ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Χρ. Χαλδούπης

Ηράκλειο, 1997

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΝΕΑΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής : Μηχανική-Θερμότητα* γράφτηκε το 1979, δηλαδή το πρώτο έτος λειτουργίας του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης. Εκτοτε το βοήθημα αυτό χρησιμοποιείται ανελλιπώς στη διδασκαλία του μαθήματος **Εργαστήρια Φυσικής I** που διδάσκεται στο 2ο εξάμηνο. Τα περιεχόμενα περιλαμβάνουν εργαστηριακό υλικό επί θεμελιωδών εννοιών και νόμων Μηχανικής-Θερμότητας όπως και βασικά στοιχεία επί της επεξεργασίας-παρουσίασης φυσικών μετρήσεων και προσδιορισμού των πειραματικών σφαλμάτων. Τα τελευταία χρόνια, παρά το γεγονός ότι δεν υπήρξαν αντιρρήσεις επί της ουσίας της ύλης και της εκπαιδευτικής της αξίας, εκφράστηκαν συχνά αιτήσεις για βελτιώσεις και διορθώσεις λαθών και ασαφειών που είχαν εντοπισθεί. Κατά συνέπεια, η παρούσα έκδοση σκοπεύει στη βελτίωση των περιεχομένων και της παρουσίασής των. Ενώ τα βασικά στοιχεία του εγχειριδίου παραμένουν τα ίδια, στην νέα έκδοση υπάρχει πλήθος παρεμβάσεων : μεταβολών-αφαιρέσεων-προσθέσεων-διορθώσεων, οι οποίες ελπίζεται ότι, μαζί με την παρουσίαση της ύλης σε *LATEX*, παρέχουν ένα βελτιωμένο εκπαιδευτικό βοήθημα στους φοιτητές του Φυσικού Τμήματος. Επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά την κα Κασσιανή Μανωλάτου γιά την πολύτιμη βοήθειά της στην μετατροπή του αρχικού κειμένου σε μορφή *LATEX* στο οποίο, εν συνεχεία, βασίστηκε όλη η δουλειά για την υλοποίηση της νέας έκδοσης. Επίσης ευχαριστώ τον κ Κώστα Ξυλούρη για την βοήθεια που πρόσφερε στην επιμέλεια των σχημάτων και παραγωγή των αντιτύπων.

Ηράκλειο, 1997

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ 1 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ)

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

	Εργαστηριακή εβδομάδα										
Ομάδα	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	1	2	10	8	11	4	12	18	13	7	19
2	1	2	10	18	11	19	12	8	7	13	4
3	1	2	10	4	11	7	19	12	18	13	8
4	1	2	10	19	18	11	7	12	8	4	13
5	1	2	7	10	4	11	8	12	19	13	18
6	1	2	8	10	19	11	18	12	4	13	7
7	1	2	18	10	7	11	4	19	12	8	13
8	1	2	4	10	8	18	11	7	12	19	13
9	1	2	19	7	10	8	11	4	12	18	13

Ονοματολογία Ασκήσεων.

1. Απλές μετρήσεις και σφάλματα.
2. Σημασία παραγώγου ολοκληρώματος.
4. Απλή αρμονική κίνηση.Απλό εκκρεμές.
7. Μελέτη ελεύθερης πτώσης.
8. Απλή κυκλική κίνηση.Κεντρομόλα δύναμη.
10. Ταχύτητα και επιτάχυνση.
11. Κρούσεις.
12. Παθητικές δυνάμεις.
13. Περιοδική κίνηση.
18. Ηλεκτρικό και μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.
19. Θερμιδομετρία και θερμοστοιχεία.

ΜΕΡΟΣ Α: ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΜΕΡΟΣ Β: ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A1. Εισαγωγή

Η Φυσική είναι μία κατ' εξοχή πειραματική επιστήμη. Κατά συνέπεια η πραγματοποίηση πειραμάτων είναι απαραίτητη αφ'ενός μεν για την επαλήθευση υπαρχόντων θεωριών αφ'ετέρου δε γιά την διερεύνηση της συμπεριφοράς νέων φυσικών φαινομένων. Σκοπός του εργαστηρίου Φυσικής είναι να δώσει μια άμεση πειραματική εμπειρία στο φοιτητή σχετικά με ορισμένα φυσικά φαινόμενα που αναπτύσσονται θεωρητικά στην τάξη. Επιπρόσθετα διδάσκονται και διάφορες τεχνικές μετρήσεων και μέθοδοι ανάλυσης των δεδομένων και προσδιορισμού σφαλμάτων, που είναι απαραίτητες στην διενέργεια μιας πειραματικής εργασίας. Ελπίδα μας είναι να μάθει ο φοιτητής να δουλεύει σωστά και συστηματικά στην εκτέλεση ενός πειράματος και να μπορεί να κρίνει αντικειμενικά αν τα πειραματικά του αποτελέσματα είναι αξιόπιστα ή όχι. Επιπλέον, στο εργαστήριο αυτό γίνεται προσπάθεια όπως εκπαιδευτεί ο φοιτητής στην γραπτή παρουσίαση ενός συγκεκριμένου θέματος (εδώ πειράματος) που έφερε σε πέρας.

Για την επιτυχία του εργαστηρίου χρειάζεται προπαρασκευή. Ο κάθε φοιτητής πρέπει να ξέρει καλά τη θεωρία που σχετίζεται με το πείραμα. Στο βιβλίο αυτό δίνεται πρώτα η θεωρία που αναφέρεται στο πείραμα και μετά η πειραματική διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί. Σε ορισμένα πειράματα η παράθεση των θεωρητικών στοιχείων ενδεχομένως δεν επαρκεί, γι'αυτό στο τέλος δίνεται βιβλιογραφία για πιό ολοκληρωμένη μελέτη.

A1.1 Γενικοί Κανόνες Λειτουργίας του Εργαστηρίου

1. Ολα τα σχετικά με το εργαστήριο (ομάδες φοιτητών, πρόγραμμα, κατανομή ασκήσεων κ.λ.π.) θα ανακοινώνονται έγκαιρα σε ειδικό πίνακα ανακοινώσεων στο εργαστήριο.

2. Το εργαστηριακό εξάμηνο περιλαμβάνει 11 ασκήσεις. Η συμμετοχή των φοιτητών είναι υποχρεωτική, και ο τελικός βαθμός εργαστηρίου είναι ο μέσος όρος των 10 καλύτερων βαθμών που έχει πετύχει ο φοιτητής στο σύνολο των εργαστηριακών ασκήσεων. Την πρώτη εβδομάδα δίνεται ένα δίωρο μάθημα στα πειραματικά σφάλματα, ενώ την δεύτερη εβδομάδα ένα επιπλέον δίωρο αφιερώνεται στις γραφικές παραστάσεις και την προσαρμογή καμπυλών με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Την τελευταία βδομάδα γίνεται η τελική εξέταση.

3. Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 3 ώρες. Μπορεί όμως να παραταθεί αν χρειαστεί. Η προετοιμασία των φοιτητών για την επιτυχή εκτέλεση της πειραματικής διαδικασίας είναι απαραίτητη.

4. Το εργαστήριο γίνεται σε ομάδες η κεθεμιά των οποίων έχει δύο φοιτητές. Η συνεργασία των μελών καθε ομάδας είναι όχι μόνο επιθυμητή αλλά και επιβάλλεται πολλές φορές για τη σωστή εκτέλεση των πειραμάτων. Εν συνεχεία κάθε φοιτητής υποχρεούται να παραδώσει μια **προσωπική** εργαστηριακή αναφορά στην οποία η πειραματική εργασία θα παρουσιάζεται καθαρά και με λογική σειρά, έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την επαναλάβει με βάση την γραπτή παρουσίαση. Παρακάτω δίνεται ένας τρόπος για το πώς μπορεί να παρουσιασθεί μια εργαστηριακή εργασία, χωρίς φυσικά να αποκλείει και άλλους που ίσως κάποιος να θεωρούσε καλύτερους.

Συστάσεις. Είναι χρέος όλων μας να προσέχουμε τα όργανα του εργαστηρίου και να τα διατηρούμε σε άριστη κατάσταση. Μετά το τέλος της άσκησης τα όργανα θα πρέπει να αποσυνδέονται και να τοποθετούνται στη θέση που βρίσκονταν πριν την άσκηση. Μερικά όργανα είναι πολύ ευαίσθητα και χρειάζονται προσεκτική μεταχείριση (π.χ. οι συσκευές των αεροδρόμων). Πρίν τη χρήση των οργάνων και συσκευών, διαβάστε τις οδηγίες χρήσεώς τους και αν υπάρχουν απορίες ρωτείστε τον υπεύθυνο του εργαστηρίου.

A1.2 Τρόπος Γραφής της Εργαστηριακής Αναφοράς

Μια καλογραμμένη εργαστηριακή αναφορά θα πρέπει να περιλαμβάνει τα εξής σημεία.

Επικεφαλίδα. Τίτλος πειράματος, ημερομηνία, όνομα, ομάδα, κ.λ.π.

Αντικείμενο του πειράματος. Μια **σύντομη** περιγραφή, υπό μορφή εισαγωγής, του σκοπού του πειράματος και της διαδικασίας που θα ακολουθηθεί.

Θεωρία. Σύνοψη της θεωρίας (εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο πείραμα, σύντομη ανάπτυξη της φυσικής τους σημασίας και σχήματα που πιθανόν να βοηθούν στην κατανόηση της θεωρίας). Θα πρέπει να αποφεύγεται αντιγραφή της θεωρίας που δίνεται στο βιβλίο. Η απόδειξη των εξισώσεων να γίνεται μόνον εφόσον αυτή ζητείται. Επίσης, εδώ μπορεί να γράφονται και οι απαντήσεις σε τυχόν ερωτήσεις σχετικές με τη θεωρία.

Παρατηρήσεις. Σε πολλά πειράματα μπορεί να γίνουν ποιοτικές παρατηρήσεις παράλληλα με τις μετρήσεις. Αυτές θα πρέπει να γράφονται στην αναφορά, μαζί με τις σχετικές επεξηγήσεις όπου χρειάζονται, τα απόλυτα και σχετικά σφάλματα των μετρήσεων καθώς και οι φυσικές μονάδες. Καλόν είναι οι μετρήσεις να συνοψίζονται σε κατάλληλους πίνακες.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων. Εδώ γίνεται η επεξεργασία-ανάλυση των μετρήσεων σύμφωνα με την διαδικασία που ζητείται, και παρουσιάζονται τα διαγράμματα, οι υπολογισμοί και τα αποτελέσματα. Στη περίπτωση όμοιων υπολογισμών θα πρέπει να αποφεύγεται επανάληψη και να δίνεται μόνο ενα δείγμα αυτών. Για την σύνοψη των υπολογισμών και αποτελεσμάτων θα πρέπει να χρησιμοποιούνται, κατά το δυνατόν, πίνακες. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να δίνονται με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων και να συνοδεύονται από τις φυσικές μονάδες στο SI.

Σφάλματα–Συγκρίσεις. Εδώ γίνεται παράθεση υπολογισμών σφαλμάτων (άμεσα και έμμεσα σφάλματα) και συγκρίσεις των μεγεθών με τις γνωστές τιμές τους. Περί των σφαλμάτων και της διάδοσής των στούς υπολογισμούς βλέπε το επόμενο Κεφάλαιο.

Συμπεράσματα. Εδώ παρουσιάζονται και συζητούνται τα συμπεράσματα του πειράματος. Εμφαση δίνεται στο φυσικό περιεχόμενο των αποτελεσμάτων. Στο τμήμα των συμπερασμάτων, θα πρέπει να συζητά κανείς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που πέτυχε με βάση τους υπολογισμούς σφαλμάτων. Επίσης τις πιθανές πηγές σφάλματος σε περίπτωση που προκύπτουν σημαντικές διαφορές από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με γνωστές τιμές.

A1.3 Μονάδες Μετρήσεων

Με διεθνείς συμφωνίες αποφασίστηκε να χρησιμοποιείται στη Φυσική το σύστημα SI (System International). Στο σύστημα αυτό υπάρχουν 4 βασικές μονάδες: Το μέτρο (m) για το μήκος, το χιλιόγραμμο (kg) για τη μάζα, το δευτερόλεπτο (s) για το χρόνο και το Ampère (A) για το ρεύμα. Αλλες μηχανικές και ηλεκτρομαγνητικές ποσότητες που εκφράζονται συναρτήσει αυτών των τεσσάρων βασικών μονάδων δίνονται παρακάτω στον πίνακα των μονάδων. Επίσης στον ίδιο πίνακα δίνονται οι αντίστοιχες CGS (Gaussian) μονάδες: το εκατοστό (cm), το γραμμάριο (gr) και το δευτερόλεπτο (sec), ενώ η μονάδα ηλεκρικού φορτίου, το Statcoulomb εκφράζεται συναρτήσει άλλων.

Πίνακας προθεμάτων

Δύναμη του 10	Πρόθεμα	Σύμβολο	Παραδείγματα
10^{12}	tera-	T	Terahertz (THz)
10^{9}	giga-	G	gigahertz (GHz)
10^{6}	mega-	M	megawatt (Mw)
10^{3}	kilo-	k	kilowatt (kw)
10^{-2}	centi-	c	centimeter (cm)
10^{-3}	milli-	m	millihenry (mH)
10^{-6}	micro-	μ	microfarad (μF)
10^{-9}	nano-	n	nanosecond (ns)
10^{-12}	pico-	p	picofarad (pF)

Συχνά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε μονάδες που σχετίζονται με τις βασικές μονάδες με κάποια δύναμη του 10. Π.χ. μπορούμε να μετρήσουμε το μήκος σε μέτρα (m), χιλιόμετρα (1 km = 10^3 m), εκατοστά (1 cm = 10^{-2} m), χιλιοστά (1 mm = 10^{-3} m), μικρά (1 μm = 10^{-6} m), ή angstroms (1 A = 10^{-10} m) ανάλογα με την κλίμακα μεγέθους της αντίστοιχου φυσικής ποσότητας. Εκτός από ορισμένες εξαιρέσεις, οι παραπάνω μονάδες εμφανίζονται με την πρόθεση ενός προθέματος (prefix) στις βασικές μονάδες. Π.χ. kilo πάντα σημαίνει 10^3 και 1 kilovolt σημαίνει 10^3 V. Τα συνήθη προθέματα που χρησιμοποιούνται διεθνώς δίνονται στον πίνακα της προηγούμενης σελίδας.

Φυσικές Μονάδες			
Φυσική ποσότητα	Σύμβολο	SI	CGS (Gaussian)
μήκος	l	μέτρο (m)	εκατοστό (cm)
μαζα	m	χιλιόγραμμο (kg)	γραμμάριο (gr)
χρόνος	t	δευτερόλεπτο (s)	second (s)
δύναμη	F	newton (N) ($N = \frac{kg.m}{s^2}$)	dyne=10^{-5}N
ενέργεια	W	joule (J) ($J = N.m$)	erg=10^{-7}J
ισχύς	P	watt (W) ($W = \frac{J}{s}$)	$\frac{erg}{s} = 10^{-7}$W
ηλεκτρικό φορτίο	q	coulomb (C) ($C = A.S$)	statcoulomb= $\frac{10^{-9}}{2.998}$
ηλεκτρικό ρεύμα	I	ampère (A)	abampère=10 A
ηλεκτρικό δυναμικό	V	Volt (V) ($V = \frac{J}{C}$)	statvolt =2.998×10^2V
ηλεκτρικό πεδίο	E	$\frac{V}{m}$ ή $\frac{N}{C}$	
μαγνητικό πεδίο	B	$webers/m^2$	gauss=$\frac{10^{-4}Wb}{m^2} = 10^{-4}$tesla
αντίσταση	R	ohm (Ω) ($\Omega = \frac{V}{A}$)	
χωρητικότητα	C	farad (F) ($F = \frac{C}{V}$)	
αυτεπαγωγή	L	henry (H) ($H = \frac{V.s}{A}$)	
θερμοκρασία	T	kelvin (K)	kelvin (K)
συχνότητα	f	hertz (Hz) ($Hz = \frac{1}{s}$)	

A1.4 Φυσικές Σταθερές

Ενας κατάλογος φυσικών σταθερών που ίσως χρησιμεύσουν στο εργαστήριο Φυσικής, δίνονται για ευκολία στον παρακάτω πίνακα. Οι μονάδες που συνδέουν τους αριθμούς είναι στο σύστημα SI.

Φυσικές σταθερές			
Ονομα	Σύμβολο	Τιμή	SI
Ταχύτητα του φωτός	c	$2,998 \times 10^{8}$	m/s
Φορτίο ηλεκτρονίου	e	$1,602 \times 10^{-19}$	C
Μάζα ηλεκτρονίου	m	$9,109 \times 10^{-31}$	kg
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,675 \times 10^{-27}$	kg
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,672 \times 10^{-27}$	kg
Σταθερά Planck	h	$6,626 \times 10^{-34}$	Js
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,054 \times 10^{-34}$	Js
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ϵ_o	$8,854 \times 10-12$	F/m
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}$	$8,988 \times 10^{9}$	m/F
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$	Wb / A m
Σταθερά Boltzmann	k	$1,380 \times 10^{-23}$	J/° K
Σταθερά αερίων	R	8,314	J/(mole°K)
Αριθμός Avogadro	N_o	$6,023 \times 10^{23}$	$\frac{molecules}{mole}$
Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας	J	4,186	$\frac{J}{cal}$
Σταθερά βαρύτητας	G	$6,67 \times 10^{-11}$	N m^2/kg^2
Ακτίνα της γης	R_E	$6,371 \times 10^{6}$	m
Μάζα της γης	m_E	$5,977 \times 10^{24}$	kg
Απόσταση Γης-Ηλίου	r_{e-s}	$3,80 \times 10^{8}$	m
Μάζα του ήλιου	$m_{\odot}$	$1,99 \times 10^{30}$	kg

A2. Μετρήσεις και Σφάλματα

Η μέτρηση μιάς φυσικής ποσότητας παρέχει ένα αριθμό που χαρακτηρίζει το μέγεθός της. Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να συνοδεύεται από την κατάλληλη φυσική μονάδα μέτρησης και στις περιπτώσεις που πρόκειται για διανυσματικό μέγεθος (π.χ., ταχύτητα, ηλεκτρικό πεδίο) θα πρέπει να καθορίζεται και η φορά.

Η αξιοπιστία μιας μέτρησης εξαρτάται από την *ακρίβειά* της. Η ακρίβεια καθορίζεται από πολλούς παράγοντες, το αποτέλεσμα των οποίων δίνει ένα ολικό σφάλμα. Όσοι ασχολούνται με μετρήσεις θα πρέπει να γνωρίζουν πως καμμιά φυσική μέτρηση δεν είναι χωρίς σφάλμα. Επίσης θα πρέπει να είναι σε θέση να αξιολογήσουν την ακρίβεια μιας μέτρησης, δηλαδή να προσδιορίσουν το πειραματικό σφάλμα, ανεξάρτητα άν αυτή έγινε κατ'ευθείαν (άμεση μέτρηση) ή ήταν δευτερογενής σαν αποτέλεσμα υπολογισμού από άμεσες μετρήσεις (έμμεση μέτρηση).

Στις επόμενες σελίδες δίνονται διάφοροι ορισμοί και αναπτύσσονται ορισμένες απλές τεχνικές υπολογισμού των πειραματικών σφαλμάτων. Η κατανόηση της ύλης που ακολουθεί είναι απαραίτητη γιατί υπολογισμοί σφαλμάτων θα χρειαστεί να γίνονται σε κάθε πείραμα.

A2.1 Είδη Πειραματικών Σφαλμάτων

1) *Ακούσια Σφάλματα ή Λάθη.* Αυτά είναι σφάλματα που προέρχονται από λανθασμένη ανάγνωση είτε καταγραφή των μετρήσεων. Φυσικά, δεν υπάρχει ανάγκη συζήτησης των σφαλμάτων αυτών και κάθε πειραματιζόμενος θα πρέπει να είναι προσεκτικός ώστε να τα αποφεύγει. Τέτοια σφάλματα μπορούν να αποφευχθούν άν τηρηθούν οι εξής απλοί κανόνες: α) Να γίνεται αξιολόγηση της μέτρησης (π.χ., η τάξη μεγέθους είναι μέσα σε λογικά όρια;) β) Να γράφονται αμέσως οι μετρήσεις και να αποφεύγει ο φοιτητής να τις θυμάται. γ) Να γίνεται η ίδια μέτρηση χωριστά και από τα δύο μέλη της εργαστηριακής ομάδας.

2) *Συστηματικά Σφάλματα.* Αυτά σχετίζονται με τις *αβεβαιότητες* που επηρεάζουν κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους. Τέτοια σφάλματα μπορεί να οφείλονται στη βαθμονόμηση ενός οργάνου ή στην κατάσταση μιας συσκευής που χρησιμοποιείται στο πείραμα, π.χ. η ένδειξη της θερμοκρασίας ενός θερμομέτρου μπορεί να είναι

ψηλότερη της κανονικής επειδή το θερμόμετρο έχει βαθμολογηθεί εσφαλμένα από τον κατασκευαστή του. Αυτού του είδους τα συστηματικά σφάλματα μπορεί να απαλειφθούν είτε με διόρθωση της βαθμονόμησης του επιμέρους οργάνου κάτω από συνθήκες όμοιες με αυτές του πειράματος ή με εφαρμογή διορθωτικών όρων και διαδικασιών. Μία άλλη περίπτωση συστηματικών σφαλμάτων είναι αυτά που προέρχονται από τις ειδικές συνθήκες περιβάλλοντος (π.χ. υγρασία, θερμοκρασία) που επικρατούν κατά τη διάρκεια ενός πειράματος και μπορεί να επηρεάζουν τις μετρήσεις κατά συγκεκριμένο τρόπο. Επίσης συστηματικά σφάλματα μπορεί να είναι θεωρητικής φύσης και οφείλονται στη χρήση προσεγγιστικών εξισώσεων σε υπολογισμούς. Τυπικό παράδειγμα της τελευταίας περίπτωσης είναι το μαθηματικό εκκρεμές για την περίοδο του οποίου χρησιμοποιούμε τη προσεγγιστική σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

αντί της πλήρους σχέσης

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta}{2} + \cdots).$$

πού βρίσκεται αν δεν κάνουμε την προσέγγιση ότι $\sin\theta \simeq \theta$.

3) *Τυχαία ή Στατιστικά Σφάλματα.* Τα σφάλματα αυτά παραμένουν ακόμη και όταν όλα τα άλλα, ακούσια και συστηματικά, έχουν αποφευχθεί ή έχουν ληφθεί υπ'όψη. Τα τυχαία η στατιστικά σφάλματα οφείλονται σε συνδυασμό διαφόρων αιτιών π.χ., ατέλειες των πειραματικών διατάξεων, ατέλειες στις αισθήσεις μας και στα όργανα ειτε συσκευές που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις, ακαθόριστες μεταβολές σε διάφορες πειραματικές συνθήκες (γνωστές η άγνωστες) που υποτίθεται ότι παραμένουν σταθερές η δεν επηρεάζουν το πείραμα, κ.α. Ετσι λοιπόν, όταν μια μέτρηση επαναλαμβάνεται, οι τιμές που βρίσκονται δεν είναι οι ίδιες, ακόμη και όταν η διαδικασία μέτρησης παραμένει η ίδια. Τα τυχαία σφάλματα είναι κατά βάση αναπόφευκτα και το μέγεθός τους δεν μπορεί να υπολογισθεί επακριβώς. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την πραγματική, και συνεπώς μόνη ορθή, τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους. Κατά συνέπεια, δεν μπορεί να είναι γνωστή ακριβώς και η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής και της μετρούμενης τιμής μιάς ποσότητας, δηλαδή το *σφάλμα* της μέτρησης.

