την εύρεση των εξισώσεων του συστήματος θεωρούμε μεταβολή των γενικευμένων συντεταγμένων για την οποία

$$\delta S = 0 .$$

Πιο συγκεκριμένα, αφού τις εξισώσεις των σωματιδίων τις έχουμε προσδιορίσει, θεωρούμε την δράση που προκύπτει αν κρατήσουμε τους δύο τελευταίους όρους της παραπάνω, δηλαδή,

$$S = -\sum \int_a^b \frac{e}{c} A_i dx^i - \frac{1}{16\pi c} \int_\Omega F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

που μπορεί να γραφεί

$$S = -\frac{1}{c^2} \int_\Omega A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int_\Omega F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

όπου

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$$

το τετραδιάνυσμα του ρεύματος (current four vector) με ρ την πυκνότητα φορτίου. Είναι $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$.

Στην τελευταία έχουμε $S = S(A^0, A^1, A^2, A^3)$ (το j^i θεωρείται γνωστό) οπότε απαιτούμε $\delta S = 0$ για $A^i \to A^i + \delta A^i$ καταλήγοντας στις εξισώσεις του πεδίου

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i .$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι οι τελευταίες δίνουν τις

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$
$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho \,.$$

Από τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει και η εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial}{\partial x^i} j^i = 0 \,.$$

2.3 Ο τανυστής ενέργειας – ορμής

Έστω σύστημα με δράση

$$S = \frac{1}{c}\int_{\Omega} \Lambda d\Omega \,.$$

Έστω, επίσης, δS η μεταβολή της S όταν

$$g_{ik} \to g_{ik} + \delta g_{ik} \,.$$

Τότε,

$$\delta S = -\frac{1}{2c}\int_{\Omega} T^{ik}\delta g_{ik} d\Omega \,.$$

Οι ποσότητες

$$T^{ik} = T^{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

για τις οποίες $T^{ik} = T^{ki}$ αποτελούν τον τανυστή ενέργειας ορμής του συστήματος. Το τετραδιάνυσμα P^i όπου

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k$$

καλείται τετραδιάνυσμα της ορμής του συστήματος. Ο τανυστής M^{ik} όπου

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c}\int (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l$$

καλείται τανυστής της στροφορμής του συστήματος.
Μπορούμε να γράψουμε

$$
(T^{ik}) = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ S_y/c & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ S_z/c & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.
$$

2.3.1 Ο τανυστής ενέργειας ορμής για συστήματα ηλεκτρομαγνητικού πεδίο και σωματίων

Στην περίπτωση που έχουμε ελεύθερα σωματίδια

$$
S = -\sum \int_a^b mcds
$$

βρίσκουμε ότι

$$
T^{ik} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}
$$

όπου

$$
\mu = \sum m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)
$$

$$
u^i = \frac{dx^i}{ds}.
$$

Μια σημαντική σχέση είναι η

$$
\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0.
$$

Για τον M^{ik} που ήδη ορίσαμε

$$
M^{ik} = \sum_a (x_a^i p_a^k - x_a^k p_a^i)
$$

με

$$
p^i = mcu^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)
$$

$$
P^i = \sum_a p_a^i
$$

και

$$
\int T^{00} dV = \sum_a \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_{o\lambda}
$$

με

$$\mathcal{E}_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a{}^2}{c^2}}} .$$

Στην περίπτωση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$S = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega$$

είναι

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}(-F^{il}F^{k}{}_{l} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}) .$$

Αν

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

είναι

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} .$$

Φυσικά ισχύει η γνωστή σχέση

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 .$$

Με τον προηγούμενο ορισμό

$$T^{00} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = W$$

$$T^{0\alpha} = -\frac{1}{4\pi}F^{0l}F^{\alpha}{}_{l}$$

οι οποίες συγκροτούν την ποσότητα $\mathbf{S}/c$.

Έχουμε λοιπόν

$$(T^{ik}) = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & & & \\ S_y/c & & \sigma_{\alpha\beta} & \\ S_z/c & & & \end{pmatrix}$$

όπου

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}[-E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2}(E^2 + B^2)]$$

ο οποίος καλείται τανυστής ηλεκτρομαγνητικής τάσης του Maxwell (Maxwell stress tensor).

Στην περίπτωση που έχουμε σωμάτια και ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα είναι

$$T^{ik} = T^{(p)ik} + T^{(f)ik}$$

όπου $T^{(p)ik}$ ο τανυστής των σωματίων και $T^{(f)ik}$ ο τανυστής του πεδίου.
Και πάλι

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial T^{(p)ik}}{\partial x^k} + \frac{\partial T^{(f)ik}}{\partial x^k} = 0\,.$$

Η σχέση αυτή για $i=0$ δίνει την

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \frac{E^2+B^2}{8\pi}dV + \sum_a \mathscr{E}_a\right] = -\oint \mathbf{S}d\mathbf{f}$$

και για $i=1,2,3$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V \frac{S_\alpha}{c^2}dV + \sum_a p_{\alpha a}\right] = -\oint \sigma^{(f)\alpha\beta}df_\beta$$

όπου $\alpha = 1,2,3$ και το a τρέχει στα σωμάτια. Από τα παραπάνω έχουμε και την ερμηνεία του $\sigma_{\alpha\beta}$: είναι το ποσό της α συνιστώσας της ορμής που περνά ανά μονάδα χρόνου διαμέσου μοναδιαίας επιφάνειας κάθετης στον άξονα x^β.