Στην περίπτωση που εκτελέσουμε ένα αριθμό n μετρήσεων μιάς ποσότητας x, αποδεικνύεται ότι η αριθμητική μέση τιμή

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

που ονομάζεται *μέση τιμή δείγματος*, έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η πραγματική τιμή της υπό μέτρηση φυσικής ποσότητας. Η διαφορά

$$\Delta x_i = \overline{x} - x_i \tag{2}$$

ονομάζεται *απόκλιση από τη μέση τιμή*, μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, και δίνει ένα μέτρο του σφάλματος της μέτρησης του x_i. Επιπλέον, η *τυπική απόκλιση δείγματος* ορίζεται από την εξίσωση

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{3}$$

και παρέχει ένα μέτρο της *διασποράς* των μετρήσεων του μεγέθους x, συνεπώς αποτελεί μιά εκτίμηση του στατιστικού σφάλματος της μέτρησης x_i.

Συνήθως είναι δύσκολο να καθορισθεί το μέγεθος των συστηματικών σφαλμάτων σε ένα πείραμα. Π.χ., στην περίπτωση του θερμομέτρου με την εσφαλμένη βαθμολόγηση που αναφέραμε προηγούμενα (συστηματικό σφάλμα), είναι δύσκολο να ξέρει κανείς άν το σφάλμα είναι 1^o ή 3^o, εκτός, φυσικά, αν το θερμόμετρο αυτό συγκριθεί με κάποιο άλλο που είναι πραγματικά αξιόπιστο, η μετρηθεί μια θερμοκρασία σώματος που είναι γνωστή με ακρίβεια. Αντίθετα, στα τυχαία σφάλματα οι μετρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του μεγέθους των σφαλμάτων. Για την προσδιορισμό των τυχαίων σφαλμάτων χρησιμοποιούνται στατιστικές μέθοδοι και τεχνικές που αποτελούν αντικείμενο της Θεωρίας Ανάλυσης Σφαλμάτων. Τελος, όπως θα δούμε, κάποια πληροφορία για την ακρίβεια μιας μέτρησης δίνει ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων της μέτρησης.

Α2.2 Απόλυτο και Σχετικό Σφάλμα. Σημαντικά Ψηφία.

Η σημασία των αριθμητικών ποσοτήτων είναι διαφορετική για τον μαθηματικό απ'ότι είναι για τον φυσικό. Για τον πρώτο, οι αριθμοί είναι ακριβείς ποσότητες ενώ για τον δεύτερο αντιπροσωπεύουν πειραματικές μετρήσεις και, σύμφωνα με αυτά που παραθέσαμε, δεν είναι ακριβείς, δηλαδή εμπεριέχουν κάποιο σφάλμα. Για παράδειγμα, ένας μαθηματικός θεωρεί τον αριθμό 16 ίδιο με το 16,0 ή 16,00 ενώ για τον φυσικό 16 cm σημαίνει κάτι μεταξύ 15,5 cm και 16,5 cm. Με άλλα λόγια, ένας φυσικός μπορεί να μετρήσει το μήκος ενός σύρματος και να συμπεράνει, ότι το μήκος είναι πιό κοντά στα 16 cm παρά στα 15 cm ή στα 17 cm. Στη συνέχεια καταγράφει το μήκος σαν 16 cm ± 1 cm. Αν χρησιμοποιήσει μια πιό ακριβή μέθοδο μέτρησης, ίσως βρεί ότι το μήκος είναι μεταξύ 15,9 και 16,1 cm και θα το καταγράψει σαν 16,0 cm ± 0,1 cm. Το τυχαίο σφάλμα του 1,0 cm ή 0,1 cm ονομάζεται *Απόλυτο Σφάλμα*. Αν η ποσότητα που μετράται είναι x, η μέτρηση καταγράφεται σαν $x \pm \Delta x$. Το *Σχετικό Σφάλμα* ορίζεται από το λόγο $\Delta x/x$ και συνήθως εκφάζεται σε μορφή εκατοστιαίου ποσοστού (%).

Στη συνέχεια, ας πάρουμε τις δυό μετρήσεις των 17 cm και 171 cm και το σφάλμα τους οπως φαίνεται στον πίνακα.

Μέτρηση	17 cm	171 cm
απόλυτο σφάλμα	± 1 cm	± 1 cm
σχετικό σφάλμα	$\sim 6\%$	$\sim 0.6\%$

Εξετάζοντας τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι παρ' όλο που το απόλυτο σφάλμα είναι το ίδιο και στις δύο μετρήσεις, το σχετικό σφάλμα είναι διαφορετικό. Γενικά, το σχετικό σφάλμα μιας μέτρησης εκφράζει καλύτερα την αβεβαιότητα της μέτρησης απ' ότι το απόλυτο σφάλμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο αριθμός 171, σε σχέση με τον 17 έχει μικρότερο σχετικό σφάλμα και κατά συνέπεια είναι πιο ακριβής. Εδώ βλέπουμε ότι ο αριθμός των ψηφίων μιας μέτρησης υποδηλώνει κάτι για την ακρίβεια της μέτρησης. Ετσι, ο αριθμός 171 λέγεται ότι περιέχει ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων, ενώ ο 17 περιέχει ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.

Τα ψηφία μιας αριθμητικής ποσότητας είναι *σημαντικά*, μόνον όταν είναι αποτελέσμα μέτρησης, ή υπολογισμού που βασίζεται σε μετρήσεις. Οπως είπαμε, ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων της μέτρησης δίνει κάποια πληροφορία για την ακρίβεια της μέτρησης. Αν π.χ. η διάμετρος ενός σύρματος μετρήθηκε με ακρίβεια ± 0,1 mm και βρέθηκε μεταξύ 2,45 mm και 2,55 mm, τότε η διάμετρος είναι 2,5 mm και όχι 2,50 mm διότι το τελευταίο 0 συνιστά ακρίβεια 0,01 mm πράγμα το οποίο δεν είναι σωστό. Αν η τιμή των 2,5 mm δίνονταν σε μm (=10^{-6} m) θα μπορούσε να γραφτεί από κάποιον σαν 2,500 μm που δεν είναι όμως σωστό γιατί ο τελευταίος αριθμός συνιστά ακρίβεια 0,001 μm το οποίο δεν αληθεύει. Ο σωστός λοιπόν τρόπος γραφής του αριθμού 2,5 mm σε μm είναι η εκθετική μορφή 2.5×10^3 μm. Επίσης αν η μέτρηση εκφραστεί σε m θα μπορούσε να γραφόταν σαν 0.0025 m η $2,5 \times 10^{-3}$ m αλλά όχι σαν 0,00250 m. Οι αριθμοί 2,5 mm, $2,5\times10^3$ μm, 0,0025 m, και $2,5\times10^{-3}$ m έχουν όλοι δύο σημαντικά ψηφία. Π.χ., η ποσότητα 0,00139 kg έχει τρία σημαντικά ψηφία το 1, το 3 και το 9, ενώ τα μηδενικά δεν είναι σημαντικά γιατί χρειάζονται μόνο στη τοποθέτηση της υποδιαστολής. Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να γραφτεί σαν $1,39\times10^{-3}$ kg. Το ψηφίο 0 είναι σημαντικό μόνο όταν είναι αποτέλεσμα μέτρησης π.χ. το μήκος των 65,0 cm που μετρείται με υποδεκάμετρο χιλιοστών.

Χρήση των σημαντικών ψηφίων στούς υπολογισμούς. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το μήκος ενός αντικειμένου μετρήθηκε ίσο με 20,5 cm, ενώ ενός άλλου βρέθηκε 14,23 cm. Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μήκη, παριστάνοντας κάθε άγνωστο ψηφίο με ερωτηματικό, έχουμε

20,5; cm
14,23 cm
―――――
34,7; cm

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι 34,7 cm επειδή το άθροισμα ενός άγνωστου αριθμού με ένα γνωστό είναι άγνωστο. Φυσικά το ίδιο θα συμβεί και στη περίπτωση της αφαίρεσης. Χρησιμοποιώντας την τεχνική του ερωτηματικού μπορούμε να αποδείξουμε ότι και στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση (όπως στην πρόσθεση και στην αφαίρεση) το αποτέλεσμα δεν έχει περισσότερα σημαντικά ψηφία από *τον αριθμό που εισέρχεται στους υπολογισμούς με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.* Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού δεν έχει ποτέ μεγαλύτερη ακρίβεια από την ακρίβεια του λιγότερου ακριβούς αριθμού. Στους διάφορους υπολογισμούς πού γίνονται στις εργαστηριακές ασκήσεις καλά είναι να στρογγυλεύονται οι αριθμοί με τα περισσότερα σημαντικά ψηφία, έτσι ώστε όλοι οι αριθμοί που μπαίνουν στους υπολογισμούς να έχουν τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Συνήθως όμως αυτό δεν τηρείται και η επέμβαση στον αριθμό των σημαντικών ψηφείων γίνεται στο αποτέλεσμα με το κατάλληλο στογγύλεμα. Οταν χρησιμοποιούνται υπολογιστές τσέπης τα αποτελέσματα υπολογισμών δεν θα πρέπει να αντιγράφονται όπως εμφανίζονται στην οθόνη αλλά, βεβαίως, να στρογγυλεύονται κατάλληλα.

Ασκήσεις

1) Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν οι αριθμοί :

α) $6,30 \times 10^3$, β) 6700 , γ) 0.00370 , δ) $670,0 \times 10^4$

2) Να στρογγυλευτούν οι επόμενοι αριθμοί ώστε να έχουν δύο σημαντικά ψηφία

α) 3,92 , β) 0,02862 , γ) 219, δ) 4326

3) Ποιός αριθμός είναι ο πιό ακριβής ο 215,3 ή ο 6,43 ;

4) Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να τραβήξουμε μια γραμμή μήκους 10 cm χρησιμοποιώντας ένα υποδεκάμετρο με υποδιαιρέσεις χιλιοστών. Ποιός αριθμός θα χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε το μήκος.

α) 1×10 cm, β) 10 cm, γ) 10,0 cm, ή δ) 10,00 cm.

5) Ποιό είναι το απόλυτο και ποιό το σχετικό σφάλμα στο μήκος της ερώτησης 4; Ποιό είναι το απόλυτο σφάλμα ενός μήκους που βρέθηκε να είναι 16,2 cm;

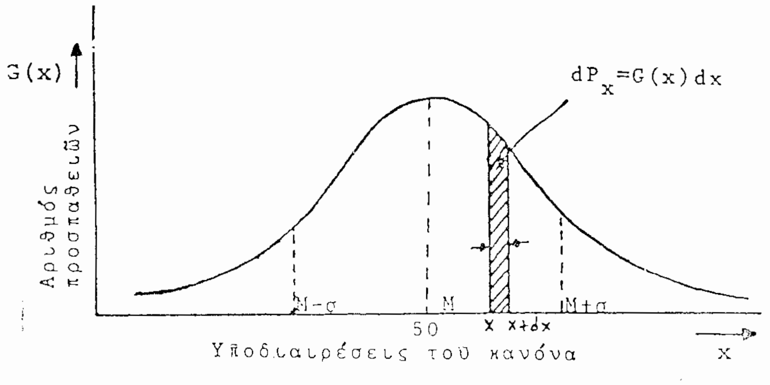
Α2.3 Προσδιορισμός Απολύτων Σφαλμάτων

Οι ακόλουθοι δύο κανόνες μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των απολύτων σφαλμάτων στις μετρήσεις:

1) Οταν η φυσική ποσότητα μετράται μία φορά, η μέτρηση λαμβάνεται σαν η πραγματική τιμή της ποσότητας και το απόλυτο σφάλμα προσδιορίζεται κατά προσέγγιση από το μέγιστο σφάλμα του οργάνου που χρησιμοποιείται στη μέτρηση. Το *Μέγιστο Σφάλμα Οργάνου* (maximum instrumental error), ΜΣΟ, συνήθως είναι η μικρότερη τιμή μέτρησης που

είναι δυνατή με ένα ορισμένο όργανο (δηλαδή το μέγεθος της μικρότερης υποδιαίρεσης της κλίμακάς του), π.χ. στην περίπτωση της μέτρησης ενός διαστήματος με ένα υποδεκάμετρο χιλιοστών, το μέγιστο σφάλμα οργάνου είναι $\pm$ 1 mm. Σε πολλές περιπτώσεις το ΜΣΟ εκτιμάται ότι είναι ίσο με κλάσμα της μικρότερης υποδιαίρεσης του οργάνου (συνήθως το μισό), εφόσον το κλάσμα αυτό μπορεί να προσδιορισθεί με βεβαιότητα.

2) Το τυχαίο, η στατιστικό, πειραματικό σφάλμα μπορεί να προσδιορισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια όταν η ίδια φυσική ποσότητα μετράται πολλές φορές. Αποτέλεσμα των τυχαίων σφαλμάτων είναι οι μετρήσεις να κατανέμονται σύμφωνα με τον νόμο της κανονικής κατανομής που ονομάζεται επίσης κατανομή Gauss. Ενα παράδειγμα μιάς τέτοιας κατανομής έχουμε όταν κάποιος σημαδεύει και κτυπά πολλές φορές με μια μπάλλα μπιλιάρδου μια ορισμένη υποδιαίρεση ενός κανόνα μήκους ενός μέτρου, που είναι στερεωμένος στην μια πλευρά της τράπεζας του μπιλιάρδου. Ετσι λοιπόν άν σημαδεύει τη μέση του κανόνα (δηλ., την υποδιαίρεση των 50 cm) τότε μετά από πολλές προσπάθειες τα αποτελέσματά του μπορούν να παρασταθούν από την καμπύλη του παρακάτω Σχήματος. Το σχήμα καμπάνας που έχει η κανονική κατανομή οφείλεται στα διάφορα τυχαία ή στατιστικά σφάλματα. Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί, ότι αν υπήρχε ένα συστηματικό σφάλμα το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό π.χ. αν το τραπέζι του μπιλιάρδου δεν ήταν οριζόντιο αλλά είχε μια μικρή κλίση προς τα δεξιά του παίκτη, τότε η κορυφή της κατανομής θα μετατοπίζονταν προς μια μεγαλύτερη υποδιαίρεση, π.χ. των 52 cm, χωρίς όμως να μεταβληθεί η μορφή της.



Εδώ θα αναφέρουμε λίγα στοιχεία για την κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss. Μαθηματικά εκφράζεται με μια σχέση της μορφής

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}} \tag{4}$$

και παριστά την πιθανότητα ανά μονάδα x. Ετσι η πιθανότητα, $dP(x)$, ένα γεγονός να βρίσκεται στο διάστημα x και $x + dx$ είναι $dP(x) = G(x)dx$. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ενός γεγονότος να είναι στο διάστημα dx, είναι το στοιχείο επιφάνειας κάτω από τη συνάρτηση $G(x)$ (δες το παραπάνω σχήμα). Οι παράμετροι μ και σ της κατανομής αναφέρονται αντίστοιχα στην κεντρική τιμή και στο εύρος της κατανομής και ονομάζονται *μέση τιμή* (mean value) και *τυπική απόκλιση* (standard deviation), αντίστοιχα. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μεταξύ $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$ ισούται με το 68,2 % του εμβαδού ολόκληρης της επιφάνειάς της (από $x = -\infty$ έως $x = +\infty$). Η πιθανότητα λοιπόν που έχει μια μέτρηση να δώσει τιμή μεταξύ $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$ είναι 68,2 %, ενώ μεταξύ $\mu - 2\sigma$ και $\mu + 2\sigma$ είναι 95,4 %. Ετσι το σ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει το μέτρο της διασποράς των τιμών του x που περιλαμβάνονται στην κατανομή, ενώ το μ καθορίζει τη θέση της καμπύλης στον άξονα των x, δηλαδή την τιμή του x περί την οποία η καμπύλη Gauss είναι συμμετρική.

Στην περίπτωση που οι μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους ακολουθούν το νόμο της κανονικής κατανομής, μπορεί να αποδειχθεί ότι η πιθανότερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής της ποσότητας που μετράται είναι η αριθμητική μέση τιμή, η οποία, οπως και προηγούμενα, ορίζεται από τη σχέση

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{5}$$

όπου $x_1, x_2, \cdots, x_n$ είναι οι επί μέρους μετρήσεις και n είναι ο αριθμός των μετρήσεων. Σημειώστε ότι $\bar{x}$ προσεγγίζει το μ της κανονικής κατανομής γιά μεγάλο αριθμό μετρήσεων. Η τυπική απόκλιση των μετρήσεων υπολογίζεται όπως και προηγούμενα απο την σχέση

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{6}$$

Για μεγάλο αριθμό μετρήσεων n, η ποσότητα s προσεγγίζει την τυπική απόκλιση σ της κατανομής Gauss.

Στη συνέχεια μπορεί να ρωτήσει κάποιος πόσο αξιόπιστη είναι η μέση τιμή που υπολογίστηκε με αυτό τον τρόπο. Γενικά είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι η μέση τιμή είναι πιο αξιόπιστη απ'ότι οι επί μέρους μετρήσεις. Στην πραγματικότητα αν κάνουμε j ομάδες μετρήσεων με n μετρήσεις η κάθε μιά, υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}_j$ και την τυπική απόκλιση s_j για κάθε ομάδα και κατόπιν την τυπική απόκλιση $s_{\bar{x}}$ της κατανομής των μέσων τιμών, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η τελευταία είναι μικρότερη από κάθε s_j κατά ένα παράγοντα ίσο προς $1/\sqrt{n}$ (δηλαδή $s_{\bar{x}} = s_j/\sqrt{n}$). Η ποσότητα $s_{\bar{x}}$ θεωρείται σαν δείκτης ακριβείας της μέσης τιμής $\bar{x}$ και λαμβάνεται ίση πρός το απόλυτο σφάλμα της.

Ο όρος $s_{\bar{x}}$ ονομάζεται *Τυπικό Σφάλμα Μέσης Τιμής* (standard error in the mean) και υπολογίζεται από την εξίσωση

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{7}$$

Βέβαια, επαναλαμβάνουμε, ότι η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού του στατιστικού σφάλματος προυποθέτει ότι έχουμε πάρει μια σειρά ανεξάρτητων ομάδων μετρήσεων η κάθε μία των οποίων υπακούει στο νόμο της κανονικής κατανομής (κατανομής Gauss), και ότι για σε κάθε ομάδα μετρήσεων αντιστοιχεί μια μέση τιμή και τυπική απόκλιση οι οποίες με την σειρά τους υπακούουν και πάλι στο νόμο της κανονικής κατανομής. Ετσι λοιπόν κατανοούμε ότι το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής καθορίζεται κατά βάση από την τυπική απόκλιση της κανονικής κατανομής του συνόλου των μέσων τιμών.

Στην πράξη, επειδή έχουμε μόνο μια σειρά πειραματικών μετρήσεων συνήθως περιορισμένου αριθμού, και επειδή είναι καλύτερα σε ένα πείραμα να υπέρ-εκτιμούμε το σφάλμα αντί να το υπο-εκτιμούμε, (όπως είναι πολύ πιθανό να συμβεί με τη μέθοδο του τυπικού σφάλματος μέσης τιμής) είναι, αρκετές φορές, προτιμότερο να παίρνουμε σαν στατιστικό σφάλμα την τυπική απόκλιση της κατανομής των μετρήσεών μας,

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{8}$$

Το απόλυτο σφάλμα που υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο ονομάζεται και *Τυπικό Σφάλμα*. Δεν θα εξηγήσουμε εδώ γιατί στον υπολογισμό του s παίρνουμε $n-1$ και όχι n μια και αυτό είναι εκτός των σκοπών του παρόντος βιβλίου.

Η εκτίμηση του απολύτου σφάλματος μέσω των s η $s_{\bar{x}}$ θα πρέπει να εφαρμόζεται για ένα ελάχιστο αριθμό μετρήσεων και άνω (ενδεικτικά αναφέρουμε ότι $n > 6$ - 8 μετρήσεις), ενώ όσο περισσότερες μετρήσεις έχουμε τόσο το καλύτερο). Σημειώστε ότι η στάθμη εμπιστοσύνης, δηλαδή η *βεβαιότητα* ότι μια νέα μέτρηση της ποσότητας x θα βρίσκεται στο διάστημα $\overline{x} \pm \Delta x$, στην περίπτωση του τυπικού σφάλματος είναι περίπου ίση με 68 % (σύμφωνα με την κατανομή Gauus), σε αντίθεση με την περίπτωση της τυπικής απόκλισης μέσης τιμής $s_{\overline{x}}$, που η στάθμη εμπιστοσύνης είναι μικρότερη και μεταβλητή, γιατί εξαρτάται από τον αριθμό των μετρήσεων. Παράλληλα βέβαια, η στάθμη εμπιστοσύνης για μιά νέα μέση τιμή $\overline{x}$ να πέφτει στο διάστημα $\overline{x} \pm s_{\overline{x}}$ είναι, οπως αντιλαμβάνεστε, ~68 %.

Ενας απλούστερος τρόπος για τον προσδιορισμό του πειραματικού σφάλματος, που είναι όμως συχνά και ρεαλιστικός για τους σκοπούς του παρόντος εργαστηρίου (ιδιαίτερα όταν έχουμε μικρό αριθμό μετρήσεων), είναι η *μέση απόκλιση από τη μέση τιμή* που υπολογίζεται από την σχέση

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}. \tag{9}$$

Επειδή προκύπτει ότι $\overline{\Delta x}$ είναι περίπου το 80 % της τυπικής απόκλισης δείγματος s, ($\overline{\Delta x} \approx 0,8s$), η στάθμη εμπιστοσύνης στην περίπτωση αυτή είναι περίπου 55 %.

Για τους σκοπούς του παρόντος εργαστηρίου, συστήνουμε να χρησιμοποιείτε για την εκτίμηση του στατιστικού σφάλματος την μέθοδο της τυπικής απόκλισης μέσης τιμής, και εάν αυτή είναι πολύ μικρή τότε χρησιμοποιείστε το τυπικό σφάλμα η την μέση απόκλιση. Σε περίπτωση όμως που οι εκτιμήσεις αυτές (δηλαδή των $s_{\overline{x}}$, s η $\overline{\Delta x}$) συμβαίνει να είναι μικρότερες από το μέγιστο σφάλμα οργάνου, (που λαμβάνεται συνήθως ίσο με το μισό ή ολόκληρο της μικρότερης υποδιαίρεσης του οργάνου, η της διακριτικής του ικανότητας), τότε σαν απόλυτο σφάλμα ενδείκνυται να χρησιμοποιείται το τελευταίο.

Α2.4 Διάδοση των Σφαλμάτων στους Υπολογισμούς

Σε πολλές περιπτώσεις, το φυσικό μέγεθος που ενδιαφέρει δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα και προκύπτει σαν αποτέλεσμα υπολογισμών μέσω εξισώσεων όπου χρησιμοποιούνται μια ή περισσότερες άμεσα μετρούμενες ποσότητες. Στην περίπτωση αυτή τα τυχαία σφάλματα των επί μέρους ποσοτήτων που μετρήθηκαν 'διαδίδονται' μέσω των υπολογισμών στο τελικό αποτέλεσμα. Στα επόμενα θα εξετάσουμε δύο τρόπους υπολογισμού του *Εμμέσου Σφάλματος*.

Μέγιστο Δυνατό Σφάλμα.

Η απλούστερη μέθοδος, όχι όμως και η πιο ακριβής, είναι η *Μέθοδος του Μεγίστου Δυνατού Σφάλματος*. Αυτή εξηγείται αναλυτικά παρακάτω.

<u>α) Πρόσθεση και αφαίρεση ποσοτήτων.</u> Ας θεωρήσουμε το άθροισμα δύο μετρήσεων: 25,4 ± 0,1 και 7,5 ± 0,2. Το άθροισμά τους χωρίς το σφάλμα είναι 32,9. Για να υπολογίσουμε το σφάλμα στο αποτέλεσμα αυτό σκεφτόμαστε ως εξής: ο πρώτος αριθμός βρίσκεται μεταξύ 25,3 και 25,5, ενώ ο δεύτερος μεταξύ 7,3 και 7,7. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα θα βρίσκεται οπωσδήποτε μεταξύ 32,6 και 33,2 και μπορεί να γραφεί σαν 32,9 ± 0,3. Εδώ το απόλυτο σφάλμα είναι το άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων των δύο αριθμών. Σε αλγεβρική μορφή έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$(a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b) \tag{10}$$

$(\Delta a + \Delta b)$ είναι το μέγιστο σφάλμα του αθροίσματος $a + b$ και ονομάζεται *Μέγιστο δυνατό σφάλμα*. Γενικότερα, αν $P = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$, όπου $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ είναι οι μετρούμενες ποσότητες, το μέγιστο δυνατό απόλυτο σφάλμα στο παραπάνω άθροισμα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta P = \pm(\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \cdots + \Delta Q_n) \tag{11}$$

όπου $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \cdots, \Delta Q_n$, είναι τα απόλυτα σφάλματα των ποσοτήτων $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ αντίστοιχα.