2.4 Το πεδίο που οφείλεται σε φορτίο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα

Σαν εφαρμογή μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο που οφείλεται σε κινούμενο με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V}$ φορτίο.
Έστω K' το σύστημα συντεταγμένων που είναι ακίνητο προς το φορτίο. Κατά συνέπεια κινείται με $\mathbf{V}$ σταθερή ως προς το σύστημα συντεταγμένων K του εργαστηρίου. Στο K' έχουμε ηλεκτροστατικό πεδίο, άρα

$$\mathbf{A}' = 0$$
$$\phi' = \frac{e}{R'}$$

όπου

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\,.$$

Αν $\phi, \mathbf{A}$ το πεδίο στο K, από τον μετασχηματισμό Lorentz

$$\phi = \frac{\phi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\phi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z$$

και φυσικά

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z\,.$$

Είναι ζήτημα πράξεων για να δούμε από τις παραπάνω ότι

$$\phi = \frac{e}{R^*}$$

με

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)$$

και

$$\mathbf{A} = \phi\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}$$

όπου, στα παραπάνω $\phi = \phi(x, y, z, t)$ και $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$**.** Τέλος από τα δυναμικά αυτά βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}\,.$$

2.5 Η κυματική εξίσωση

Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου χωρίς φορτία

$$S = \int_{\Omega} F_{ik}F^{ik}d\Omega$$

οι εξισώσεις του πεδίου παίρνουν την μορφή

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

και μαζί με τις

$$\varepsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k}=0$$

είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{E}&=0\\ \nabla\mathbf{B}&=0\\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\mathbf{B}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Τα $\mathbf{E},\mathbf{B}$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\begin{aligned}\Box\mathbf{E}&=0\\ \Box\mathbf{B}&=0\end{aligned}$$

όπου

$$\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\Box=-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x^i}=-g^{ik}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}$$

και το τετραδιάνυσμα A^i ικανοποιεί την

$$-g^{kl}\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\partial x^l}=-\frac{\partial A^k}{\partial x_i\partial x^k}.$$

Αν θεωρήσουμε δεδομένη την βαθμίδα Lorentz

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=0$$

η παραπάνω γράφεται

$$-g^{kl}\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\partial x^l}=0$$

που είναι ισοδύναμη με τις

$$\Box\phi=0,\quad \Box\mathbf{A}=0.$$

2.6 Καθυστερημένα δυναμικά

Στην περίπτωση που έχουμε πεδίο με φορτισμένα σωμάτια, και υποθέσουμε ότι ισχύει η βαθμίδα Lorentz, οι εξισώσεις του πεδίου γράφονται:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες των

$$\Box \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$
$$\Box \phi = -4\pi\rho$$

λύσεις των οποίων είναι οι

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' + \mathbf{A}_0$$

$$\phi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' + \phi_0$$

όπου $dV' = dx'dy'dz'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$.

Στην περίπτωση ενός σωματίου τροχιάς $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$ είναι

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(t') - \dfrac{\mathbf{v}(t')\mathbf{R}(t')}{c}}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}(t')}{c\left[R(t') - \dfrac{\mathbf{v}(t')\mathbf{R}(t')}{c}\right]}$$

όπου $\mathbf{v}(t') = (d\mathbf{r}/dt')(t')$, $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$ και

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}.$$

Τα τελευταία καλούνται δυναμικά Liénard – Wiechert.

2.6.1 Εφαρμογή: παραγωγή των δυναμικών Liénard – Wiechert

Αρχικά ορίζουμε το τετραδιάνυσμα

$$R^i = (c(t-t'), \mathbf{R}(t'))$$

όπου

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t').$$

Εύκολα φαίνεται ότι η σχέση

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

γράφεται

$$R^i R_i = 0. \tag{1}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε σύστημα αναφοράς $\overline{K}$ που κινείται με

$$\mathbf{v}(t') = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ως προς το K (αυτό στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τα $\phi, \mathbf{A}$). Τότε

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{t}') = 0.$$

Στο $\overline{K}$ προφανώς

$$\overline{\phi} = \frac{e}{\overline{R}(\overline{t}')}, \quad \overline{\mathbf{A}} = 0 \tag{2}$$

με την (1) να γράφεται

$$\overline{R}^i \overline{R}_i = 0$$

με

$$\overline{R}^i = (c(\overline{t} - \overline{t}'), \overline{\mathbf{R}}(\overline{t}'))$$

δηλαδή

$$\overline{t}' + \frac{\overline{R}(\overline{t}')}{c} = \overline{t}. \tag{3}$$

Λόγω της (3) οι (2) γράφονται

$$\overline{\phi} = \frac{e}{c(\overline{t} - \overline{t}')}, \quad \overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{4}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι οι (4) γράφονται

$$\bar{A}^i = e\frac{\bar{u}^i}{\bar{R}_k \bar{u}^k}$$

όπου

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Συνεπώς

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}$$

που δίνει τα δυναμικά Liénard-Wiechert.

Βιβλιογραφία

- L.D. Landau and E.M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1987).
- L.D. Landau and E.M. Lifshitz: *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1989).
- David J. Griffiths: *Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική*, Τόμος Ι,ΙΙ, ΠΕΚ, Ηράκλειο (1999).
- J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1975).
- George Arfken: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York.
- M. R. Spiegel: *Schaum's outline of Theory and Problems of Vector Analysis and an introduction to Tensor Analysis*, McGraw-Hill, New York (1974).