Αν τώρα θεωρήσουμε την περίπτωση της αφαίρεσης και πάρουμε το παράδειγμα των προηγούμενων αριθμών, δηλαδή (25,4 ± 0,1)-(7,5 ± 0,2), οι ακραίες τιμές του αποτελέσματος αυτού είναι 18,2 και 17,6 έτσι ώστε το αποτέλεσμα να γραφεί σαν 17,9 ± 0,3. Στην περίπτωση λοιπόν του υπολογισμού του μεγίστου δυνατού σφάλματος, όταν δύο ποσότητες αφαιρούνται τα απόλυτα σφάλματά τους προστίθενται . Δηλαδή, αν $P = Q_1 - Q_2$ τότε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο αποτέλεσμα P είναι

$$\Delta P = \pm(\Delta Q_1 + \Delta Q_2) \tag{12}$$

όπου ΔQ_1 και ΔQ_2 είναι τα απόλυτα σφάλματα των ποσοτήτων Q_1 και Q_2 αντίστοιχα.

β) Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ποσοτήτων. Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι $a \pm \Delta a$ και $b \pm \Delta b$. Εστω A το εμβαδό του ορθογωνίου και ΔA το σφάλμα. Τότε :

$$A \pm \Delta A = (a \pm \Delta a).(b \pm \Delta b) = ab(1 \pm \frac{\Delta a}{a}).(1 \pm \frac{\Delta b}{b}) = ab[1 \pm (\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}) \pm (\frac{\Delta a}{a}).(\frac{\Delta b}{b})]$$

Επειδή ο όρος $(\frac{\Delta a}{a})(\frac{\Delta b}{b})$ είναι μικρός σε σύγκριση με τους άλλους, μπορεί να παραληφθεί, οπότε προκύπτει

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}) \tag{13}$$

Γενικά, αν $P = Q_1.Q_2.Q_3 \cdots Q_n$, μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέγιστο σχετικό σφάλμα στο P δίνεται από την σχέση

$$\frac{\Delta P}{P} = \pm(\frac{\Delta Q_1}{Q_1} + \frac{\Delta Q_2}{Q_2} + \cdots + \frac{\Delta Q_n}{Q_n}). \tag{14}$$

Τώρα, ας εξετάσουμε το ακόλουθο πρόβλημα για την περίπτωση της διαίρεσης

$$A \pm \Delta A = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} = \frac{a}{b}\frac{1 \pm \Delta a/a}{1 \pm \Delta b/b}.$$

Χρησιμοποιώντας διωνυμική ανάπτυξη για τον όρο $(1 \pm \Delta b/b)^{-1}$ βρίσκουμε ότι

$$A \pm \Delta A = \frac{a}{b}(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} + \text{όροι 2ας τάξης και άνω}),$$

ενώ παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης σαν πολύ μικρούς τελικά παίρνουμε

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}). \tag{15}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μέγιστο δυνατό σχετικό σφάλμα στην περίπτωση πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης ποσοτήτων είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών σφαλμάτων των επιμέρους ποσοτήτων.

γ) Δυνάμεις και ρίζες. Ας εξετάσουμε την περίπτωση όταν $P = Q^m$ όπου Q είναι η ποσότητα που μετράται με απόλυτο σφάλμα ΔQ και m είναι ακέραιος ή κλασμαιικός (αρνητικός ή θετικός) αριθμός. Για να υπολογίσουμε το σφάλμα στο P θεωρούμε την σχέση

$$P \pm \Delta P = (Q + \Delta Q)^m = Q^m(1 + \Delta Q/Q)^m.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας διωνυμική ανάπτυξη για τον όρο στη τελευταία παρένθεση έχουμε

$$P + \Delta P = Q^m[1 + \frac{m}{1!}(\frac{\Delta Q}{Q}) + \frac{m(m-1)}{2!}(\frac{\Delta Q}{Q})^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(\frac{\Delta Q}{Q})^3 + \cdots].$$

Παραλείποντας όλες τις δυνάμεις του ΔQ που είναι μεγαλύτερες του 1, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta P}{P} = m\frac{\Delta Q}{Q}. \qquad (16)$$

Η τελευταία εξίσωση, που συνδέει σχετικά σφάλματα χρησιμοποιείται σαν γενικός κανόνας στην περίπτωση δυνάμεων ή ριζών.

Σάν εφαρμογή των προηγουμένων, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου μια ποσότητα X καθορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$X = (AB^4)/(CD^{\frac{1}{2}}).$$

όπου A, B, C και D, βρίσκονται από άμεσες μετρήσεις που υπόκεινται σε τυχαία σφάλματα. Σύμφωνα με τα προηγούμενα το μέγιστο δυνατό σχετικό σφάλμα στο X δίνεται από την σχέση

$$\frac{\Delta X}{X} = \pm(\frac{\Delta A}{A} + 4\frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D})$$

Ας σημειωθεί ότι το σφάλμα στην τελευταία περίπτωση επηρεάζεται πολύ περισσότερο από το σφάλμα της ποσότητας B παρά των άλλων ποσοτήτων. Στις περιπτώσεις αυτές είναι φανερό ότι ποσότητες όπως η B που επηρεάζουν περισσότερο από άλλες το σφάλμα πρέπει να μετρούνται με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια.

Πιθανό Σφάλμα.

Η μέθοδος του μεγίστου δυνατού σφάλματος υποθέτει ότι τα σφάλματα των επιμέρους αμέσων μετρήσεων προστίθενται η αφαιρούνται με την ίδια φορά, πράγμα το οποίο είναι μάλλον απίθανο και κατά συνέπεια οδηγεί σε υπερεκτίμηση του εμμέσου σφάλματος. Μια πιο ρεαλιστική μέθοδος υπολογισμού σφάλματος εμμέσου μέτρησης στηρίζεται στον απειροστικό λογισμό και τη θεωρία ανάλυσης σφαλμάτων. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή ονομάζεται *Πιθανό Σφάλμα*. Εδώ δίνονται μόνο βασικά στοιχεία, χωρίς αυστηρές αποδείξεις.

Ας υποθέσουμε ότι ένα φυσικό μέγεθος P είναι συνάρτηση των άμεσα μετρουμένων ποσοτήτων $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$

$$P = f(Q_1, Q_2, Q_3 \cdots) \tag{17}$$

Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης αυτής που δίνεται από τη σχέση

$$dP = \frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 + \frac{\partial f}{\partial Q_3} dQ_3 + \cdots \tag{18}$$

δίνει ένα μέτρο του σφάλματος του μεγέθους P εφόσον τα $dQ_1, dQ_2, dQ_3 \cdots$ είναι τα απόλυτα σφάλματα $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3, \cdots$ των μεγεθών $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$. Ετσι αν π.χ. $P = Q_1 + Q_2 + Q_3$, τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση το απόλυτο σφάλμα ΔP υπολογίζεται από την σχέση

$$\Delta P = \pm(\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3)$$

και αντιπροσωπεύει το μέγιστο δυνατό σφάλμα της ποσότητας P.

Επειδή όμως τα σφάλματα στις μετρούμενες ποσότητες είναι τυχαία, είναι αρκετά απίθανο, όπως είπαμε, να συμβαίνουν με την ίδια φορά, δηλαδή να προστίθενται ή να αφαιρούνται όλα μαζί. Για το λόγο αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία σφαλμάτων, το *πιθανό σφάλμα* της μέτρησης P ορίζεται από την σχέση:

$$\Delta P = \pm\{(\frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial Q_3} dQ_3)^2 + \cdots\}^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (18) και (19) βλέπουμε ότι το πιθανό σφάλμα είναι μικρότερο του μεγίστου δυνατού σφάλματος.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση μπορεί εύκολα κανείς να αποδείξει (οι αποδείξεις αφήνονται στον φοιτητή) ότι:

α) στην περίπτωση της πρόσθεσης, π.χ. αν $P = Q_1 + Q_2 + Q_3$ τότε,

$$\Delta P = \pm[(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2 + (\Delta Q_3)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

β) στην περίπτωση της αφαίρεσης, π.χ. αν $P = Q_1 - Q_2$ τότε,

$$\Delta P = \pm[(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

γ) στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν $P = Q_1.Q_2.Q_3$ τότε,

$$\frac{\Delta P}{P} = \pm[(\frac{\Delta Q_1}{Q_1})^2 + (\frac{\Delta Q_2}{Q_2})^2 + (\frac{\Delta Q_3}{Q_3})^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

δ) στην περίπτωση της διαίρεσης, π.χ. αν $P = Q_1/Q_2$ τότε,

$$\frac{\Delta P}{P} = \pm[(\frac{\Delta Q_1}{Q_1})^2 + (\frac{\Delta Q_2}{Q_2})^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

ε) στην περίπτωση π.χ. της σχέσης $X = (AB)^4/(CD)^{1/2}$ έχουμε,

$$\frac{\Delta X}{X} = \pm[(\frac{\Delta A}{A})^2 + (4\frac{\Delta B}{B})^2 + (\frac{\Delta C}{C})^2 + (\frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Είναι σημαντικό για τον φοιτητή να μπορεί να χρησιμοποιεί μια τουλάχιστον από τις παραπάνω μεθόδους για τον υπολογισμό των σφαλμάτων στις έμμεσα μετρούμενες ποσότητες. Στο παρόν εργαστηριακό μάθημα οποιαδήποτε από τις δύο αυτές μεθόδους είναι δεκτή. Συστήνεται όμως να χρησιμοποιείται, σαν πιο ακριβής, η μέθοδος του Πιθανού Σφάλματος.

Παράδειγμα. Σύμφωνα με τον νόμο του Poiseuille, που αναφέρεται στη στρωτή ροή υγρού μέσω ενός σωλήνα, ο συντελεστής ιξώδους ενός υγρού που ρέει μέσα σε ένα κυλινδρικό σωλήνα μήκους l και ακτίνας α δίνεται από την σχέση

$$\eta = \frac{\pi P \alpha^4}{8Vl} \tag{24}$$

όπου P είναι η διαφορά της πίεσης στα άκρα του σωλήνα και V είναι η παροχή του σωλήνα (δηλ. ο όγκος ροής του υγρού ανά μονάδα χρόνου).

Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε μετρήσεις των α, V, P και l για τον υπολογισμό του η και θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέγιστο σχετικό σφάλμα στο η. Ξέρουμε ότι $\Delta P/P = \pm 0.02$, $\Delta\alpha/\alpha = \pm 0,02$, $\Delta l/l = \pm 10^{-4}$ και $\Delta V/V = \pm 0.0095$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα το μέγιστο σχετικό σφάλμα στο η δίνεται από την σχέση

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm[\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + 4\frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta l}{l}] \tag{25}$$

και το πιθανό σχετικό σφάλμα από την σχέση

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm[(\frac{\Delta P}{P})^2 + (\frac{\Delta V}{V})^2 + 16(\frac{\Delta \alpha}{\alpha})^2 + (\frac{\Delta l}{l})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

(το π δεν περιλαμβάνεται επειδή είναι καθαρός αριθμός και όχι μετρούμενη ποσότητα). Με αντικατάσταση των δεδομένων βρίσκουμε

α) Μέγιστο σχετικό σφάλμα

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \pm[0,02 + 0,0095 + 4 \times 0,02 + 0,0001] = \pm 0,11$$

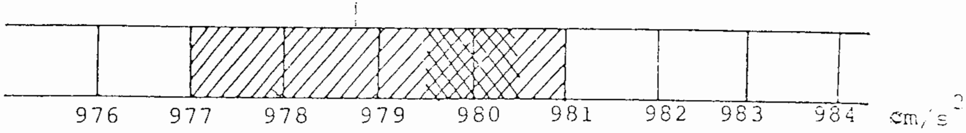
β) Πιθανό σχετικό σφάλμα

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \pm[(0,02)^2 + (0,0095)^2 + 16x(0,02)^2 + (10^{-4})^2]^{\frac{1}{2}} = \pm 0,081$$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα σημειώνουμε ότι το σφάλμα στο η επηρεάστηκε κυρίως από τη μέτρηση της ακτίνας (δηλαδή $4(\Delta a/a) = 0,08$).

Α2.5 Σύγκριση Ποσοτήτων.

Σε ορισμένα πειράματα χρειάζεται να καθορισθεί η ίδια φυσική ποσότητα με διαφορετικές μεθόδους, για να διαπιστωθεί η συμφωνία των αποτελεσμάτων των μεθόδων. Επίσης είναι συνηθισμένο σε ένα πείραμα να συγκρίνεται το πειραματικό αποτέλεσμα με τη θεωρητική ή αποδεκτή (γνωστή) τιμή της ποσότητας που μετράται. Για να συγκρίνουμε τις δύο τιμές, πρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα τους και κατόπιν να εξετάσουμε αν τα δύο διαστήματα τιμών που βρίσκονται από τις μετρήσεις, (δηλαδή τα απόλυτα η σχετικά σφάλματα των μετρήσεων) συμπίπτουν τουλάχιστον μερικά. Στην περίπτωση που υπάρχει μερική σύμπτωση, λέγεται ότι οι μετρήσεις ή οι τιμές βρίσκονται *εντός των ορίων του πειραματικού σφάλματος*. Π.χ. κάποιος μετράει την επιτάχυνση της βαρύτητας και βρίσκει $g = (979 \pm 2)$ cm/s^2 και θέλει να την συγκρίνει με την γνωστή τιμή των 980 cm/s^2 (για την γνωστή τιμή συνεπάγεται από τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων απόλυτο σφάλμα $\pm$ 1 cm/s^2). Η σύγκριση των δύο ποσοτήτων δείχνει πως οι δύο τιμές συμφωνούν μέσα στο όριο του σφάλματος του πειράματος. Αυτό φαίνεται καλλίτερα στον παρακάτω κατάλληλα εκλεγμένο άξονα αριθμών.



Συχνά η πειραματική τιμή $\bar{x}$ συγκρίνεται με τη γνωστή τιμή a μέσω του υπολογισμού της εκατοστιαίας διαφοράς

$$\%\text{διαφορά} = \frac{|\bar{x} - a|}{a} \times 100\%. \quad (27)$$

Οταν η φυσική ποσότητα μετράται με δύο διαφορετικές μεθόδους, τότε χρησιμοποιείται η σχέση

$$\%\text{διαφορά} = \frac{|\bar{x}_{max} - \bar{x}_{min}|}{\bar{x}_{min}} \times 100\%. \quad (28)$$

για να υπολογιστεί η εκατοστιαία διαφορά μεταξύ των δύο μετρήσεων.

Α2.6 Περίληψη Βασικών Σημείων

Σημαντικά ψηφία.

1)Τα ψηφία που είναι αποτέλεσμα μετρήσεων ονομάζονται σημαντικά.

2) Το πιο σημαντικό ψηφίο είναι το πλέον αριστερό μη μηδενικό ψηφίο.

3) Το λιγότερο σημαντικό ψηφίο είναι το πλέον δεξιό ακόμα και αν είναι μηδέν

4) Σε μια έμμεση μέτρηση το αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία, όσα και ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς.

5) Για να βρούμε τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων μιας μέτρησης ακολουθούμε τον κανόνα: Γράφουμε τον αριθμό σε εκθετική μορφή $x,n \times 10^m$, όπου x = πρώτο ψηφίο μη μηδενικό, n = αριθμός δεκαδικών ψηφίων και m = εκθέτης. Τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων είναι, σ.ψ. $= 1 + n$.

6) Τα σημαντικά ψηφία θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στους υπολογισμούς και στο στρογγύλεμα των αποτελεσμάτων τους.

7) Τα σημαντικά ψηφία υποδηλώνουν την ακρίβεια μιας μέτρησης, π.χ. όταν l = 12,5 cm τότε Δl = ± 0,1 cm, όταν l = 12,93 cm τότε Δl = ± 0,01 cm.

Πειραματικά Σφάλματα.

Κάθε μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας συνοδεύεται πάντα από ένα πειραματικό σφάλμα.

Σφάλμα: Ορίζεται σαν η απόκλιση της μέτρησης από την πραγματική τιμή.

Απόλυτο σφάλμα: Για μια μέτρηση x, το απόλυτο σφάλμα Δx καθορίζει ένα διάστημα τιμών $x - \Delta x$ ως $x + \Delta x$, όπου βρίσκονται οι μετρήσεις της ποσότητας αυτής με μια ορισμένη στάθμη εμπιστοσύνης (δηλαδή βεβαιότητας)

Σχετικό σφάλμα: Το σχετικό σφάλμα μιας μέτρησης είναι $(\Delta x/x)\times$ 100 %.

Είδη σφαλμάτων: **α**) Ακούσια σφάλματα παρατηρητή ή λάθη. **β**) Συστηματικά σφάλματα (1) λογω εσφαλμένης βαθμονόμησης οργάνων, 2) λόγω περιβαλλοντικών παραμέτρων, 3) λόγω θεωρητικών προσεγγίσεων). **γ**) Τυχαία ή στατιστικά σφάλματα.

Αμεσες μετρήσεις. Εκτίμηση απολύτων σφαλμάτων.

A) Μια μόνο μέτρηση: x

$\Delta x =$ Μ.Σ.Ο.(Μέγιστο σφάλμα οργάνου) όπου Μ.Σ.Ο. $\leq$ μικρότερης υποδιαίρεσης, η της διακριτικής ικανότητας, του οργάνου

B) Πολλές μετρήσεις: x_i ,$i = 1, 2, 3, \cdots, n$

Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου $\mu =$ μέση τιμή και $\sigma =$ τυπική απόκλιση. Η πιθανότητα $dP(x)$ μια μέτρηση να βρεθεί στο διάστημα μεταξύ $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$ είναι 0,682 ή 68,2 %. Οταν επαναλαμβάνουμε μια μέτρηση πολλές φορές, x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, τότε η τιμή της ποσότητας μ προσεγγίζεται από την αριθμητική μέση τιμή

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n,$$

Ενώ το απόλυτο σφάλμα μπορεί να εκτιμηθεί από

α) *Τυπική απόκλιση μέσης τιμής*

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} \simeq \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

b) *Τυπική απόκλιση δείγματος* (= τυπικό σφάλμα):

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

c) *Μέση απόκλιση*

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\overline{x} - x_i|}{n}$$

Ο φοιτητής θα πρέπει να γνωρίζει την διαφορά μεταξύ των παραπάνω τριών τρόπων.

Διάδοση σφαλμάτων στους υπολογισμούς.

Οταν μια φυσική ποσότητα $P = f(Q_1, Q_2, Q_3, \cdots)$ υπολογίζεται από την μέτρηση των $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ των οποίων τα σφάλματα είναι $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3, \cdots$ τότε το σφάλμα ΔP μπορεί να βρεθεί από το :

Μέγιστο Δυνατό Σφάλμα

$$\Delta P = |\frac{\partial f}{\partial Q_1}|\Delta Q_1 + |\frac{\partial f}{\partial Q_2}|\Delta Q_2 + |\frac{\partial f}{\partial Q_3}|\Delta Q_3 + \cdots$$

ή το *Πιθανό Σφάλμα*

$$\Delta P = \{(\frac{\partial f}{\partial Q_1}\Delta Q_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial Q_2}\Delta Q_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial Q_3}\Delta Q_3)^2 + \cdots\}^{\frac{1}{2}}$$

Το πιθανό σφάλμα αποτελεί πιο ρεαλιστική εκτίμηση του έμμεσου σφάλματος και γι'αυτό θα πρέπει να προτιμάται έναντι του μεγίστου δυνατού σφάλματος.

Συγκρίσεις - Εκατοστιαίες διαφορές.

A) Μεταξύ μετρούμενης τιμής x, και της γνωστής τιμής a

$$\frac{x-a}{a}100\%$$

B) Μεταξύ δύο μετρούμενων τιμών x_1 και x_2

$$\frac{x_2-x_1}{x_1}100\% \quad \text{εάν} \quad x_1 < x_2 \quad \text{και} \quad \frac{x_1-x_2}{x_2}100\% \quad \text{εάν} \quad x_2 < x_1.$$

A2.7 Ασκήσεις

1.0 Εστω $x = ay^2e^{-bz}$ όπου $a, b = const.$ Βρείτε μία έκφραση για το μέγιστο δυνατό σχετικό σφάλμα $\Delta x/x$ συναρτήσει των $\Delta y/y$ και Δz.

2.0 Εστω $\chi = ay^{1/2}ln(bz)$ όπου $a, b = const.$ Βρείτε μία έκφραση για το πιθανό σχετικό σφάλμα $\Delta x/x$ συναρτήσει $\Delta y/y$ και $\Delta z/z$.

3.0 Χρησιμοποιείστε τις παρακάτω εξισώσεις και μετρήσεις και υπολογίστε :

a) μια αναλυτική σχέση για το πιθανό σχετικό σφάλμα της υπό υπολογισμό ποσότητας.

b) την μέση τιμή λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες σημαντικών ψηφίων.

c) το σχετικό σφάλμα.

d) το απόλυτο σφάλμα

3a: Κινητική Ενέργεια $K = mV^2/2$. Δίνεται ότι m = (5,32 ± 0,03) kg και V = (2,37 ± 0,07) m/s

3b: Η περίοδος δορυφόρου περί την σελήνη είναι $\tau = [2\pi/\sqrt{GM_m}](R_m + h)^{3/2}$. Δίνονται : R = 6,67 × 10^{-11} $\mathrm{Nm^2/kg^2}$, M_m = (7,35 ± 0,01)×10^{22} kg, R_m = (1,738 ± 0,001)×10^6 m, h = (1,1 ± 0,1)×10^6 m.

3c: Σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα : $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, όπου R_1 = (50 ± 5) Ω, R_2 = (70 ± 5) Ω, R_1 = (95 ± 5) Ω.

Α3. Γραφικές Παραστάσεις

Συχνά αντιμετωπίζουμε την περίπτωση συστημάτων με περισσότερες των δύο μεταβλητών. Σαν παράδειγμα, οι παράμετροι που επηρεάζουν την συμπεριφορά μιας μάζας ιδανικού αερίου είναι η πίεση P, ο όγκος V, και η θερμοκρασία T που συνδέονται με την σχέση

$$PV/T = const.$$

Αν θέλουμε να παρατηρήσουμε πειραματικά πως η μεταβολή του P επηρεάζει το V, τότε πρέπει να διατηρήσουμε την θερμοκρασία σταθερή. Αυτό οδηγεί στον νόμο του Boyle:

$$PV = const.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο για να δούμε πώς η μεταβολή του T επηρεάζει το V, πρέπει η πίεση να διατηρηθεί σταθερή. Για να διερευνήσουμε πως μεταβάλλεται η πίεση με τη θερμοκρασία, πρέπει ο όγκος να παραμείνει σταθερός.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει το γενικό τρόπο εργασίας σε ένα πείραμα, δηλαδή συνήθως η ανάλυση των πειραματικών δεδομένων αφορά στην εύρεση της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών ενώ άλλες δυνατές μεταβλητές διατηρούνται σταθερές. Την σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων την διερευνούμε καλύτερα όταν τα πειραματικά αποτελέσματα μπαίνουν σε μορφή *Διαγράμματος, η Γραφήματος, ή Γραφικής Παράστασης*.

Στο πείραμα συνήθως μετράμε μια σειρά τιμών μιας φυσικής ποσότητας που αντιστοιχούν σε ελεγχόμενες μεταβολές μιας άλλης. Η ποσότητα που μεταβάλλεται ελεγχόμενα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και απεικονίζεται στον άξονα των τετμημένων (άξονα των x), ενώ η άλλη ποσότητα είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και απεικονίζεται στον άξονα των τεταγμένων (άξονα των y). Στα επόμενα θα εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα γραφικών παραστάσεων δύο μεταβλητών που συναντώνται συνήθως στα εργαστήρια φυσικής. Επίσης θα δοθούν οδηγίες για την κατασκευή γραφημάτων πειραματικών δεδομένων.

Γραμμική Σχέση. Η σχέση μεταξύ μιας ανεξάρτητης και μιας εξαρτημένης μεταβλητής είναι δυνατόν να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Η γραμμική σχέση, είναι η απλούστερη δυνατή που οδηγεί σε ένα διάγραμμα ευθείας γραμμής

$$y = a + bx \tag{29}$$

όπου a είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα των y και της αρχής των συντεταγμένων και ονομάζεται *Διατομή* (intercept), ενώ b είναι η *Κλίση* (slope) της γραμμής.

Σαν παράδειγμα ας θεωρήσουμε την γραμμική σχέση που διέπει την μεταβολή της αντίστασης ενός αγωγού R με την θερμοκρασία T, δηλαδή

$$R = R_0(1 + \alpha T)$$

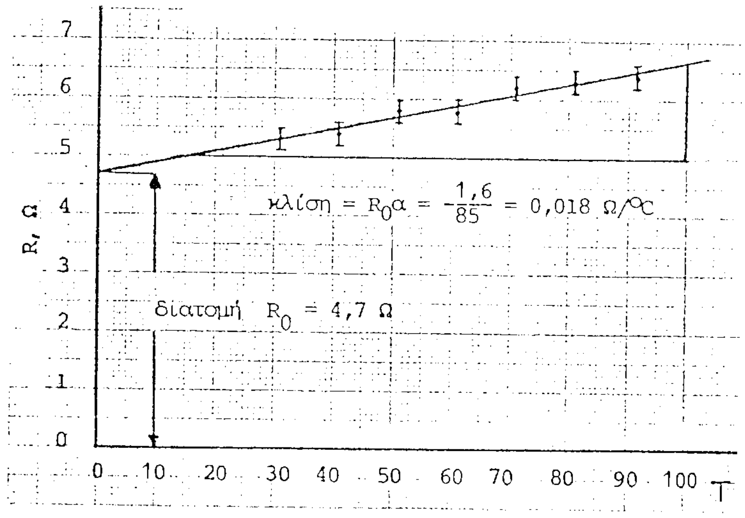
όπου R_0 είναι η τιμή της αντίστασης όταν $T = 0^o$ και α είναι ο θερμικός συντελεστής αντίστασης. Οι μεταβαλλόμενες ποσότητες στην παραπάνω εξίσωση είναι R και T, ενώ R_0 και α είναι σταθερές. Οταν το R απεικονίζεται στον άξονα των y και το T στον άξονα των x (ανεξάρτητη μεταβλητή) παίρνουμε ένα διάγραμμα μιας ευθείας γραμμής με κλίση $R_0\alpha$ και διατομή R_0. Αν μετρήσουμε την κλίση και την διατομή μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή α.

Στη συνέχεια ας επιχειρήσουμε να κάνουμε την πρώτη μας γραφική παράσταση με βάση τα αποτελέσματα ενος πειράματος το οποίο εξετάζει τη μεταβολή της αντίστασης ενός αγωγού με την θερμοκρασία. Τα πειραματικά δεδομένα παρέχονται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας Μετρήσεων							
T, ^{o}C	31	41	51	61	71	81	91
R, Ω	5,3	5,4	5,8	5,8	6,2	6,3	6,4

Επίσης δίνεται ότι το απόλυτο σφάλμα για κάθε μέτρηση της R είναι $\Delta R = 0{,}2$ Ω. Τα δεδομένα του πίνακα απεικονίζονται στο Σχήμα 1 σε γραμμικό χαρτί. Κάθε ζεύγος (R, T) απεικονίζεται με ενα σημείο στο επίπεδο $x - y$, ενώ οι μικρές γραμμές παράλληλες στον άξονα των αντιστάσεων αντιπροσωπεύουν το σφάλμα $\pm 0{,}2$ Ω και ονομάζονται *βραχίονες σφάλματος* (error bars). Στο διάγραμμα υπολογίζονται επίσης η κλίση και η διατομή, απ'όπου βρίσκεται η σταθερά $\alpha = 4.0 \times 10^{-3}$ $(1/^o\mathrm{C})$.

Οπως φαίνεται από το Σχήμα 1, τα απεικονιζόμενα σημεία συνήθως δεν πέφτουν ακριβώς πάνω στην ευθεία γραμμή. Φυσικά, αυτό πρέπει να το περιμένει κανείς γιατί τα πειραματικά δεδομένα (σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο) εμπεριέχουν σφάλματα. Στις γραφικές παραστάσεις υπάρχουν σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν της γραμμής, η οποία πρέπει να αντιπροσωπεύει την πιστότερη προσέγγιση που περνά μέσα από τα απεικονιζόμενα ζεύγη μετρήσεων.



Σχήμα 1. Μεταβολή της αντίστασης R με τη θερμοκρασία T

<u>**Σχέση Δύναμης.**</u> Μια κοινή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών είναι της μορφής

$$u = cv^b \tag{30}$$

όπου u και v είναι η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή αντίστοιχα, c είναι μια σταθερά και b είναι ο εκθέτης που μπορεί να είναι ακέραιος ή κλασματικός (θετικός ή αρνητικός) αριθμός. Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε

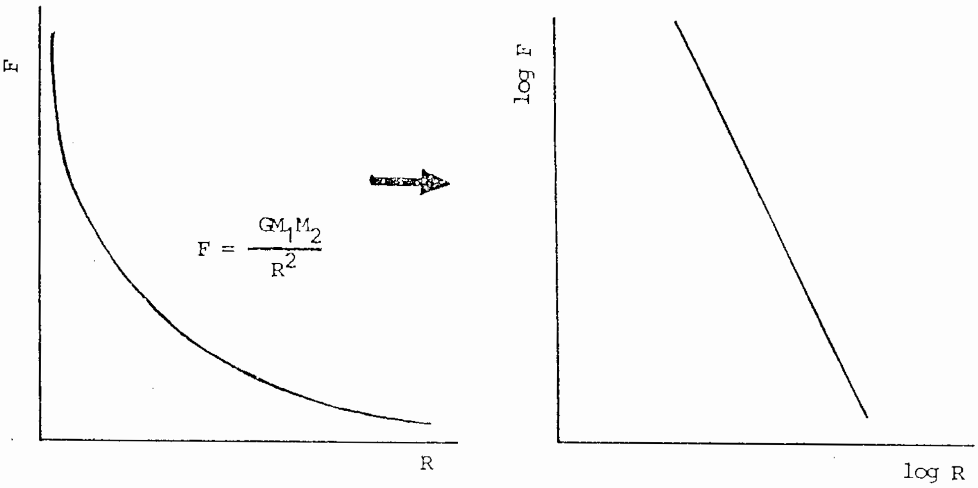
$$\log u = \log c + b \log v. \tag{31}$$

Αν θέσουμε $\log u = y$, $\log c = a$ και $\log v = x$, τότε η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$y = a + bx.$$

Με το τρόπο αυτό καταλήγουμε σε μια γραμμική εξίσωση όπου a και b είναι σταθερές. Η σχέση αυτή βέβαια όταν απεικονισθεί διαγραμματικά σε γραμμικό χαρτί δίνει μια ευθεία γραμμή. Η προηγούμενη διαδικασία λογαριθμοποίησης ονομάζεται ανόρθωση πριν τη γραφική παράσταση (rectification before plotting). Στην περίπτωση πειραματικών μετρήσεων, πολλές φορές, προτιμάμε αντί να απεικονίζουμε το u σαν συνάρτηση του v, να 'ανορθώνουμε' τα δεδομένα και να απεικονίζουμε το $(\log u)$ σαν συνάρτηση του $(\log v)$. Τότε η κλίση της ευθείας γραμμής (αν προκύψει ευθεία γραμμή) θα δώσει τον εκθέτη b. Ενα διάγραμμα αυτού του τύπου ονομάζεται *Λογαριθμικό* και χρησιμοποιείται συνήθως για τον καθορισμό του εκθέτη σε μια σχέση δύναμης μεταξύ δύο μεταβλητών.

Ενα παράδειγμα γραφικής παράστασης της σχέσης δύναμης μεταξύ δύο φυσικών ποσοτήτων (εδώ θεωρούμε το νόμο της παγκόσμιας έλξης) παρέχεται στο Σχήμα 2. Οπως βλέπουμε, η παράσταση του F ως προς το R δεν διευκολύνει πολύ την εύρεση της ακριβούς συναρτησιακής σχέσης μεταξύ τους. Παράλληλα, το παραπλεύρως διάγραμμα του $\log F$ έναντι $\log R$ δίνει μια ευθεία γραμμή με κλίση -2 έτσι ώστε αμέσως διαπιστώνεται ότι η δύναμη F είναι αντιστρόφως ανάλογη του R^2.



Σχήμα 2. Γραφική παράσταση της $F = f(R)$ και της $\log F = f(\log R)$

Εκθετική Σχέση. Πολλές φορές στη φυσική, η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών διέπεται από τον εκθετικό νόμο. Οι εκθετικές σχέσεις γράφονται σαν δυνάμεις του αριθμού $e = 2.718\cdots$, δηλαδή τη βάση των φυσικών λογαρίθμων. Παραδείγματα εκθετικών σχέσεων από τη φυσική είναι:

1) Η εκφόρτωση του ηλεκτρικού φορτίου ενός πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω μιας αντί-

σιασης R που περιγράφεται από την σχέση

$$Q = Q_o e^{-t/RC}$$

όπου Q είναι το φορτίο του πυκνωτή κατά τη χρονική στιγμή t και Q_o το φορτίο όταν $t = 0$.

2) Η διάσπαση της μάζας ενός ραδιενεργού υλικού ακολουθεί τον εκθετικό νόμο

$$m = m_o e^{-\lambda t}$$

όπου m είναι η μάζα του υλικού την χρονική στιγμή t, m_o είναι η μάζα όταν $t = 0$, και λ είναι η σταθερά διάσπασης (decay constant) του υλικού.

3) Η απορρόφηση της έντασης των ακτίνων X από ένα υλικό περιγράφεται από την σχέση

$$I = I_o e^{-\alpha x},$$

όπου I είναι η ένταση της δέσμης σε βάθος x εντός του υλικού, I_o είναι η προσπίπτουσα ένταση στο $x = 0$, ενώ α είναι ο συντελεστής απορρόφησης του υλικού.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε τον γενικό τύπο μιας εκθετικής σχέσης

$$u = ce^{bv}, \tag{32}$$

όπου c και b είναι σταθερές, πραγματικοί αριθμοί. Οταν λογαριθμίσουμε και τα δύο μέλη ως προς βάση e έχουμε

$$\ln u = \ln c + bv,$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $\ln x = 2.303 \log x$ παίρνουμε :

$$\log u = \log c + \frac{b}{2.303} v. \tag{33}$$

Αν $\log u$ απεικονιστεί κατά μήκος του άξονα y και η μεταβλητή v κατά μήκος του άξονα x ενός γραμμικού χαρτιού, η τελευταία εξίσωση παριστά μια ευθεία γραμμή που έχει κλίση $b/2.303$ και διατομή ίση με $\log c$. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται *Ημιλογαριθμικό.*

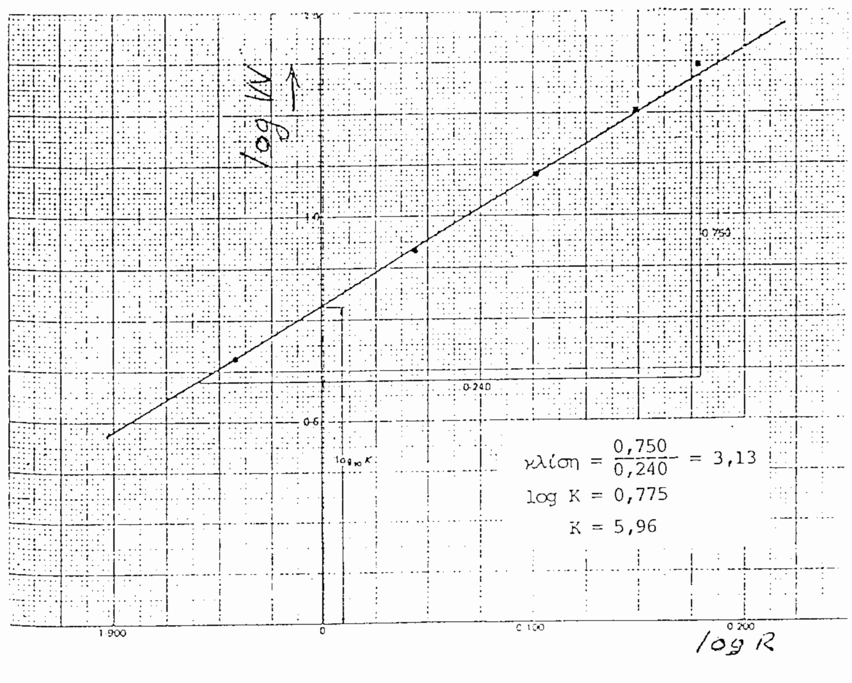
<u>Παράδειγμα Λογαριθμικού Διαγράμματος.</u>: Η θεωρία προβλέπει ότι η ισχύς W που αποδίδεται σε ακτινοβολία από ένα πυρακτωμένο νήμα αντίστασης R, δίνεται από την σχέση

$$W = kR^4$$

όπου k είναι σταθερά. Τα δεδομένα ενός πειράματος το οποίο μετρά την ισχύ W σαν συνάρτηση της αντίστασης R καταγράφονται στον αμέσως επόμενο πίνακα

Πίνακας Μετρήσεων			
W, W	R, Ω	$\log W$	$\log R$
4,41	0,91	0,644	-0,041
8,11	1,11	0,909	0,045
12,59	1,27	1,100	0,104
17,70	1,41	1,248	0,149
23,88	1,51	1,378	1,179

Το Σχήμα 3 δείχνει το λογαριθμικό διάγραμμα του $\log W$ έναντι του $\log R$ με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου πίνακα μετρήσεων.



Σχήμα 3. Διάγραμμα του $\log W$ έναντι του $\log R$ σε γραμμικό χαρτί

Οπως φαίνεται από το σχήμα, $\log k$ είναι η τομή της ευθείας γραμμής με τον άξονα των $\log W$ η οποία μπορεί να μετρηθεί (δηλαδή $\log k = 0.775$) και έτσι να υπολογιστεί η τιμή του k (εδώ $k = 5.96$). Επίσης, η τιμή της κλίσης προκύπτει από το διάγραμμα ότι είναι ίση με 3,13 αντί 4 που προβλέπει η θεωρία. Η διαφορά αυτή οφείλλεται σιό αποτέλεσμα των ωμικών απωλειών στις συνδέσεις.

Είναι δυνατόν στα λογαριθμικά (και ημιλογαριθμικά) διαγράμματα να αποφεύγουμε την εύρεση των λογαρίθμων και την απεικόνισή τους σε γραμμικό χαρτί. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του λογαριθμικού (και ημιλογαριθμικού) χαρτιού, όπου οι γραμμές ακολουθούν λογαριθμική κλίμακα με βάση το 10, έτσι ώστε η απεικόνιση των μεταβλητών x και y να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως όταν κάποιος απεικονίζει σε γραμμικό χαρτί το διάγραμμα του $\log y$ έναντι $\log x$.

Το ίδιο διάγραμμα, όπως στο Σχήμα 3, αλλά σε λογαριθμικό χαρτί, εμφανίζεται στο Σχημα 4 όπου τώρα οι δύο πρώτες στήλες του προηγουμένου πίνακα απεικονίζονται εκεί κατ' ευθείαν. Επειδή η γραφική παράσταση στο Σχήμα 4 δίνει ευθεία γραμμή σημαίνει ότι η εξίσωση που συνδέει τις δύο ποσότητες είναι της μορφής $W = kR^n$. Για τον υπολογισμό του εκθέτη n από τη γραφική παράσταση χρησιμοποιείται η ακόλουθη διαδικασία. Πρώτα γράφουμε την εξίσωση σε λογαριθμική μορφή

$$\log W = \log k + n \log R$$

και κατόπιν επιλέγουμε δύο σημεία επί της γραμμής, π.χ. $W_1 = 22.0$-$R_1 = 1.5$ και $W_2 = 2,7$-$R_2 = 0,8$ τα οποία αντικαθίστανται στην παραπάνω εξίσωση. Αν αφαιρέσουμε τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν έχουμε

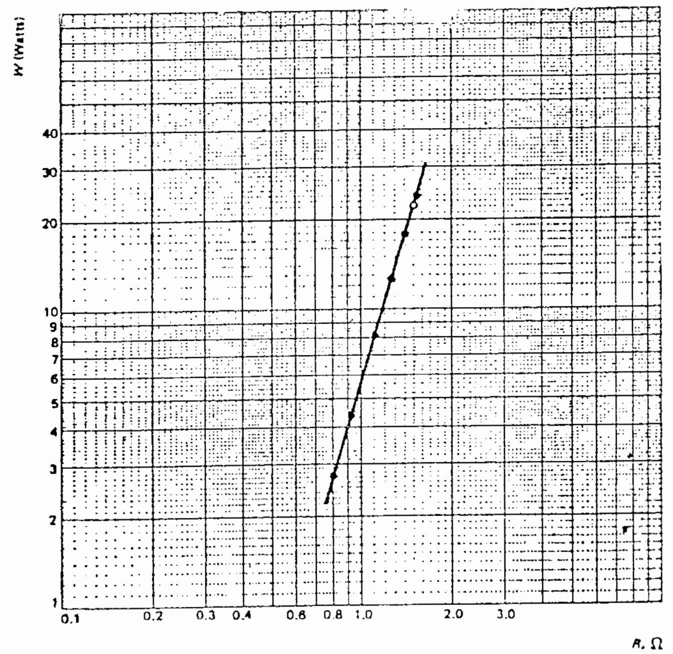
$$\log 22,0 - \log 2.7 = n(\log 1.5 - \log 0.8)$$

απ' όπου υπολογίζεται το n

$$n = \frac{\log(22,0/2,7)}{\log(1.5/0.8)} = \frac{\log 8,16}{\log 1,88} = 3.3$$

Κάνοντας την σύγκριση των δύο διαγραμμάτων (Σχήματα 3 και 4) βλέπουμε ότι η ακρίβεια για υπολογισμούς κλίσης ή διατομής, είναι καλύτερη στα διαγράμματα που γίνονται σε γραμμικό παρά σε λογαριθμικό χαρτί. Επομένως, σε περίπτωση που απαιτείται ακρίβεια θα πρέπει να χρησιμοποιείται γραμμικό αντί του λογαριθμικού χαρτιού.

Τέλος, σαν γενικός κανόνας σύγκρισης μεταξύ πειραματικών αποτελεσμάτων και θεωρίας, συστήνεται όπως και οι δύο γραφικές παραστάσεις, η μία με βάση τη θεωρία και η άλλη με βάση το πείραμα, να κατασκευάζονται στο ίδιο χαρτί. Εάν η θεωρία περιγράφει επαρκώς την κατάσταση, τα πειραματικά σημεία θα βρίσκονται κατά μήκος της θεωρητικής καμπύλης. Αν όμως τα πειραματικά σημεία δεν ακολουθούν την θεωρητική καμπύλη, τότε είτε η προτεινόμενη θεωρία, και συνεπώς η εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο, είναι ανεπαρκής, ή το πείραμα δεν έχει σχεδιαστεί είτε εκτελεστεί κατάλληλα.



Σχήμα 4. Ισχύς W έναντι αντίστασης R σε λογαριθμικό χαρτί

Α3.1 Οδηγίες για την Κατασκευή Γραφικών Παραστάσεων

1) Αρχίστε με τη σχεδίαση των αξόνων. Οι άξονες δεν θα πρέπει να τοποθετούνται στα άκρα του χαρτιού αλλά να αφήνεται περιθώριο.

2) Τοποθετείστε τις κατάλληλες κλίμακες κατά μήκος των αξόνων και σημειώστε τα υποδιαστήματά τους. Κάθε κλίμακα θα πρέπει να συνοδεύεται από την ποσότητα που απεικονίζεται στον άξονα και τις αντίστοιχες φυσικές μονάδες. Η εκλογή της κλίμακας να γίνεται έτσι ώστε η καμπύλη να καταλαμβάνει όλο το χώρο του χαρτιού και να μη περιορί-

ζεται σε ένα μόνο μικρό μέρος του.

3) Απεικονίστε τα ζεύγη (x, y) των μετρήσεων στο χαρτί. Η θέση κάθε ζεύγους σημειώνεται με ευδιάκριτη μικρή τελεία. Δεν θα πρέπει ποτέ οι θέσεις των τετμημένων είτε τεταγμένων των σημείων να σημειώνονται πάνω στους άξονες.

4) Σχεδιάστε την καμπύλη με βάση τα πειραματικά σημεία. Τα περισσότερα διαγράμματα του παρόντος εργαστηρίου, σχετίζονται με κάποιο φυσικό νόμο ή αφορούν κάποια γνωστή σχέση. Επομένως η καμπύλη είναι ομαλή, συνήθως ευθεία γραμμή. Μην προσπαθείτε να σχεδιάσετε την καμπύλη έτσι ώστε να περνά από όλα τα σημεία (μη ξεχνάτε ότι οι μετρήσεις έχουν σφάλματα). Η καλύτερη προσαρμογή (best fit) της γραμμής, μπορεί να γίνει με ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή η με τον υπολογισμό της καλύτερης δυνατής κλίσης και διατομής στην περίπτωση ευθείας γραμμής με βάση τις εξισώσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων (βλέπε επόμενο κεφάλαιο). Στο εργαστήριο το πρόβλημα της εκλογής της πιο κατάλληλης γραμμής (στην περίπτωση μη εφαρμογής της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων) αφήνεται στην εφευρετικότητα του φοιτητή.

5) Δώστε ένα σύντομο τίτλο στη γραφική παράσταση, που συνήθως τοποθετείται αμέσως κάτω από τον άξονα των τετμημένων (όπως στα σχήματα του βιβλίου σας).

6) Μερικές φορές εξυπηρετεί να απεικονίζετε τα πειραματικά σφάλματα που συνοδεύουν τις μετρήσεις. Σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείστε για κάθε απεικονισμένο σημείο βραχίονες σφάλματος όπως π.χ. στο Σχήμα 1.

7) Οπου απαιτείται υπολογισμός της κλίσης μιας ευθείας γραμμής, θα πρέπει να χρησιμοποιούνται δύο σχετικώς απομακρυσμένα σημεία της γραμμής, με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2), και να κατασκευάζεται ένα μεγάλο τρίγωνο (όπως στο Σχήμα 1 και 3). Οι συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της κλίσης σύμφωνα με

την εξίσωση

$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

όπου Δy και Δx αντιπροσωπεύουν τις δύο καθέτες πλευρές του τριγώνου σε φυσικές μονάδες της κλιμακας του άξονα και όχι σε πραγματικό μήκος.

8) Το πειραμαιικό σφάλμα στην κλίση μπορεί να καθοριστεί αν, αντί μιας, χρησιμοποιήσουμε δύο κλίσεις, δηλαδή προσαρμόζουμε κατ' εκτίμηση δύο γραμμές στα απεικονισμένα σημεία έτσι ώστε η μία να αντιπροσωπεύει τη μέγιστη δυνατή τιμή για την κλίση και η άλλη την ελάχιστη. Η πιο κατάλληλη τιμή για την κλίση είναι ο μέσος όρος της μέγιστης και ελάχιστης, ενώ το πειραματικό σφάλμα είναι το μισό της διαφοράς των δύο κλίσεων (δηλαδή $\Delta\text{κλίση} = (\text{κλίση}_{max} - \text{κλίση}_{min})/2$).

A4. Προσαρμογή Καμπυλών

Αποδεικνύεται ότι για ένα σύνολο ζευγών πειραματικών μετρήσεων, (x_i, y_i) όπου $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, υπάρχει ένα πολυώνυμο βαθμού $r-1$ της μορφής

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_r x^{r-1} \quad \text{όπου} \quad r \leq n-1 \tag{34}$$

που προσεγγίζει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα πειραματικά δεδομένα. Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση του πολυωνύμου αυτού είναι μια καμπύλη που αποτελεί την καλύτερη προσαρμογή (best fit) στο πλήθος των πειραματικών μετρήσεων.

Οι μέθοδοι πολυωνυμικής προσέγγισης πειραματικών δεδομένων αναφέρονται στην ελαχιστοποίηση των διαφορών $\upsilon_i = |y(x_i) - y_i|$ μεταξύ των μετρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής και των αντιστοίχων τιμών του πολυωνύμου. Γενικοί κανόνες για την επιλογή της μεθόδου προσέγγισης και της εκλογής του βαθμού του πολυωνύμου δεν υπάρχουν στην πράξη. Συνήθως, οποιαδήποτε ένδειξη υπάρξει, με βάση υποκειμενικά είτε αντικειμενικά κριτήρια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

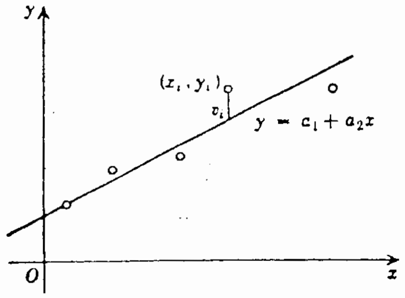
Παρακάτω θα αναπτύξουμε τα βασικά της τεχνικής προσαρμογής πολυωνύμου με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία είναι πολύ χρήσιμη και εξυπηρετεί ικανοποιητικά στην ανάλυση των εργαστηριακών μετρήσεων.

A4.1 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Οταν ο αριθμός n των σημείων (x_i, y_i) είναι μεγάλος, ο βαθμός του παλυωνύμου, που δίνεται από την εξίσωση (1), είναι επίσης μεγάλος. Το να προσεγγίσουμε ακριβέστατα τα δεδομένα με ένα πολυώνυμο τόσο μεγάλου βαθμού, εκτός του ότι είναι μια διαδικασία επίπονος δεν είναι και αναγκαία, επειδή τα πειραματικά δεδομένα περιέχουν σφάλματα έτσι ώστε μια ακριβής πολυωνυμική προσέγγιση να μην έχει πολλές φορές νόημα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις προτιμούμε την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων με μια πολυώνυμική συνάρτηση $y = f(x)$, η οποία περιέχει σχετικά λίγους αγνώστους συντελεστές. Στη συνέχεια οι συντελεστές αυτοί θα πρέπει να υπολογισθούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ώστε η καμπύλη $y = f(x)$ να προσεγγίζει ή να προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (best fit).

Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε την προσαρμογή της καλύτερης δυνατής ευθείας γραμμής, $y = a_1 + a_2 x$ στα πειραματικά σημεία τα οποία απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα. Για την βέλτιστη προσαρμογή πρέπει να υπολογίσουμε τις κατάλληλες τιμές των a_1 και a_2, για τις οποίες το άθροισμα των τετραγώνων των κατακορύφων αποκλίσεων των σημείων από την ευθεία γραμμή, οπως μια από αυτές σημειώνεται στο σχήμα, να είναι ελάχιστο. Αυτό επιτυγχάνεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.



Γενικώτερα, αν θεωρήσουμε ότι μια σειρά πειραματικών μετρήσεων δυο μεταβλητών (x_i, y_i), όπου $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, αντιπροσωπεύεται από κάποια συναρτησιακή σχέση $y = f(x)$, η οποία περιέχει r άγνωστους συντελεστές $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$, και σχηματίσουμε τις αποκλίσεις (ή υπολειπόμενα)

$$\mathrm{v}_i = f(x_i) - y_i, \tag{35}$$

τότε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 \tag{36}$$

είναι συνάρτηση των $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές a_r, έτσι ώστε το S να είναι ελάχιστο. Για να είναι το S ελάχιστο πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \cdots \quad , \frac{\partial S}{\partial a_r} = 0 \tag{37}$$

Από το σύστημα των παραπάνω r εξισώσεων, που ονομάζονται *Κανονικές Εξισώσεις*, υπολογίζονται οι συντελεστές $a_1, a_2, \ldots, a_r$ της $y = f(x)$. Αυτό το κριτήριο της 'καλύτερης προσαρμογής' των δεδομένων είναι γνωστό σαν *Αρχή των Ελαχίστων Τετραγώνων* και η μέθοδος καθορισμού των άγνωστων παραμέτρων ονομάζεται *Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων*. Η εισαγωγή της μεθόδου αυτής και η πλήρης ανάπτυξή της έγινε από τον Gauss στην ηλικία των 17 χρόνων.

Στη συνέχεια θα βρούμε τις κανονικές εξισώσεις στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση του x, δηλαδή στην περίπτωση που οι μετρήσεις προσεγγίζονται απο την ευθεία γραμμή (π.χ. βλέπε προηγούμενο σχήμα):

$$y = a_1 + a_2 x. \tag{38}$$

Το άθροισμα $S = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2$ των αποκλίσεων $\upsilon_i = (a_1 + a_2 x_i) - y_i$ στη περίπτωση αυτή γίνεται

$$S = (a_1 + a_2 x_1 - y_1)^2 + (a_1 + a_2 x_2 - y_2)^2 + \cdots + (a_1 + a_2 x_n - y_n)^2.$$

Παίρνοντας τις μερικές παραγώγους του S ως προς a_1 και a_2 έχουμε τις ακόλουθες δύο κανονικές εξισώσεις

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2(a_1 + a_2 x_1 - y_1) + 2(a_1 + a_2 x_2 - y_2) + \cdots + 2(a_1 + a_2 x_n - y_n) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2x_1(a_1 + a_2 x_1 - y_1) + 2x_2(a_1 + a_2 x_2 - y_2) + \cdots + 2x_n(a_1 + a_2 x_n - y_n) = 0$$

οι οποίες γράφονται ως εξής:

$$n a_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{και} \quad (\sum_{i=1}^{n} x_i) a_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{39}$$

Το σύστημα των δύο αυτών γραμμικών εξισώσεων μπορει εύκολα να λυθεί ως προς a_1 και a_2. Με τον τρόπο αυτό καθορίζεται η ευθεία γραμμή που αποτελεί την καλύτερη προσαρμογή (best fit) στα πειραματικά δεδομένα.

Παράδειγμα 1. Εδώ κάνουμε χρήση των εξισώσεων (39) για τον υπολογισμό των συντελεστών της εξίσωσης $y = a_1 + a_2 x$, ώστε να προσαρμόζεται στην πειραματική μεταβολή του y_i έναντι του x_i που εκφράζεται απο τις παρακάτω μετρήσεις

x	1	2	3	4
y	1,7	1,8	2,3	3,2

Στο παράδειγμα αυτό, $n = 4$ και επειδή

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1.7 + 1.8 + 2.3 + 3.2 = 9$

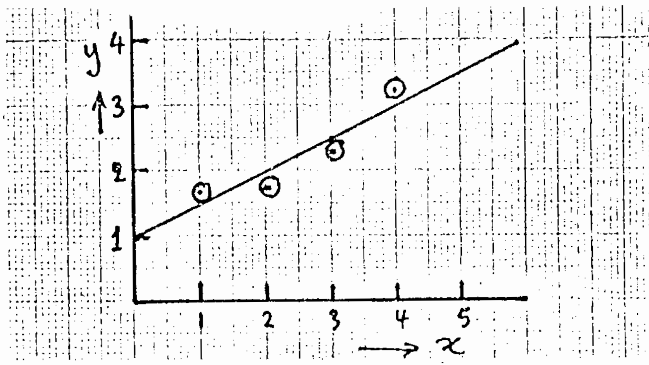
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1.7 + 2 \times 1.8 + 3 \times 2.3 + 4 \times 3.2 = 25$

το σύστημα των εξισώσεων (39) παίρνει την τελική μορφή

$$4a_1 + 10a_2 = 9$$

$$10a_1 + 30a_2 = 25$$

του οποίου η λύση δίνει $a_1 = 1$ και a_2=1/2, έτσι ώστε η βέλτιστη ευθεία γραμμή που προσαρμόζεται στα δεδομένα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα είναι $y = 1 + 0,5x$.



Γενική μορφή κανονικών Εξισώσεων. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όταν $y = f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $r - 1$

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_r x^{r-1} = \sum_{j=1}^{r} a_j x^{j-1}, \tag{40}$$

όπου $j = 1, 2, \ldots, r$. Για τα i ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i), όπου $i = 1, 2, \cdots, n$, οι αποκλίσεις u_i είναι

$$\mathrm{u}_i = \sum_{j=1}^{r} a_j x_i^{j-1} - y_i. \tag{41}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i^2.$$

οι κανονικές εξισώσεις (37) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i \frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial a_k} = 0 \quad \text{όπου} \quad k = 1, 2, 3, \cdots, r \tag{42}$$

Από την Εξίσωση (41) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial a_k} = x_i^{k-1}$$

έτσι ώστε οι παραπάνω κανονικές εξισώσεις γράφονται

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i x_i^{k-1} = 0. \tag{43}$$

Αντικατάσταση της εξίσωσης (41) στην εξίσωση (43) δίνει

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{r} a_j x_i^{j-1} - y_i)x_i^{k-1} = 0,$$

ώστε για τον υπολογισμό των συντελεστών a_j παίρνουμε ένα σύστημα r γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k-2})a_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1}y_i \quad \text{όπου} \quad k = 1, 2, 3, \cdots, r \tag{44}$$

Στα επόμενα θα εφαρμόσουμε τις εξισώσεις αυτές σε δύο παραδείγματα

Παράδειγμα 2. Ας θεωρήσουμε ότι στα δεδομένα του παραδείγματος (1), θέλουμε να προσαρμόσουμε το πολυώνυμο 2ου βαθμού $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\upsilon_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 - y_i$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial a_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \upsilon_i}{\partial a_2} = x_i \quad , \quad \frac{\partial \upsilon_i}{\partial a_3} = x_i^2$$

Με βάση την (42) οι κανονικές εξισώσεις $\sum_{i=1}^{4} \upsilon_i \partial \upsilon_i / \partial a_k = 0$ γιά $k = 1, 2, 3$ είναι :

$$\sum_{i=1}^{4}(a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 - y_i).1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 - y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 - y_i)x_i^2 = 0$$

Αν αθροιστούν οι συντελεστές των a_j ώστε οι κανονικές εξισώσεις να πάρουν τη μορφή των Εξισώσεων (44) έχουμε

$$4a_1 + (\sum_{i=1}^{4} x_i)a_2 + (\sum_{i=1}^{4} x_i^2)a_3 = \sum_{i=1}^{4} y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{4} x_i)a_1 + (\sum_{i=1}^{4} x_i^2)a_2 + (\sum_{i=1}^{4} x_i^3)a_3 = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{4} x_i^2)a_1 + (\sum_{i=1}^{4} x_i^3)a_2 + (\sum_{i=1}^{4} x_i^4)a_3 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i$$

Μετά τον προσδιορισμό των αθροισμάτων, όπως και στο παράδειγμα 1, προκύπτει τελικά το σύστημα των τριών γραμμικών εξισώσεων

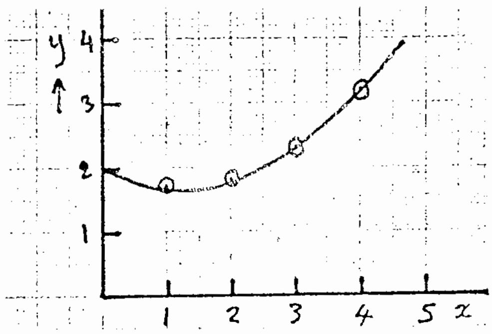
$$4a_1 + 10a_2 + 30a_3 = 9$$

$$10a_1 + 30a_2 + 100a_3 = 25$$

$$30a_1 + 100a_2 + 354a_3 = 80.8$$

του οποίου η λύση δίνει $a_1 = 2$, $a_2 = -0,5$ και $a_3 = 0,2$.

Το παρακάτω σχήμα, απεικονίζει ανάλογα με αυτό του παραδείγματος 1, τις ίδιες μετρή-



σεις αλλά σε αυτές προσαρμόζεται τώρα η παραβολή $y = 2 - 0.5x + 0,2x^2$. Σύγκριση των δύο σχημάτων δείχνει, ότι η δεύτερη καμπύλη προσαρμόζεται πολύ καλά στα δεδομένα, αρκετά καλύτερα από την ευθεία γραμμή του παραδείγματος 1. Επίσης κάποιος μπορεί να συμπεράνει πόσο σημαντική είναι η εκλογή της τάξης του πολυωνύμου. Στο εργαστήριο η εκλογή της τάξης του πολυωνύμου στην προσέγγιση πειραματικών δεδομένων υπαγορεύεται από φυσικά επιχειρήματα και συλλογισμούς.

Παράδειγμα 3. Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στην προσαρμογή του πολυωνύμου $y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ στα παρακάτω δεδομένα.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2,105	2,808	3,614	4,604	5,857	7,451	9,467	11,985

Στην περίπτωση αυτή $n = 8$ και οι Εξισώσεις (44) δίνουν τις ακόλουθες 4 κανονικές εξισώσεις για $k = 1, 2, 3, 4$.

$$8a_1 + (\sum_{i=1}^{8} x_i)a_2 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^2)a_3 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^3)a_4 = \sum_{i=1}^{8} y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{8} x_i)a_1 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^2)a_2 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^3)a_3 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^4)a_4 = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{8} x_i^2)a_1 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^3)a_2 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^4)a_3 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^5)a_4 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 y_i$$

$$(\sum_{i=1}^{8} x_i^3)a_1 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^4)a_2 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^5)a_3 + (\sum_{i=1}^{8} x_i^6)a_4 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 y_i$$

Μετά τον υπολογισμό των διαφόρων αθροισμάτων καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα των 4 κανονικών γραμμικών εξισώσεων

$$8a_1 + 36a_2 + 204a_3 + 1.296a_4 = 47.891$$

$$36a_1 + 204a_2 + 1.296a_3 + 8.722a_4 = 237.119$$

$$204a_1 + 1.296a_2 + 8.772a_3 + 61.776a_4 = 1765.111$$

$$1.296a_1 + 8.772a_2 + 61.776a_3 + 446.964a_4 = 12141.845.$$

του οποίου τελικά οι λύσεις είναι

$$a_1 = 1426 \quad , \quad a_2 = 0.693 \quad , \quad a_3 = 0.028 \quad , \quad a_4 = 0.013.$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο $y(x)$, όπως καθορίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, πού προσεγγίζει την πειραματική μεταβολή είναι

$$y = 1426 + 0.96x - 0.082x^2 + 0.013x^3$$

A4.2. Ειδικές Περιπτώσεις Καμπυλών

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε τα πειραματικά δεδομένα με μια από τις συναρτήσεις:

1) Εκθετική $\quad y = ae^{bx}$

2) Λογαριθμική $\quad y = a + b\ln x$

3) Δύναμης $\quad y = ax^b$

Οι παραπάνω μη γραμμικές σχέσεις μπορούν να μετατραπούν σε γραμμικές της μορφής

$$Y = A + BX$$

εφόσον για κάθε μία απ'αυτές κάνουμε τις αντικαταστάσεις

1) Εκθετική: $Y = \ln y \quad , \quad A = \ln a \quad , \quad B = b \quad , \quad X = x$

2) Λογαριθμική: $Y = y \quad , \quad A = a \quad , \quad B = b \quad , \quad X = \ln x$

3) Δύναμης: $Y = \ln y \quad , \quad A = \ln a \quad , \quad B = b \quad , \quad X = \ln x$

Στη συνέχεια, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπως και στην περίπτωση της ευθείας γραμμής. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, οι κανονικές εξισώσεις για τα A και B (π.χ., Εξίσωση (39)) γράφονται:

$$nA + (\sum X)B = \sum Y \qquad \text{και} \qquad (\sum X)A + (\sum X^2)B = \sum XY$$

όπου n είναι ο αριθμός των ζευγών (x_i, y_i) και $\sum$ παριστάνει το άθροισμα από i=1 έως n

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς Α και Β βρίσκουμε

$$A = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \qquad \text{και} \qquad B = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2};$$

και συνεπώς προσδιορίζουμε την ακριβή μορφή της καλύτερης δυνατής προσέγγισης στα πειραματικά δεδομένα για τις τρείς παραπάνω ειδικές περιπτώσεις μεταβολών.

Παράδειγμα 4. Σε μια αδιαβατική εκτόνωση μιας σταθερής μάζας ιδανικού αερίου, η πίεση P που αντιστοιχεί σε διάφορες τιμές του όγκου V δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

όγκος V,(cm^3)	54,3	61,8	72,4	88,7	118,6	194
πίεση P, (dynes/cm^2)	61,2	49,5	37,6	28,4	91,2	10,1

Ως γνωστόν, για μια αδιαβατική διεργασία ισχύει η σχέση $PV^\gamma = c$. Ζητούνται να βρεθούν οι σταθερές γ και c για την καμπύλη εκείνη που αποτελεί την καλύτερη δυνατή προσέγγιση στα πειραματικά δεδομένα.

Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να λυθεί αν χρησιμοποιούσαμε λογαριθμικό χαρτί και κάναμε το διάγραμμα του P έναντι V. Από το λογαριθμικό διάγραμμα θα πρέκυπτε μία ευθεία γραμμή της οποίας η κλίση και διατομή θα έδιναν τις τιμές του γ και c αντίστοιχα.

Η παρακάτω αλγεβρική μέθοδος για τον υπολογισμό των γ και c είναι πιό ακριβής και στηρίζεται στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Η σχέση $PV^{\gamma} = C$ της αδιαβατικής μεταβολής γράφεται

$$\log P + \gamma \log V = \log c \qquad \text{ή} \qquad \log P = \log c - \gamma \log V$$

Αν θέσουμε $\log P = Y$, $\log c = A$, $B = -\gamma$ και $\log V = X$ έχουμε την ακόλουθη γραμμική σχέση

$$Y = A + BX$$

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες εξισώσεις για τον υπολογισμό των A και B και τον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε, σύμφωνα με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, τις τιμές του A και B : $A = 4.20$, $B = -1,4$

$X = \log V$	$Y = \log P$	X^2	XY
1,7348	1,7868	3,0095	3,0997
1,7910	1,6946	3,2077	3,0350
1,8597	1,5752	3,4585	2,9294
1,9479	1,4533	3,7943	2,8309
2,0741	1,2833	4,3019	2,6617
2,2878	1,0043	5,2340	2,2976
$\sum X = 11,6953$	$\sum Y = 8,7975$	$\sum X^2 = 23.0059$	$\sum XY = 16.8543$

Τελικά, επειδή $\log c = 4.2$ προκύπτει $c = 10^{4.2} = 15849$ και $\gamma = 1.14$,η καλύτερη προσέγγιση στα πειραματικά δεδομένα είναι η καμπύλη $PV^{1.14}$=15849

Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο

Προσέγγιση πειραματικών δεδομένων με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων

1) Γραμμική σχέση: $y = a + bx$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$a = [\frac{\sum y_i}{n} - b\frac{\sum x_i}{n}]$$

$$r^2 = \frac{[\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}]^2}{[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}][\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}]}$$

2) Εκθετική Σχέση: $y = ae^{bx}$

$$a = exp[\frac{\sum \ln y_i}{n} - b\frac{\sum x_i}{n}]$$

$$b = \frac{\sum x_i \ln y_i - \frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum \ln y_i)}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}$$

$$r^2 = \frac{[\sum x_i \ln y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum \ln y_i]^2}{[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}][\sum(\ln y_i)^2 - \frac{(\sum \ln y_i)^2}{n}]}$$

3) Λογαριθμική σχέση: $y = a + b\ln x$

$$b = \frac{\sum y_i \ln x_i - \frac{1}{n}\sum \ln x_i \sum y_i}{\sum(\ln x_i)^2 - \frac{1}{n}(\sum \ln x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}(\sum y_i - b\sum \ln x_i)$$

$$r^2 = \frac{[\sum y_i \ln x_i - \frac{1}{n}\sum \ln x_i \sum y_i]^2}{[\sum(\ln x_i)^2 - \frac{1}{n}(\sum \ln x_i)^2][\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2]}$$

4) Σχέση δύναμης: $y = ax^b$

$$b = \frac{\sum(\ln x_i)(\ln y_i) - \frac{(\sum \ln x_i)(\sum \ln y_i)}{n}}{\sum(\ln x_i)^2 - \frac{(\sum \ln x_i)^2}{n}}$$

$$a = exp[\frac{\sum \ln y_i}{n} - b\frac{\sum \ln x_i}{n}]$$

$$r^2 = \frac{[\sum(\ln x_i)(\ln y_i) - \frac{(\sum \ln x_i)(\sum \ln y_i)}{n}]^2}{[\sum(\ln x_i)^2 - \frac{(\sum \ln x_i)^2}{n}][\sum(\ln y_i)^2 - \frac{(\sum \ln y_i)^2}{n}]}$$

5) Προσαρμογή Ευθείας Γραμμής και Σφάλματα. Εάν λάβουμε επιπλέον των x_i, y_i και τα σφάλματα s_i που αντιστοιχούν στην εξαρτημένη μεταβλητή y_i, δηλαδή $y_i \pm s_i$ και αγνοήσουμε τα σφάλματα στα x_i, τότε στην περίπτωση προσαρμογής ευθείας γραμμής, οι παράμετροι a, b και τα σφάλματά τους s_a και s_b βρίσκονται από τις ακόλουθες εξισώσεις. (για λεπτομέρειες βλέπε : Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, P. R. Bevington, McGraw Hill, 1979).

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{x_i^2}{s_i^2} \sum \frac{y_i}{s_i^2} - \sum \frac{x_i}{s_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{s_i^2}\right) \quad , \quad s_a^2 = \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{x_i^2}{s_i^2}\right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{1}{s_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{s_i^2} - \sum \frac{x_i}{s_i^2} \sum \frac{y_i}{s_i^2}\right) \quad , \quad s_b^2 = \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{1}{s_i^2}\right)$$

$$\Delta = \sum \frac{1}{s_i^2} \sum \frac{x_i^2}{s_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{s_i^2}\right)^2$$

Παρατηρήσεις:

1) (x_i, y_i) όπου $i = 1, 2, \cdots, n$ είναι τα ζεύγη των μετρήσεων και n το πλήθος των μετρήσεων.

2) Το σύμβολο $\sum$ παριστάνει άθροισμα από $i = 1$ έως n.

3) Η ποσότητα r^2 ονομάζεται συντελεστής προσδιορισμού (coefficient of determination) και αποτελεί δείκτη ποιότητας της γραμμικής προσέγγισης. Οι τιμές του r^2 κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1. Οσο πιό κοντά στο 1 είναι η τιμή του r^2 τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή της ευθείας γραμμής στα δεδομένα.

Α4.3 Ασκήσεις

1) Στην εργαστηριακή άσκηση Β10 θα χρησιμοποιήσουμε τον αερόδρομο για την μελέτη της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Από τις μετρήσεις της στιγμιαίας ταχύτητας σαν συνάρτησης του χρόνου έχουμε

t, s	0,5	0,6	0,7	0,9
v, cm/s	14,0	14,9	15,8	17,3

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να προσαρμόσετε μια ευθεία γραμμή στα δεδομένα και να βρείτε τον συντελεστή προσδιορισμού. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας. Βρείτε την αρχική ταχύτητα όταν $t = 0$, επίσης την επιτάχυνση a, και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή 1.2 s. (Απάντηση : $y = 9.9 + 8.2x$)

2) Ο ολικός χρόνος που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ένα όχημα στην περίπτωση που ο οδηγός αντιλαμβάνεται κάποιο κίνδυνο, ισούται με τον χρόνο αντίδρασης, συν τον χρόνο πέδησης. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απόσταση ακινητοποίησης D (που μετράται από τη στιγμή που ο κίνδυνος γίνεται αντιληπτός) σαν συνάρτηση της ταχύτητας V του οχήματος. Ζητείται: α) το διάγραμμα του D έναντι του V, β) η προσαρμογή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνω, μιας παραβολής της μορφής : $D = a_o + a_1 V + a_2 V^2$, στα δεδομένα και γ) ο υπολογισμός του D όταν V=45 miles/h και 80 miles/h.

V (miles/h)	20	30	40	50	60	70
D (ft)	54	90	138	206	292	396

(Απάντηση : β) $D = 41,77 - 1,096V + 0,087V^2$ γ) 170 ft, 510 ft).

3) Στην εργαστηριακή άσκηση Β2 θα υπολογίσετε με αριθμητική παραγώγιση την επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου. Μερικά από τα αποτελέσματά σας εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

t, s	2	5	7	11	14	17	19
a, m/s^2	0,0110	0,0081	0,0066	0,0044	0,0032	0,0013	0,0020

Ξέροντας ότι η συναρτησιακή σχέση μεταξύ a και t είναι της μορφής $a = a_0 e^{-bt}$, να υπολογισθούν οι σταθερές a_0 και b, έτσι ώστε η καμπύλη αυτή να προσεγγίζει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα πειραματικά δεδομένα. Επίσης υπολογίστε την επιτάχυνση τις χρονικές στιγμές $t_1 = 25$ s και $t_2 = 35$ s. Ποιά είναι η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού, σύμφωνα με το τυπολόγιο της προσαρμογής εκθετικής καμπύλης;

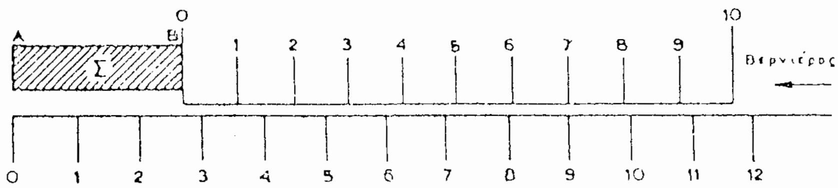
(Απάντηση: r^2 = 0,93, a_0 = 0,01, b = 0,12).

Β1. Απλές Μετρήσεις και Σφάλματα

Ενας από τους βασικούς στόχους του εργαστηρίου Φυσικής Ι είναι η εμπέδωση της έννοιας του *Πειραματικού Σφάλματος* και η εξοικείωση με τη χρήση μεθόδων για την εκτίμησή του. Στα πλαίσια του στόχου αυτού, ο σκοπός του 1ου εργαστηρίου είναι να διδάξει στην πράξη τις βασικές τεχνικές υπολογισμού τυχαίων σφαλμάτων αμέσων και εμμέσων μετρήσεων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο Α2. Επιπλέον, ο φοιτητής θα εξοικειωθεί με ορισμένα απλά όργανα που χρησιμοποιούνται συνήθως στο εργαστήριο για μετρήσεις ακριβείας μικρών μηκών. Σημειώστε ότι πρέπει να γνωρίζετε την ύλη του κεφαλαίου Α2 πριν προχωρήσετε στην εκτέλεση της άσκησης.

Περιγραφή Βερνιέρου – Χρήση Διαστημομέτρου και Μικρομέτρου

Οταν χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση μηκών το κοινό υποδεκάμετρο, οι υποδιαιρέσεις είναι σε mm και η ακρίβεια ανάγνωσης δεν είναι περισσότερη από 0,5 mm, όπως προκύπτει από την εκτίμηση του κλάσματος της μικρότερης υποδιαίρεσης της κλίμακας. Στην περίπτωση που χρειάζεται να μετρηθεί το κλάσμα της υποδιαίρεσης με μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιείται ο βερνιέρος (από τον Pierre Vernier που τον ανακάλυψε το 1631).



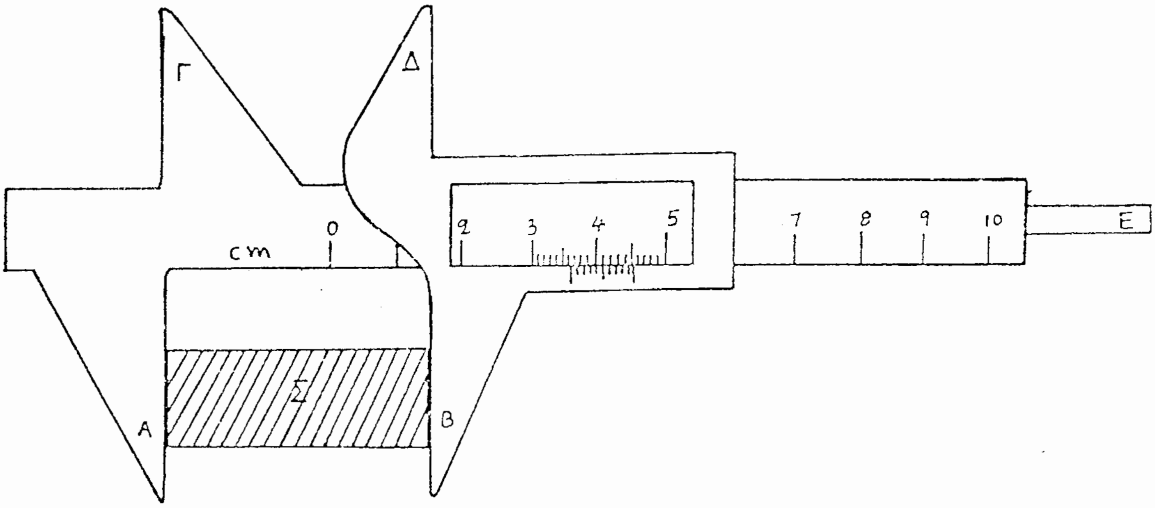
Σχήμα Β1.1. Παράδειγμα μέτρησης με βερνιέρο

Ο βερνιέρος είναι μια μικρή κλίμακα που ολισθαίνει κατά μήκος της κύριας κλίμακας, κατάλληλα υποδιαιρεμένος ώστε η απόσταση μεταξύ των n χαραγών του να είναι ίση με την απόσταση μεταξύ $n-1$ υποδιαιρέσεων της κύριας κλίμακας. Κατά συνέπεια, η υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου είναι μικρότερη αυτής της κύριας κλίμακας κατά το 1/n. Η διαφορά μεταξύ των δύο κλιμάκων ανά υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας, ονομάζεται σταθερά του βερνιέρου β, η οποία καθορίζει το ελάχιστο κλάσμα της υποδιαίρεσης της κυρίας κλίμακας που μπορεί να μετρηθεί. Π.χ. αν ο βερνιέρος έχει 10 υποδιαιρέσεις που καλύπτουν 9 υποδιαιρέσεις της κύριας κλίμακας (δηλαδή 9 mm), τότε η σταθερά του βερνιέρου είναι β=0,1 mm / υποδ.= 0,1 mm / 1,0 mm = 0,1.

Η αρχή μέτρησης μήκους μέσω κλίμακας με βερνιέρο εξηγείται στο Σχήμα Β1.1. Οπως βλέπετε, τοποθετούμε το ένα άκρο του σώματος στο 0 της κύριας κλίμακας, η οποία εδώ έχει υποδιαιρέσεις χιλιοστών, και ύστερα σύρουμε τον βερνιέρο σταθεράς 0,1 μέχρι που το μηδέν αυτού να έλθει σε επαφή με το άλλο άκρο του σώματος. Προφανώς, στην περίπτωση αυτή, το μήκος του σώματος είναι μεταξύ των 2 mm και 3 mm της κύριας κλίμακας, δηλαδή (2,0 + x) mm. Ο βερνιέρος θα μας βοηθήσει να εκτιμήσουμε το κλάσμα x. Προς τούτο, παρατηρούμε και εντοπίζουμε τη χαραγή m του βερνιέρου που συμπίπτει, η βρίσκεται πλησιέστερα σε σύμπτωση, με μιά χαραγή της κύριας κλίμακας. Στη συνέχεια, απλά έχουμε x=$m \cdot \beta$. Στην περίπτωση του παραδείγματός μας στο Σχήμα Β1.1, βλέπετε οτι m = 7, συνεπώς το μήκος του σώματος είναι 2,7 mm. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου, υποθέστε ότι x=0,1 mm οπότε, επειδή η υποδιαίρεση του βερνιέρου είναι κατά 0,1 mm μικρότερη αυτής της κύριας κλίμακας, θα έχουμε σύμπτωση της χαραγής 1 του βερνιέρου με την χαραγή των 3 mm της κύριας κλίμακας, δηλαδή εδώ m=1. Αν το x ήταν 0,2 mm θα είχαμε σύμπτωση της χαραγής 2 του βερνιέρου με την χαραγή των 4 mm της κύριας κλίμακας, κ.ο.κ.

Διαστημόμετρο. Χρησιμοποιείται για την μέτρηση μικρών μηκών μέχρι 25 cm και παρέχει ακρίβεια συνήθως 0,1 mm. Εχει δύο κλίμακες: μία σταθερά (κύρια κλίμακα), που είναι υποδιαιρεμένη σε εκατοστά και χιλιοστά, και την κινητή κλίμακα του βερνιέρου. Εδώ θα περιγράψουμε βερνιέρο με 10 υποδιαιρέσεις.

Για τη μέτρηση του μήκους ενός σώματος με το διαστημόμετρο, τοποθετούμε το σώμα μεταξύ των σαγονιών του οργάνου και μετακινούμε το κινητό μέρος, ώστε τα δύο σαγόνια μόλις να εφάπτονται στις δύο πλευρές του σώματος. Η μέτρηση του μήκους διαβάζεται με τον ίδιο τρόπο που περιγράφτηκε στο Σχήμα Β1.1. Το ζευγάρι των σαγονιών Γ και Δ χρησιμεύει για να μετρήσουμε την εσωτερική διάμετρο ενός σωλήνα, το πάχος μιας τομής κ.λ.π. Με την προεξοχή Ε που συνδέεται με το κινητό μέρος του οργάνου βρίσκουμε το βάθος μιας τομής. Αν φέρουμε τα σαγόνια Α και Β σε επαφή, τότε η χαραγή 0 του βερνιέρου, πρέπει να συμπίπτει με τη χαραγή 0 της κύριας κλίμακας. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε το όργανο έχει ένα συστηματικό σφάλμα λόγω μετάθεσης του μηδενός και θα πρέπει οι μετρήσεις του οργάνου αυτού να διορθώνονται κατάλληλα. Εχει συστηματικό σφάλμα το διαστημόμετρο που χρησιμοποιείτε και αν ναι, είναι προσθετικό η αφαιρετικό της τιμής που μετράτε; Ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα στην περίπτωση του διαστημομέτρου σας;

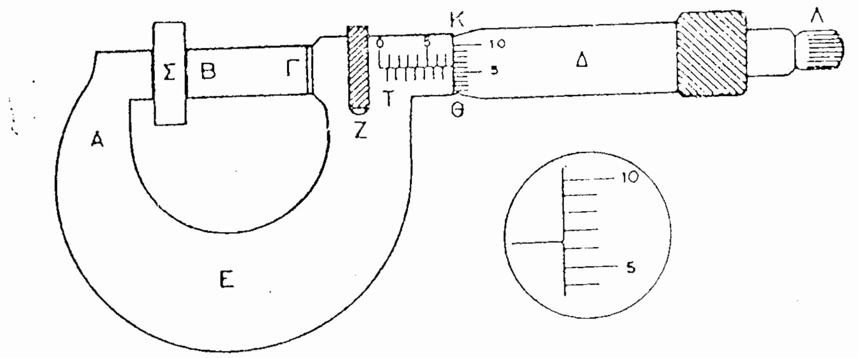


Σχήμα Β1.2. Διαστημόμετρο

<u>**Μικρόμετρο.**</u> Το όργανο απεικονίζεται στο Σχήμα Β1.3. Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση αντικειμένων πάχους μέχρι 25 mm και παρέχει ακρίβεια 0,01 mm. Στο ακίνητο μέρος του οργάνου, που ονομάζεται στέλεχος, είναι χαραγμένη η κύρια κλίμακα σε υποδιαιρέσεις των 0,50 mm, ενώ το τύμπανο Δ είναι υποδιαιρεμένο σε 50 υποδιαιρέσεις. Το τύμπανο περιστρέφεται και βιδώνει στο στέλεχος, μετακινώντας έτσι τη ράβδο ΒΓ.

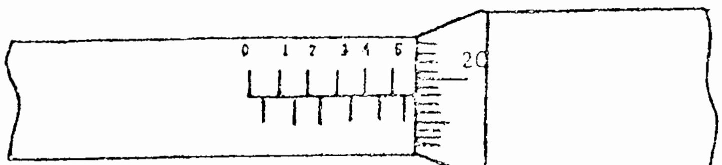
Η αρχή λειτουργίας είναι η εξής: Οταν το τύμπανο περιστρέφεται μια φορά προκαλεί μετακίνηση του άκρου Β κατά 0,50 mm, δηλαδή απόσταση ίση με το βήμα του κοχλία του τυμπάνου. Εφόσον για 50 υποδιαιρέσεις του τυμπάνου (μία περιστροφή) το άκρο Β μετακινείται κατά 0,50 mm, η μετακίνηση που αντιστοιχεί σε μια υποδιαίρεση της κλίμακας του τυμπάνου είναι 0.01 mm, που είναι και το μικρότερο μήκος που μπορεί να μετρηθεί με το μικρόμετρο.

Η μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου διαβάζεται πρώτα στην κλίμακα του στελέχους, μέχρι ακέραιο ή μισό χιλιοστό, και στη συνέχεια η ένδειξη της κλίμακας του τυμπάνου, που διαβάζεται με αναφορά την οριζόντια γραμμή πάνω στο στέλεχος, δίνει τα εκατοστά του χιλιοστού, που πρέπει να προστεθούν στην πρώτη ένδειξη. Ενα παράδειγμα μέτρησης δίνεται στο σχήμα Β1.4.



Σχήμα Β1.3. Μικρόμετρο

Χρησιμοποιείστε λίγα λεπτά για να μάθετε την χρήση του μικρομέτρου. Π.χ. μετρείστε το πάχος : του μολυβιού σας, ενός εικοσάρικου, μιας ή δύο σελίδων ενός βιβλίου σας κ.λ π. Κάθε μέλος της ομάδας ας επαναλάβει ξεχωριστά τις μετρήσεις για σύγκριση. Εξετάστε αν έχει συστηματικό σφάλμα το όργανο. Αν έχει πόσο είναι; Ποιό είναι το μέγιστο σφάλμα οργάνου;



Σχήμα Β1.4. Παράδειγμα ανάγνωσης μικρομέτρου : (5,50+0,18) mm = 5,68 mm

<u>Προσοχή</u> : Ποτέ μη βιδώνετε σφικτά τα σαγόνια του μικρομέτρου. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει μόνιμη βλάβη, και συνεπώς συστηματικό σφάλμα. Για τη προστασία του οργάνου, χρησιμοποιείτε πάντα για το σφίξιμο των σαγονιών τον κοχλία Δ.

Πειραματικό μέρος

Ο σκοπός του πειράματος, είναι να εφαρμόσετε τα προηγούμενα και τις αρχές υπολογισμού σφαλμάτων σ'ένα απλό πρόβλημα μέτρησης της πυκνότητας ενός κυλινδρικού σώματος από αλουμίνιο (Al). Ακολουθείστε την παρακάτω διαδικασία.

1) Χρησιμοποιείστε το ζυγό που παρέχεται και μετρείστε τη μάζα του κυλίνδρου. Εκτιμείστε το απόλυτο σφάλμα και γράψτε τη μέτρηση σαν $m \pm \Delta m$.

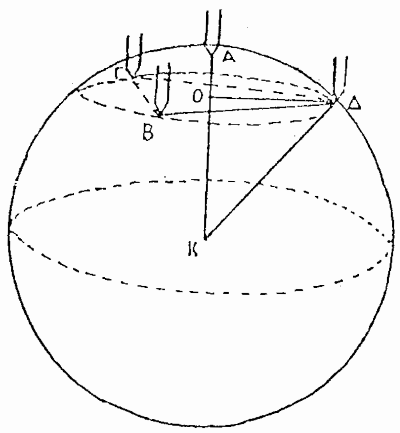
2) Μετρείστε το μήκος L του κυλίνδρου με το διαστημόμετρο και τη διάμετρο D με το μικρόμετρο αρκετές φορές (γύρω στις 10) σε διαφορετικά σημεία, ώστε να πάρετε διαφορετικές μετρήσεις (ο κύλινδρος έχει λειανθεί σκόπιμα σε διαφορα σημεία, ώστε να υπάρχει διαφορά στις μετρήσεις). Υπολογίστε το απόλυτο σφάλμα των μετρήσεών σας χρησιμοποιώντας το τυπικό σφάλμα μέσης τιμής. Συστηματοποιείστε μετρήσεις και υπολογισμούς χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα.

3) Υπολογίστε την πυκνότητα d του σώματος, και στη συνέχεια χρησιμοποιείστε τους κανόνες διάδοσης των σφαλμάτων στους υπολογισμούς (βλέπε Κεφάλαιο Α2.4) και καθορίστε το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα του d με την μέθοδο του μεγίστου δυνατού και πιθανού σφάλματος. Συγκρίνετε τις δύο αυτές εκτιμήσεις του σφάλματος.

4) Ποιά είνα η εκατοστιαία διαφορά της τιμής της πυκνότητας που βρήκατε σε σχέση με τη γνωστή τιμή; Είναι η τιμή σας αποδεκτή μέσα στα όρια του πειραματικού (μεγίστου δυνατού και πιθανού) σφάλματος;

<u>Ερώτηση.</u> Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα πείραμα χρειάζεται να μετρήσετε το μήκος ενός τραπεζιού, που είναι περίπου 3 m. Ποιό θα είναι το σχετικό σφάλμα στη τιμή του μήκους αν χρησιμοποιήσετε γιά την μέτρηση ένα κανόνα μήκους 1 m και ποιό με ένα υποδεκάμετρο μήκους 10 cm; Λάβετε υπ'όψη ότι κάθε μέτρηση (με τον κανόνα ή το υποδεκάμετρο), έχει ακρίβεια όση και το μέγιστο σφάλμα οργάνου, δηλαδή 1 mm.

Σφαιρόμετρο. Το σφαιρόμετρο χρησιμεύει για την μέτρηση της ακτίνας καμπυλότητας σφαιρικών επιφανειών. Το όργανο στηρίζεται σε τρείς ακτίνες που σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Η πλευρά του τριγώνου είναι d = 50 mm, ενώ η απόσταση του κέντρου από τις κορυφές είναι $a = 50\ \mathrm{mm}/\sqrt{3} = 28{,}9\ \mathrm{mm}$. Υπάρχει επίσης, ένας μικρομετρικός κοχλίας στο κέντρο του οργάνου που καταλήγει σε μια κεντρική ακίδα. Ο κοχλίας έχει σταθερό βήμα 0,5 mm και έχει προσαρμοσμένο ένα κυκλικό βερνιέρο με 500 υποδιαιρέσεις, ώστε κάθε υποδιαίρεση ισούται me 0,001 mm. Ο δίσκος περιστρέφεται μπροστά σε μια κατακόρυφη κλίμακα (κύρια κλίμακα) με υποδιαιρέσεις mm.



Σχήμα Β1.5. Μέτρηση με σφαιρόμετρο

Το όργανο έχει θετικές και αρνητικές υποδιαιρέσεις στην κύρια κλίμακα για μετρήσεις κυρτών και κοίλων επιφανειών αντίστοιχα. Η ανάγνωση του βερνιέρου γίνεται όπως στο μικρόμετρο. Αν υπάρχει μετάθεση στο μηδέν υπολογίζεται αφού τοποθετήσουμε το όργανο σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια

Για τη μέτρηση της ακτίνας καμπυλότητας το όργανο τοποθετείται επάνω στη σφαιρική επιφάνεια. Αν η ανάγνωση είναι l, τότε σύμφωνα με το Σχήμα Β1.5 η ακτίνα ΚΔ=R δίνεται από την σχέση

$$R = \frac{l}{2} + \frac{1}{6}\frac{d^2}{l}$$

όπου l = ΟΑ και d = ΒΔ = ΒΓ = ΓΔ. Μετρείστε την ακτίνα καμπυλότητας των σφαιρικών επιφανειών που σας δίνονται και εκτιμείστε το σφάλμα. Εξετάστε αν υπάρχει μετάθεση του μηδενός και πόση είναι.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Ολη η ανάλυση της άσκησης Β1 μπορεί να γίνει με ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή. Το πρόγραμμα αυτό θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα :

1) Είσοδο των στοιχείων (μετρήσεων) για κάθε μια μεταβλητή ξεχωριστά. Δηλαδή, για τη m, D, L και του αντίστοιχου αριθμού μετρήσεων καθώς και των μεγίστων σφαλμάτων των οργάνων (Μ.Σ.Ο.).

2) Υπολογισμούς μέσων τιμών για $\overline{m}$, $\overline{D}$, $\overline{L}$, της πυκνότητας $\overline{d}$ και της % διαφοράς της μέσης τιμής $\overline{d}$ με τη γνωστή τιμή της πυκνότητας.

3) Υπολογισμός απολύτων σφαλμάτων των μετρουμένων ποσοτήτων με τη μέθοδο της :

α) τυπικής απόκλισης

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

β) μέσης απόκλισης

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|\overline{x} - x_i|}{n}$$

γ) τυπικής απόκλισης μέσης τιμής

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

4) Σύγκριση των s, $\overline{\Delta x}$, $s_{\overline{x}}$ και Μ.Σ.Ο. και εξίσωση του μεγαλύτερου απ'αυτά με το απόλυτο σφάλμα.

5) Υπολογισμός του σφάλματος στην πυκνότητα Δd με τη μέθοδο του :

α) Μεγίστου Δυνατού σφάλματος

$$\frac{\Delta d}{\overline{d}} = \frac{\Delta m}{\overline{m}} + 2\frac{\Delta D}{\overline{D}} + \frac{\Delta L}{\overline{L}}$$

β) Πιθανού σφάλματος

$$\frac{\Delta d}{\overline{d}} = \sqrt{(\frac{\Delta m}{\overline{m}})^2 + 4(\frac{\Delta D}{\overline{D}})^2 + (\frac{\Delta L}{\overline{L}})^2}$$

6) Εξοδος δεδομένων εισόδου και αποτελεσμάτων.

Προσοχή: Θα πρέπει να λάβετε πρόνοια στο πρόγραμμά σας, ώστε τα αποτελέσματά σας που θα εμφανιστούν στην εκτύπωση να έχουν τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, όπως αυτός καθορίζεται από τις μετρήσεις σας.

Παράδειγμα εξόδου (σε αρχείο η στην οθόνη) του προγράμματος

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΑΣΚΗΣΗ Β1 : ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	ΜΑΖΑ	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ	ΜΗΚΟΣ
1			
2			
⋮	⋮	⋮	⋮

ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΟΡΓΑΝΩΝ

1) ΖΥΓΟΥ (gr)=

2) ΔΙΑΣΤΗΜΟΜΕΤΡΟΥ (mm)=

3) ΜΙΚΡΟΜΕΤΡΟΥ (mm)=

ΓΝΩΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ (kg/m^3)=

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΠΟΣΟΤΗΤΑ	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	s	$\overline{\Delta x}$	$s_{\bar{x}}$
ΜΑΖΑ				
ΜΗΚΟΣ				
ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ				

ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΑΜΕΣΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΜΑΖΑ =

ΜΗΚΟΣ =

ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ =

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ=

ΕΚΑΤΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΗ ΤΙΜΗ =

ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΣΤΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ

1) ΜΕΓΙΣΤΟ ΔΥΝΑΤΟ ΣΦΑΛΜΑ =

2) ΠΙΘΑΝΟ ΣΦΑΛΜΑ =

B2. Σημασία Παραγώγου και Ολοκληρώματος

Ο σκοπός αυτού του εργαστηρίου είναι να βοηθήσει στη κατανόηση της φυσικής σημασίας της παραγώγου και του ολοκληρώματος μέσω της επεξεργασίας και ανάλυσης των μετρήσεων ενός πειράματος, οι οποίες παρέχονται στον φοιτητή. Επίσης, η άσκηση αυτή προσφέρει την δυνατότητα εξοικείωσης με την ανάλυση πειραματικών δεδομένων και ιδιαίτερα τη κατασκευή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Σημειώστε οτι πρέπει να γνωρίζετε την ύλη του κεφαλαίου A3 και A4 πριν προχωρήσετε στήν εκτέλεση της άσκησης.

Μέρος Α

Θα θεωρήσουμε την κίνηση ενός μικρού σφαιρικού σώματος ακτίνας r, π.χ. μια μικρή μεταλλική σφαίρα που πέφτει με ταχύτητα $\vec{v}$ σε ενα υγρό, η μια σχεδόν σφαιρική σταγόνα βροχής που πέφτει στον αέρα. Κατά την κίνησή της η σφαίρα δέχεται μια δύναμη τριβής $\vec{F}$ που δίνεται από τον νόμο του Stokes

$$\vec{R} = -6\pi\eta r\vec{v} = -k\vec{v} \tag{1}$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού και $k = 6\pi\eta r$.

Οι δυνάμεις που εξασκούνται στη μικρή σφαίρα είναι το βάρος της $\vec{\mathrm{B}}$, η άνωση $\vec{A}$ και η δύναμη τριβής η οποία σε πρώτη προσέγγιση είναι ανάλογος της ταχύτητας, $k\vec{v}$. Εάν η θετική διεύθυνση x είναι στη φορά της κίνησης, τότε

$$\sum F_x = B - A - kv = ma, \tag{2}$$

όπου a είναι η επιτάχυνση και m η μάζα της σφαίρας. Στην αρχή της κίνησης, η δύναμη τριβής και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν έτσι ώστε η αρχική επιτάχυνση να είναι θετική και ίση με $a_0 = (B - A)/m$. Στη συνέχεια η σφαίρα επιταχύνεται και μετά από κάποιο χρόνο, όταν η ταχύτητα αυξηθεί αρκετά, η δύναμη τριβής γίνεται ίση με $(B - A)$, έτσι ώστε η ολική δύναμη που εξασκείται στη σφαίρα είναι μηδέν. Η επιτάχυνση τότε γίνεται φυσικά μηδέν και η ταχύτητα παίρνει μια τελική τιμή. Η μέγιστη ή οριακή αυτή τιμή της ταχύτητας βρίσκεται από την (2) όταν θέσουμε $a = 0$ και είναι

$$v_T = (B - A)/k \tag{3}$$

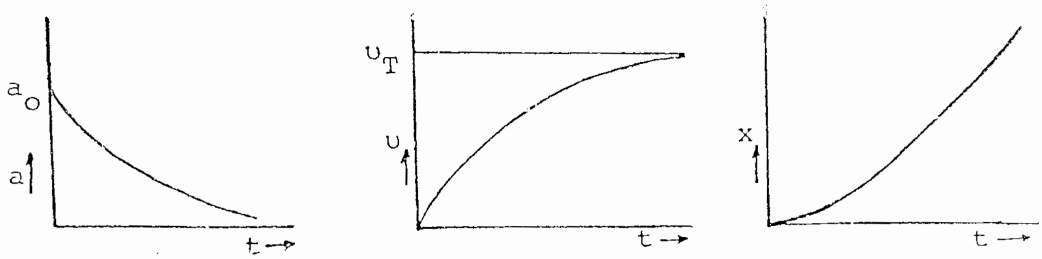
Για να εκφράσουμε την μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου στο διάστημα κατά το οποίο η σφαίρα δεν έχει ακόμη πάρει την οριακή ταχύτητα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2), από την οποία μετά από την αντικατάσταση του $a = dv/dt$ και $(B - A)/k = v_T$ έχουμε

$$\frac{dv}{v - v_{\mathrm{T}}} = -\frac{k}{m}dt. \tag{4}$$

Καιόπιν ολοκλήρωσης της (4) και αφού λάβουμε υπ'όψη ότι $v = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, έχουμε

$$v = v_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \tag{5}$$

Από την (4) στην (5) παραλείπονται ορισμένα ενδιάμεσα βήματα τα οποία πρέπει να συμπληρώσει ο φοιτητής.



Σχήμα Β2.1. Μεταβολή της μετατόπισης x, της ταχύτητας v και της επιτάχυνσης a συναρτήσει του χρόνου t, για μια μικρή σφαίρα που πέφτει ελεύθερα σε ένα ρευστό.

Διαφορίζοντας και ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5) μπορούμε αντίστοιχα να βρούμε την επιτάχυνση

$$a = v_T\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{6}$$

και την μετατόπιση της σφαίρας

$$x = v_T[t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)] \tag{7}$$

σαν συνάρτηση του χρόνου (οι αναλυτικές πράξεις που καταλήγουν στις εκφράσεις για τα a και x θα πρέπει να παρουσιασθούν από το φοιτητή στη γραπτή του αναφορά. Το

Σχήμα B2.1 περιέχει τρία διαγράμματα που παριστάνουν την μεταβολή της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σφαίρας συναρτήσει του χρόνου.

Μέρος B

Εδώ θα ασχοληθούμε με την έννοια της παραγώγου. Εχοντας υπ' όψη την παραπάνω περιγραφή, υποθέτουμε ότι μέσω μιας ακριβούς μεθόδου (π.χ. με ειδική φωτογραφική συσκευή) αποτυπώνεται και μετράται η θέση της σφαίρας x από την επιφάνεια του ρευστού, καθώς πέφτει. Οι μετρήσεις που παίρνουμε δίνονται στον Πίνακα I που περιλαμβάνει πρόσθετες στήλες για υπολογισμούς που θα γίνουν παρακάτω.

Επιλέγοντας τις κατάλληλες κλίμακες, απεικονίστε τα δεδομένα του πίνακα I σε γραμμικό χαρτί και περάστε μέσα από αυτά μια ομαλή καμπύλη (συγκρίνετε το διάγραμμα της 'μετατόπισης - χρόνου' με το αντίστοιχο στο Σχήμα B2.1).

Η μέση ταχύτητα στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, μεταξύ t_1 και t_2, όπου η μετατόπιση έχει μεταβληθεί από x_1 σε x_2, ορίζετα από την σχέση

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{8}$$

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα I, να βρεθεί η μέση ταχύτητα στη διάρκεια του 1ου διαστήματος του 1 s, του 1ου διαστήματος των 10 s, του 1ου διαστήματος των 20 s και του 2ου των 10 s.

Η στιγμιαία ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί ίση με τη τιμή της μέσης ταχύτητας, όταν το χρονικό διάστημα γίνει πάρα πολύ μικρό. Σαν παράδειγμα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 10$ s, από τα δεδομένα του Πίνακα I. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα I, συμπληρώστε τον πίνακα II και κατασκευάστε το διάγραμμα της μέσης ταχύτητας $\overline{v}$ σαν συνάρτηση του χρονικού διαστήματος $\Delta t = 0$. Ποιά είναι περίπου η τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = 10$ s;

Με την γραφική μέθοδο αυτή υπολογίστηκε η τιμή που προσεγγίζει η μέση ταχύτητα $\overline{v}$ όταν Δt προσεγγίζει το μηδέν. Αυτό ονομάζεται όριο του $\overline{v}$ όταν Δt προσεγγίζει το 0 και είναι ο μαθηματικός ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας, δηλαδή

$$v = \lim_{Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{9}$$

Η Εξίσωση (9) αντιπροσωπεύει τον ορισμό της παραγώγου του x ως προς t. Η παράγωγος αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας (ή την στοιχειώδη μεταβολή στον χρόνο ή χώρο οποιασδήποτε άλλης φυσικής ποσότητας), και αυτό αποτελεί την πιο θεμελιώδη της σημασία.

Πίνακας Ι

Χρόνος t, (s)	Μετατόπιση x, (m)	$\Delta x = x_2 - x_1$ (m)	Ταχύτητα v, (m/s)	Επιτάχυνση a, (m/s^2)
0,0	0,0000			
1,0	0,0064			
2,0	0,0249			
3,0	0,0544			
4,0	0,0937			
5,0	0,1420			
6,0	0,1984			
7,0	0,2621			
8,0	0,3324			
9,0	0,4088			
10,0	0,4905			
11,0	0,5772			
12,0	0,6683			
13,0	0,7633			
14,0	0,8621			
15,0	0,9641			
16,0	1,0680			
17,0	1,1769			
18,0	1,2871			
19,0	1,3994			
20,0	1,5137			

Πίνακας ΙΙ

t_1	t_2	Δt	Δx	$\overline{v}$
0,0	20,0			
4,0	16,0			
7,0	13,0			
8,0	12,0			
9,0	11,0			

Επειδή στο προηγούμενο παράδειγμα η ταχύτητα της σφαίρας μεταβάλλεται αργά, η μέση ταχύτητα για ένα διάστημα $\Delta t = 1$ s και η στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον αυτού του διαστήματος μπορούν να ληφθούν κατά προσέγγιση ίσες. Με βάση αυτό, συμπληρώστε τη στήλη του $\Delta x = x_2 - x_1$, και κατόπιν την στήλη της ταχύτητας από $t = 0{,}5$ μέχρι 19,5 s ανά 1 s. Στη συνέχεια, από το διάγραμμα 'μετατόπισης - χρόνου', μπορούμε να βρούμε την μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα από την κλίση της χορδής που περνά από τα σημεία που αντιστοιχούν στην αρχή και στο τέλος του διαστήματος αυτού. Η κλίση της γραμμής που περνά από δύο σημεία (t_1, x_1) και (t_2, x_2) βρίσκεται από το πηλίκο $\Delta x/\Delta t$ αφού μετρηθούν οι αποστάσεις $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta t = t_2 - t_1$ από το διάγραμμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κλίση της γραμμής στην περίπτωση αυτή, δεν είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας, που σχηματίζει η γραμμή με τον οριζόντιο άξονα (γιατί;). Στη συνέχεια φέρτε τη χορδή που περνά από τα σημεία $t_1 = 4$ και $t_2 = 16$ s, υπολογίστε την κλίση και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την αντίστοιχη τιμή του Πίνακα ΙΙ. Κατόπιν φέρτε την εφαπτομένη στο σημείο $t =$ 10 s και υπολογίστε την κλίση της. Συγκρίνετε την τιμή της κλίσης με την προηγούμενη τιμή που βρήκατε από το διάγραμμα ($\overline{v}$, Δt) για την μέση ταχύτητα όταν $\Delta t \to 0$ (υπολογίστε την εκατοστιαία διαφορά). Ποιά είναι η σχέση της στιγμιαίας ταχύτητας και της κλίσης της εφαπτομένης;

Χρησιμοποιείστε το ίδιο χαρτί, που απεικονίσατε την μεταβολή της θέσης x, και κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας σαν συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιώντας διαφορετική κλίμακα για τον άξονα των τεταγμένων στο δεξιό μέρος του χαρτιού. Η χρονική μεταβολή της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση. Η μέση επιτάχυνση σε ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, στο οποίο η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\Delta v = v_2 - v_1$, είναι

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{10}$$

Οπως και η στιγμιαία ταχύτητα, έτσι και η στιγμιαία επιτάχυνση ορίζεται, σαν το όριο της μέσης επιτάχυνσης, όταν το χρονικό διάστημα προσεγγίζει το μηδέν, δηλαδή

$$a = \lim_{\Delta t - 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{11}$$

Υποθέτοντας ότι το διάστημα του ενός δευτερολέπτου είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε η μέση επιτάχυνση στο διάστημα αυτό να δίνει μια καλή προσέγγιση της στιγμιαίας επιτάχυνσης a στο μέσο του χρονικού διαστήματος, συμπληρώστε την τελευταία στήλη του Πίνακα Ι από t = 1,0 s έως t =19,0 s. Στη συνέχεια απεικονίστε την επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιώντας τώρα μιά νέα κλίμακα στο ίδιο χαρτί όπου έχετε απεικονίσει την μετατόπιση και ταχύτητα. Συγκρίνετε την γραφική παράσταση με την επιτάχυνση της σφαίρας στο Σχήμα Β2.1.

Σαν ανακεφαλαίωση, αναφέρουμε ότι το όριο της εξίσωσης (9) παριστά την παράγωγο και αφορά τον καθορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας v, αν η μετατόπιση x είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Οπως γνωρίζετε, στα μαθηματικά αυτό εκφράζεται σαν

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t - 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v. \tag{12}$$

Ομοια, η στιγμιαία επιτάχυνση είναι

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t - 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a. \tag{13}$$

Βλέπουμε ότι, η ανάλυση και γραφικές παραστάσεις που έγιναν πιο πάνω σκοπό είχαν να δώσουν με ένα αναγωγικό τρόπο τη σημασία της έννοιας της παραγώγου.

Μέρος Γ

Τώρα θα εργασθούμε αντίστροφα σε μιά προσπάθεια να κατανοήσουμε την έννοια της ολοκλήρωσης, δηλαδή θα ξεκινήσουμε απο την επιτάχυνση γιά να υπολογίσουμε την ταχύτητα και μετατόπιση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εφόσον με μια συσκευή, ας την πούμε επιταχυνιόμετρο, μετρηθεί η επιτάχυνση της σφαίρας σαν συνάρτηση του χρόνου. Οι μετρήσεις του επιταχυντόμετρου δίνονται στον πίνακα III, που περιλαμβάνει πρόσθετες στήλες για υπολογισμούς που απαιτούνται παρακάτω. Χρησιμοποιώντας ένα νέο γραμμικό χαρτί διαγράμματος, απεικονίστε την επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου (δίνεται ότι την χρονική στιγμή $t = 0{,}0$ έχουμε $x = 0{,}0$).

Πίνακας III

Χρόνος t,(s)	Επιτάχυνση a,(m/s)	$\overline{a}\Delta t$ $m/s)$	Ταχύτητα υ,(m/s)	μετατόπιση x,(m)
0,0	0,01333			
1,0	0,01206			
2,0	0,01102			
3,0	0,00988			
4,0	0,00894			
5,0	0,00809			
6,0	0,00732			
7,0	0,00662			
8,0	0,00599			
9,0	0,00542			
10,0	0,00490			
11,0	0,00444			
12,0	0,00402			
13,0	0,00363			
14,0	0,00329			
15,0	0,00298			
16,0	0,00268			
17,0	0,00244			
18,0	0,00220			
19,0	0,00200			
20,0	0,00180			

Από την εξίσωση (10), μπορούμε να βρούμε την μεταβολή στην ταχύτητα κατά την διάρκεια οποιουδήποτε χρονικού διαστήματος, δηλαδή

$$v_2 = v_1 + \overline{a}(t_2 - t_1). \tag{14}$$

Το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα III, για να καθορίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα. Βέβαια, ο πίνακας δίνει την στιγμιαία και όχι την μέση επιτάχυνση που χρειαζόμαστε. Είναι όμως δυνατόν, όπως είδαμε και προηγούμενα, να θεωρήσουμε κατά προσέγγιση (εφόσον το χρονικό διάστημα είναι μικρό), την μέση επιτάχυνση και την στιγμιαία επιτάχυνση στο μέσον του διαστήματος περίπου ίσες (θα πρέπει να ληφθεί υπ'όψη, ότι όταν επεξεργαζόμαστε πειραματικά δεδομένα, είναι ανάγκη να κάνουμε λογικές προσεγγίσεις γιατί, απλά, δεν υπάρχει άλλη εκλογή).

Στη συνέχεια σαν παράδειγμα θα βρούμε την μεταβολή της ταχύτητας στο διάστημα από t = 0,5 s έως t = 1,5 s. Παίρνουμε την μέση επιτάχυνση στο διάστημα αυτό να είναι ίση με τη στιγμιαία επιτάχυνση στο μέσον του διαστήματος (δηλαδή στο 1,0 s), η οποία είναι 0,01206 m/s^2. Ετσι σύμφωνα με την εξίσωση (14) η μεταβολή της ταχύτητας στο διάστημα αυτό είναι 0,01206 m/s. Κατά όμοιο τρόπο, η μεταβολή της ταχύτητας στο διάστημα 1,5 s έως 2,5 s είναι 0,01102 m/s, κ.ο.κ.

Το πρώτο διάστημα (από t = 0,0 s έως t = 0,5 s), απαιτεί ιδιαίτερη μεταχείριση, επειδή είναι το μισό σε σύγκριση με τα άλλα. Η στιγμιαία επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t = 0,5 s είναι περίπου ίση με τη μέση τιμή των μετρήσεων στα 0,0 s και στα 1,0 s, δηλαδή $\frac{1}{2}$ (0,01333 + 0,01206) m/s^2. Επίσης η στιγμιαία επιτάχυνση στο μέσον του χρονικού διαστήματος, δηλαδή t = 0,25 s, είναι περίπου η μέση τιμή της a τις χρονικές στιγμές t = 0,5 s και t =0,0 s. Επομένως η μέση επιτάχυνση στο διάστημα t = 0,0 s ως t =0,5 s είναι

$$\overline{a} \simeq \frac{3}{4}0.01333 + \frac{1}{4}0.01206 = 0.01302 m/s^2$$

έτσι ώστε η μεταβολή της ταχύτητας από t =0,0 s έως t = 0,5 s είναι 0,00651 m/s. Επειδή v = 0 όταν t = 0, αυτή είναι η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0,5 s. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας διαδοχικές μεταβολές στο v, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πραγματικές τιμές τις χρονικές στιγμές t = 1,5 s, t = 2,5 s, κ.ο.κ. Για το διάστημα μεταξύ t = 19,5 s και t =20,0 s, κάνουμε την ίδια διαδικασία όπως και για το t = 0,0 s μέχρι t = 0,5 s.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπολογίστε τις ταχύτητες και συμπληρώστε την αντίστοιχη στήλη του Πίνακα III. Κατόπιν, απεικονίστε την στιγμιαία ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου, στο ίδιο χαρτί με την επιτάχυνση, και συγκρίνετε την καμπύλη με την προηγούμενη που βρήκατε, με βάση τα δεδομένα της μετατόπισης του Πίνακας I.

Από την Εξίσωση (8) έχουμε για την μετατόπιση x,

$$x_2 = x_1 + \overline{v}(t_2 - t_1) \tag{15}$$

Η εξίσωση (15) είναι ανάλογη της Εξίσωσης (14) και ορίζει, ότι η μετατόπιση στο τέλος ενός διαστήματος χρόνου Δt είναι ίση με την μετατόπιση στην αρχή του διαστήματος συν το γινόμενο του Δt και της μέσης ταχύτητας $\overline{v}$ στο χρονικό αυτό διάστημα. Αν Δt είναι αρκετά μικρό, η μέση ταχύτητα μπορεί να τεθεί ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του χρονικού διαστήματος. Σαν παράδειγμα ας υπολογίσουμε την μετατόπιση x την χρονική στιγμή t = 2,0 s. Κατ'αρχή λαμβάνουμε την μέση ταχύτητα μεταξύ t = 0,0 s και t= 1,0 s να είναι ίση με την τιμή της ταχύτητας όταν t = 0,5 s, δηλαδή 0,00651 m/s. Η μετατόπιση την χρονική στιγμή t = 2,0 s, είναι σε m :

$$x_{t=2s} = 0,00651 + 0,01857 \cdot \Delta t = 0,02508.$$

Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο, υπολογίστε την μετατόπιση για κάθε ακέραιο δευτερόλεπτο και συμπληρώστε την αντίστοιχη στήλη του Πίνακα III. Συγκρίνετε δειγματοληπτικά (5 ως 6 τιμές) τις δύο στήλες των μετατοπίσεων στους Πίνακες I και III. Ποια είναι περίπου η μέση εκατοστιαία διαφορά; Ποιά είναι η μέση απόκλιση της εκατοστιαίας διαφοράς;

Από την προηγούμενη συζήτηση, βλέπουμε ότι η ολική μεταβολή της ταχύτητας σε ένα χρονικό διάστημα απο 0 ως t, μπορεί να υπολογισθεί με τεμαχισμό αυτού του διαστήματος σε πολλά ίσα διαστήματα που συμβολίζονται με Δt_i, πολλαπλασιασμού κάθε υποδιαστήματος με τη μέση τιμή της επιτάχυνσης a_i σ'αυτό το διάστημα και άθροισης όλων των γινομένων. Συμβολικά αυτή η διεργασία γράφεται

$$v_t = v_0 + \sum_{i=1}^{N} \overline{a_i} \Delta t_i \tag{16}$$

Αν η επιτάχυνση είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου, τα χρονικά διαστήματα, μπορεί να γίνουν πολύ μικρά, οπότε μιλάμε για το όριο της $\sum a_i \Delta t_i$ όταν $\Delta t_i \to 0$ και $N \to \infty$.

Ο συνήθης μαθηματικός συμβολισμός αυτής της διεργασίας είναι

$$\lim_{\Delta t \to 0, N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \overline{a_i} \Delta t_i = \int_0^t a dt$$

η οποία ως γνωστόν είναι το ολοκλήρωμα του a ως πρός το χρόνο. Σύμφωνα με αυτό η εξίσωση (16) γράφεται

$$v_t = v_0 + \int_0^t a dt. \tag{17}$$

ενώ, όμοια έχουμε για την μετατόπιση την χρονική στιγμή t

$$x_t = x_0 + \int_0^t v dt \tag{18}$$

Εν κατακλείδι, το ολοκλήρωμα είναι ένα άθροισμα γινομένων (εμβαδών).

Μέρος Δ : Ερωτήσεις

1) Από τις γραφικές παραστάσεις του Πίνακα Ι παρατηρείται, ότι τα σημεία στην περίπτωση της μετατόπισης, ακόμα και της ταχύτητας, συνιστούν μια αρκετά ομαλή καμπύλη, ενώ τα σημεία της επιτάχυνσης εμφανίζουν μια σχετική διασπορά. Μέ βάση την ανάλυση περί σφαλμάτων στο Κεφάλαιο Α2, εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

2) Τι θα περιμένατε να συμβεί στις υπολογιζόμενες τιμές της ταχύτητας εάν χρησιμοποιούσατε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα; Τι θα συνέβαινε στις επιταχύνσεις;

3) Χρησιμοποιείστε ένα ημιλογαριθμικό χαρτί και κατασκευάστε την γραφική παράσταση επιτάχυνσης–χρόνου, με βάση τα δεδομένα του Πίνακα ΙΙΙ. Τι είδους συναρτησιακή σχέση μπορείτε τα συμπεράνετε ότι υπαρχει μεταξύ της επιτάχυνσης και του χρόνου; Να εκφράσετε την σχέση αυτή μαθηματικά. Δίνεται ότι η σφαίρα έχει μάζα $m = 1.0$ g και ακτίνα $r = 0.5$ cm. Ζητείται να υπολογίσετε τον συντελεστή ιξώδους η του υγρού, χρησιμοποιώντας το ημιλογαριθμικό διάγραμμα της επιτάχυνσης. Νά βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα μέσω προσαρμογής καμπύλης με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Βιβλιογραφία

1) Berkeley Physics Laboratory, 2nd Edition, Mathematics and Statistics, MS-1.

2) Sears, Zemansky and Young, University Physics.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Με βάση την άσκηση B2 και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα I και III, κάνετε ένα πρόγραμμα το οποίο θα κάνει γραμμική παρεμβολή στοιχείων (linear interpolation), αριθμητική παραγώγιση και ολοκλήρωση. Προτείνεται να κάνετε πρώτα ένα βοηθητικό πρόγραμμα που μπορεί, με εύκολες τροποποιήσεις να το χρησιμοποιείτε και σε άλλες περιπτώσεις.

A) Βοηθητικό πρόγραμμα

Αυτό θα πρέπει να δέχεται μέσω του πληκτρολογίου τα δεδομένα του Πίνακα I για την μετατόπιση $(x_i, i = 1, 2 \cdots, N)$ και του Πίνακα III για την επιτάχυνση $(a_i, i = 1, 2 \cdots, N)$, τα οποία και θα αποθηκεύει σε δύο ξεχωριστά αρχεία (data files) τα οποία εν συνεχεία θα καλούνται από το κύριο πρόγραμμα.

B) Κύριο πρόγραμμα

Θα περιλαμβάνει υποπρογράμματα για τις ακόλουθες ενέργειες:

1) Θα διαβάζει από τα προηγούμενα αρχεία τα δεδομένα για την μετατόπιση και επιτάχυνση.

2) Θα κάνει γραμμική παρεμβολή m ισαπεχόντων στοιχείων μεταξύ t_i και t_{i+1}. (Βλέπε σχετική σημείωση στο τέλος).

3) Θα κάνει αριθμητική παραγώγιση χρησιμοποιώντας τα στοιχεία x_i και t_i για τον υπολογισμό:

α) της ταχύτητας $v_i = (x_i - x_{i+1})/(t_i - t_{i+1})$, $i = 2, 3, \cdots, n$ και $v_1 = 0.0000$ (Εδώ θεωρούμε ότι, για το μικρό χρονικό διάστημα Δt, μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να λάβουμε την ταχύτητα στο τέλος του χρονικού διαστήματος ίση με την μέση ταχύτητα στο Δt)

β) της επιτάχυνσης (δεύτερη παράγωγος) $a_i = (v_i - v_{i-1})/\Delta t = (x_i - 2x_{i-1} - x_{i-2})/\Delta t^2$ όπου $i = 3, 4, \cdots n$, $a_1 = 0$ και $\Delta t = t_{i+1} - t_1 = const.$. (Σημειώστε ότι ισχύουν πάλι τα ίδια που είπαμε προηγουμένως για την ταχύτητα).

4) Θα κάνει αριθμητική ολοκλήρωση (με τον κανόνα του τραπεζίου) με τα στοιχεία a_i, t_i, για τον υπολογισμό :

α) Της στιγμιαίας ταχύτητας την χρονική στιγμή $t = i\Delta t$

$$v_i = v_0 + \sum_{j=2}^{i} \frac{a_{j-1}+a_j}{2}(t_j - t_{j-1}), \qquad \text{όπου } i = 2, 3, \cdots, n$$

Δίνεται ότι $v_0 = v_1 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$.

β) Της μετατόπισης την χρονική στιγμή $t = i\Delta t$

$$x_i = x_0 + \sum_{j=2}^{i} \frac{v_{j-1}+v_j}{2}(t_j - t_{j-1}), \qquad \text{όπου } i = 2, 3, \cdots, n.$$

Δίνεται $x_0 = x_1 = 0$ την χρονική στιγμή $t_1 = 0$.

5) Εκτύπωση αποτελεσμάτων με FORMAT 5 δεκαδικών ψηφείων :

α) Με βάση τα δεδομένα x_i (μετατόπιση)

(Εκτύπωση σε στήλες: t_i, x_i, v_i, a_i ; $i = 1, 2, \cdots, n$)

β) Με βάση τα δεδομένα a_i (επιτάχυνση)

(Εκτύπωση σε στήλες: t_i, a_i, v_i, x_i ; $i = 1, 2, \cdots, n$)

Εκτός της εκτύπωσης βέβαια μπορείτε να κάνετε και διαγράμματα των v, a, στην πρώτη περίπτωση (παραγώγιση), και v_i, x_i στην δεύτερη περίπτωση (ολοκλήρωση), σαν συνάρτηση του χρόνου t με την βοήθεια ειδικής βιβλιοθήκης γραφικών.

Σημείωση : Γραμμική Παρεμβολή : Στο διάγραμμα $x = f(t)$ και $a = f(t)$, υποθέτουμε ότι μεταξύ t_i και t_{i+1} η μετατόπιση x και η επιτάχυνση a, μπορεί κατά προσέγγιση να θεωρηθεί ότι μεταβάλλονται γραμμικά. Τότε για μια θέση t_j μεταξύ t_i και t_{i+1}, η τιμή της συνάρτησης y_j (π.χ. x_j ή a_j) είναι

$$y_j = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}(t_j - t_i)$$

όπου $i = 1, 2, \cdots, N$ και $j = 1, 2, \cdots, i + m$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση λάβετε $m = 2$ και δημιουργείστε τις νέες σειρές στοιχείων t_i, x_i, a_i όπου $i = 1, 2, \cdots, n$ $(n = (m + 1)(N - 1) + 1)$.

B3. Μελέτη Στατικής Ισορροπίας

Η έννοια της ισορροπίας βασίζεται στον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, ή νομο της αδράνειας, που λέει ότι: *Ενα σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ομαλής κίνησής του (σε ευθεία γραμμή), εκτός αν βρίσκεται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων.* Οι όροι *ηρεμία* και *κίνηση*, είναι έννοιες σχετικές που έχουν σημασία μόνο για ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς (π.χ. το εργαστήριο βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση με κάποιο σύστημα αναφοράς στην επιφάνεια της γης, αλλά κινείται σε σχέση με κάποιο άλλο τοποθετημένο στην σελήνη).

Το αντικείμενο της *Στατικής* είναι η μελέτη των δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα και των συνθηκών ισορροπίας των. Το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται συνήθως στη στατική είναι στερεωμένο στην επιφάνεια της γης π.χ. το εργαστήριο. Στην γενική περίπτωση, όταν ένα σώμα βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες :

1) Το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα είναι μηδέν:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (1)$$

Αυτή είναι η <u>πρώτη συνθήκη ισορροπίας</u> η οποία επιβάλλει το σώμα να έχει γραμμική επιτάχυνση ίση με το μηδέν οπότε λέμε ότι βρίσκεται σε μεταφορική ισορροπία (translational equilibrium).

2) Το άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο Α του σώματος είναι μηδέν:

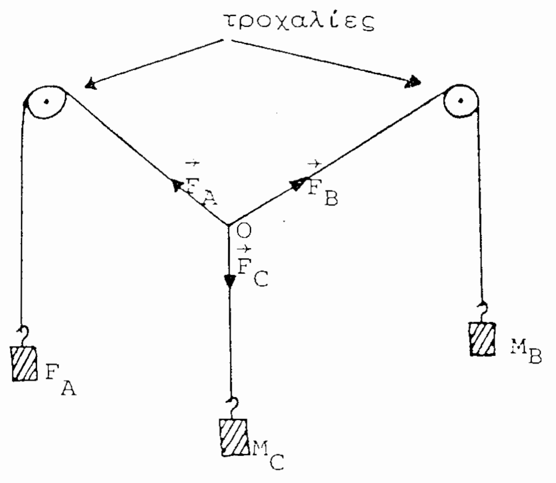
$$\sum \vec{T}_A = 0 \qquad (2)$$

Αυτή είναι η <u>δεύτερη συνθήκη ισορροπίας</u> που επιβάλλει για το σώμα γωνιακή επιτάχυνση ίση με μηδέν έτσι ώστε να βρίσκεται σε περιστροφική ισορροπία (rotational equilibrium).

Οι δύο παραπάνω συνθήκες αποτελούν σύστημα εξισώσεων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που ένα σώμα βρίσκεται σε στατική ισορροπία για τον υπολογισμό αγνώστων δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα. Στο παρόν εργαστήριο, θα εξετάσουμε πειραματικά τις συνθήκες ισορροπίας στην περίπτωση συντρεχουσών (concurrent) και μη συντρεχουσών (nonconcurrent), συνεπιπέδων δυνάμεων.

Ισορροπία συνεπιπέδων και συντρεχουσών δυνάμεων

Αν ένα σώμα βρίσκεται υπό την επίδραση τριών συνεπιπέδων και μη παραλλήλων δυνάμεων σε ισορροπία, τότε πρέπει οι δυνάμεις αυτές να είναι συντρέχουσες (δηλαδή οι φορείς τους να περνούν από το ίδιο σημείο). Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή, υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ και $\vec{F_3}$ ενεργούν στα σημεία Α,Β και Γ του σώματος. Αν προεκτείνουμε τους φορείς των δύο δυνάμεων π.χ. των $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ μέχρι το κοινό σημείο τομής Δ, είναι φανερό ότι οι τρείς δυνάμεις μπορεί να αντικατασταθούν από την συνισταμένη $\vec{F_{12}}$ των $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$, και την τρίτη δύναμη $\vec{F_3}$. Αλλά τότε για να παραμένει το σώμα σε ισορροπία θα πρέπει η δύναμη $\vec{F_3}$ να είναι ίση και αντίθετη της $\vec{F_{12}}$. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι φορείς των δυνάμεων αυτών συμπίπτουν.



Σχήμα Β3.1 Ισορροπία τριών συντρεχουσών και συνεπιπέδων δυνάμεων

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το <u>θεώρημα ισορροπίας τριών δυνάμεων</u> : *Τρείς δυνάμεις που είναι συνεπίπεδοι και μη παράλληλοι ισορροπούν τότε μόνο όταν οι φορείς τους περνούν από το ίδιο σημείο και το διανυσματικό τους άθροισμα είναι ίσο με μηδέν.* Αρα, στην περίπτωση τριών ή περισσοτέρων συνεπιπέδων και συντρεχουσών δυνάμεων, η Εξίσωση (1) είναι η μόνη αναγκαία και ικανή συνθήκη ισορροπίας (Γιατί;).

Στο πείραμα χρησιμοποιούνται τρία διαφορετικά βάρη για να δώσουν τρείς συνεπίπεδες και συντρέχουσες δυνάμεις, όπως δείχνει το σχήμα Β3.1 Παρατηρείστε ότι το σημείο τομής των δυνάμεων Ο βρίσκεται σε ηρεμία. Το αντικείμενο του πειράματος είναι η επιβεβαίωση του 1ου νόμου του Νεύτωνα, δηλαδή να αποδειχθεί ότι στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των τριών δυνάμεων είναι μηδέν.

Πειραματική διαδικασία και ανάλυση. Κρεμάστε τρία βάρη στα άκρα των σχοινιών ώστε να πάρετε τις τρείς δυνάμεις $\vec{F_A}$, $\vec{F_B}$ και $\vec{F_C}$ σύμφωνα με το Σχήμα Β3.1. Κατόπιν στερεώστε ένα φύλλο χαρτιού στον ξύλινο πίνακα, έτσι ώστε το σημείο Ο να βρίσκεται κοντά στο μέσο του χαρτιού. Προβάλλετε το σημείο εφαρμογής Ο και τους φορείς των τριών δυνάμεων στο χαρτί και στη συνέχεια προχωρήστε στην ανάλυση. Για την απλοποίηση της ανάλυσης, χρησιμοποιείστε το σημείο Ο σαν την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και ευθυγραμμίστε τον άξονα των y με την κατεύθυνση της κατακόρυφης δύναμης $\vec{F_C}$. Τα μέτρα των τριών διανυσμάτων θα πρέπει να εκφραστούν σε Ν και να απεικονισθούν στο χαρτί με κατάλληλη κλίμακα.

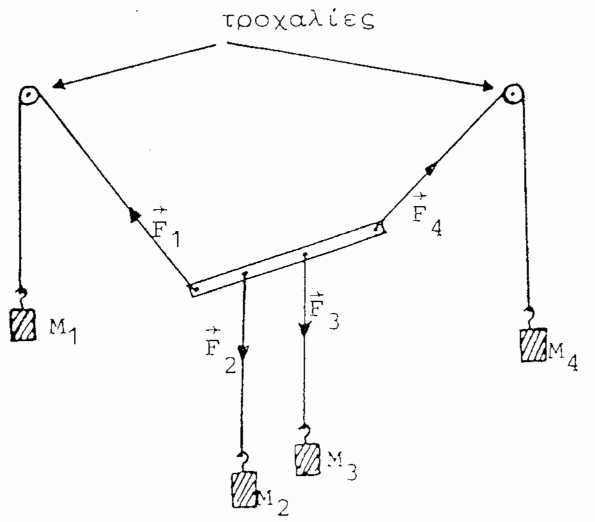
Για να αποδείξετε ότι $\sum \vec{F} = 0$ θά εργαστείτε γραφικά και αναλυτικά. Στην περίπτωση της γραφικής μεθόδου, προσθέστε διανυσματικά τις δύο δυνάμεις, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Για καλύτερη ακρίβεια, χρησιμοποιείστε τη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα που σας επιτρέπει το χαρτί σας. Ποιό είναι το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης; Στην περίπτωση της αναλυτικής μεθόδου μετρείστε τις γωνίες που σχηματίζουν οι δυνάμεις $\vec{F_A}$ και $\vec{F_B}$ με τον άξονα x και υπολογίστε τις συνιστώσες των τριών διανυσμάτων. Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπ'όψη ότι η συνισταμένη δίνεται από τη σχέση

$$\vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y} = (\vec{F_{Ax}} + \vec{F_{Bx}} + \vec{F_{Cx}}) + (\vec{F_{Ay}} + \vec{F_{By}} + \vec{F_{Cy}})$$

υπολογίστε το μέτρο και τη φορά της συνισταμένης $\vec{R}$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων. Χρησιμοποιείστε μια μέθοδο και υπολογίστε το απόλυτο σφάλμα του $|\vec{R}|$ στην περίπτωση της αναλυτικής μεθόδου (δίνεται ότι το σχετικό σφάλμα στις μάζες που χρησιμοποιείτε είναι 1%). Τι συμπέρασμα βγάζετε για την ισχύ του νόμου του 1ου νόμου του Νεύτωνα; Ισχύει μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος?

Στατική ισορροπία μη συντρεχουσών δυνάμεων

Στο πείραμα αυτό πρόκειται να χρησιμοποιηθούν και οι δύο συνθήκες ισορροπίας, που εκφράζονται από τις Εξισώσεις (1) και (2), για να υπολογισθεί το μέτρο, η διεύθυνση, και το σημείο εφαρμογής μιας άγνωστης δύμαμης που ενεργεί μαζί με άλλες γνωστές δυνάμεις σε ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ισορροπία. Τέσσερις διαφορετικές μάζες, χρησιμοποιούνται για να δώσουν τις 4 δυνάμεις που εξασκούνται σε διαφορετικά σημεία ενός μεταλλικού ελάσματος σύμφωνα με το Σχήμα Β3.2



Σχήμα Β3.2 Ισορροπία συνεπιπέδων και μή συντρεχουσών δυνάμεων

Πειραματική διαδικασία και ανάλυση. Κρεμάστε 4 γνωστές μάζες από τη έλασμα, όπως στο Σχήμα Β3.2. Προσαρμόστε ένα χαρτί στον κατακόρυφο ξύλινο πίνακα που είναι στερεωμένες οι τροχαλίες και προβάλετε, χρησιμοποιώντας ένα τρίγωνο ή οτιδήποτε άλλο νομίζετε κατάλληλο, την περίμετρο της ράβδου και τις διευθύνσεις των τεσσάρων σκοινιών που αντιπροσωπεύουν τους φορείς των δυνάμεων. Βρείτε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων και απεικονίστε τα διανύσμαια χρησιμοποιώντας κατάλληλη κλίμακα.

Τραβήξτε τη γραμμή που συνδέει τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων και χρησιμοποιείστε τη γραμμή αυτή σαν τον άξονα x, ενός συστήματος αναφοράς (x, y). Σημειώστε ότι η εκλογή του αξονα των x είναι πλεονεκτική μόνο στην συγκεκριμένη περίπτωση [1].

[1] Γενικά, η εκλογή των ορθογωνίων αξόνων γίνεται, έτσι ώστε πάνω σ'αυτούς να βρισκονται οι περισσότε-

Μετρώντας τις διάφορες γωνίες που χρειάζεστε, αναλύστε κάθε μία από τις 4 δυνάμεις σε συνιστώσες και υπολογίστε τη συνισταμένη τους (μέτρο και διεύθυνση). Γιατί η συνισταμένη δύναμη δεν είναι μηδέν;

Στη συνέχεια υπολογίστε την ροπή κάθε μιας δύναμης ως πρός ένα κατάλληλα επιλεγμένο σημείο και κατόπιν την συνισταμένη ροπή που επιδρά στην ράβδο. Αν η ροπή αυτή είναι διάφορη από το μηδέν θα πρέπει να προκαλέσει περιστροφική κίνηση της ράβδου. Γιατί δεν γίνεται αυτό;

Υπολογίστε το μέτρο, τη διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής της δύναμης εκείνης, που απαιτείται για να διατηρήσει τη ράβδο σε στατική ισορροπία. Συγκρίνετε (ποσοτικά) τη δύναμη αυτή με το μέτρο, τη διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής του βάρους του ελάσματος. Τι συμπεραίνετε; Τέλος, Σκεφτόμενοι μια κατάλληλη μέθοδο υπολογίστε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα, στο μέτρο, την διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης.

Βιβλιογραφία

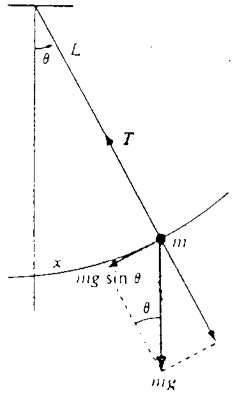
Alonso and Finn, mechanics I, Κεφ. 4.1 έως 4.10.

Halliday and Resnick, Φυσική, Μέρος Α, Κεφ. 14.1 έως 14.5.

ρες δυνάμεις. Οι προβολές των δυνάμεων δεν γίνονται στούς αρχικούς άξονες, αλλά σε παράλληλους προς αυτούς νοητούς άξονες, που διέρχονται από το σημείο εφαρμογής κάθε δύναμης. Η εκλογή του σημείου ή άξονα, ως προς τον οποίο εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών, γίνεται έτσι ώστε από αυτό να περνούν, όσο το δυνατόν περισσότερες άγνωστες δυνάμεις.

B4. Απλή Αρμονική Κίνηση. Απλό Εκκρεμές

Το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από ένα υλικό σημείο μάζας m, που εξαρτάται από ένα αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους L. Οταν η μάζα μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας της και αφεθεί ελεύθερη αρχίζει να αιωρείται υπό την επίδραση του βάρους της. Για να εκτελεί το εκκρεμές απλή αρμονική κίνηση απαιτείται όπως η δύναμη επαναφοράς που ενεργεί επί της μάζας m να είναι ανάλογη της απομάκρυνσης, από την θέση ισορροπίας και να έχει αντίθετη φορά απ'αυτή, δηλ. $\vec{F} = -k\vec{x}$.



Σχήμα B4.1 : Διάταξη απλού εκκρεμούς

Οι δυνάμεις που επιδρούν στη μάζα m του εκκρεμούς, όταν αυτή είναι μετατοπισμένη κατά γωνία θ από τη θέση ισορροπίας, είναι η τάση νήματος $\vec{T}$ και το βάρος $m\vec{g}$ (βλέπε Σχήμα B4.1). Η δύναμη κατά μήκος του τόξου ακτίνας L, στο οποίο κινείται η μάζα m, έχει μέγεθος $mgsin\theta$ και φορά αντίθετη της μετατόπισης θ. Δηλαδή το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι

$$F = -mg\sin\theta. \tag{1}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση η κίνηση δεν είναι απλή αρμονική γιατί η δύναμη F δεν είναι ανάλογη της μετατόπισης θ, αλλά του $\sin\theta$. Η κίνηση προσεγγίζει την απλή αρμονική, μόνο όταν θ είναι πολύ μικρό, έτσι ώστε $\sin\theta \simeq \theta = x/L$ όπου x είναι η μετατόπιση κατά μήκος του τόξου (σημειώστε ότι η γωνία θ είναι σε ακτίνια).

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση της κίνησης είναι

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-mg\frac{x}{L} \simeq m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \qquad (2)$$

Η διαφορική εξίσωση (2) έχει ακριβώς την ίδια μορφή, όπως και η εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή (για λεπτομέρειες σχετικά με την απλή αρμονική κίνηση βλέπε *Halliday and Resnick*, Κεφ.15). Η λύση της εξίσωσης (2) δίνει για την περίοδο T του απλού εκκρεμούς, και για μικρό πλάτος ταλαντώσεων (δηλαδή μικρό θ ή x), τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (3)$$

Ερώτηση: Δείξτε, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγώτερα βήματα, πως από την εξίσωση (2), καταλήγουμε στην εξίσωση (3).

Εδώ αναφέρουμε πάλι ότι η κίνηση του απλού εκκρεμούς θεωρείται κατά προσέγγιση μόνο απλή αρμονική. Στη περίπτωση που η μετατόπιση από την θέση ισορροπίας είναι μεγάλη, η διαφορά της κίνησης από την απλή αρμονική μπορεί να είναι σημαντική και συνεπώς η περίοδος T νά μήν προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την τελευταία απλή εξίσωση. Σε περίπτωση που δεν λάβουμε υπ'όψη τις προηγούμενες προσεγγίσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι η περίοδος της αιώρησης του εκκρεμούς δίνεται από την σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}[1 + (\frac{1}{2})^2\sin^2\frac{\theta}{2} + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2\sin^4\frac{\theta}{2} + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2\sin^6\frac{\theta}{2} + \cdots] \qquad (4)$$

Το απλό εκκρεμές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ακριβή μέτρηση του g. Πολύπλοκα εκκρεμή βρίσκουν εφαρμογή στη Γεωφυσική π.χ. εξερεύνηση πετρελαιοκοιτασμάτων. Τοπικά αποθέματα πετραλαίων ή μεταλευμάτων προκαλούν μεταβολή της πυκνότητας, η οποία επηρεάζει την τοπική τιμή του g, έτσι ώστε ακριβείς μετρήσεις σε μια ορισμένη επιφάνεια, μπορούν να δώσουν χρήσιμες πληροφορίες για την φύση των υπογείων κοιτασμάτων.

Ερώτηση: Για να βρούμε ότι $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ δεν λάβαμε υπ'όψη την τριβή της μάζας m με τον αέρα. Βρείτε μιά νέα σχέση για το T λαμβάνοντας υπόψη και τη δύναμη τριβής, η οποία είναι αντίθετη της κίνησης και λαμβάνεται ανάλογη της ταχύτητας της μάζας. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της τριβής στην περίοδο T;

Πειραματικό μέρος

Το αντικείμενο του πειράματος είναι: **Α.** Να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ περιόδου ταλάντωσης T και του μήκους L του εκκρεμούς. **Β.** Να υπολογισθεί η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας g. **Γ.** Να εξετασθεί η σχέση μεταξύ της περιόδου T και του πλάτους ταλάντωσης του εκκρεμούς. **Δ.** Να εξετασθεί η σχέση μεταξύ Τ και της μάζας m του εκκρεμούς.

Α. Υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε την εξίσωση (3) και θέλουμε να βρούμε την σχέση μεταξύ T και L. Προς τον σκοπό αυτό, μεταβάλλουμε το μήκος L και μετράμε την περίοδο T. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το εκκρεμές που χρησιμοποιείται στο πείραμα, δεν είναι ιδανικό, αφού δεν έχει σημειακή μάζα και αβαρές νήμα. Η μέτρηση του μήκους L (που είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου στήριξης του νήματος και του κέντρου βάρους της σφαίρας) δεν είναι ακριβής αφού η θέση του κέντρου βάρους δεν είναι επακριβώς γνωστή. Στό μέρος αυτό του πειράματος μετρείστε κατευθείαν το L αλλά ταυτόχρονα, για να μην επαναλάβετε τις μετρήσεις πάλι για το μέρος (Β), λάβετε υπόψη την Σημείωση Β4 στο τέλος και σημειώστε για κάθε L την αντίστοιχη τιμή του l.

Σύσταση: Για πιο συστηματική παρουσίαση της δουλειάς σας χρησιμοποιείστε για τις μετρήσεις και την ανάλυση τους ένα πίνακα της μορφής.

l	L	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_m	ΔT_m	$\log T_m$	$\log L$	ΔL	;
l_1	L_1											
l_2	L_2											
l_3	L_3											
$\vdots$	$\vdots$											

Για τον καθορισμό της περιόδου T χρησιμοποείστε το χρονόμετρο και μετρείστε για κάθε L τον χρόνο t γιά N περιόδους ταλάντωσης (όπου $N > 10$) αρκετές φορές (τουλάχιστον 5), ώστε τελικά να βρείτε μιά μέση αριθμητική τιμή για κάθε περίοδο. Το επόμενο βήμα είναι να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του T συναρτήσει του L. Εάν η καμπύλη που προκύπτει δεν είναι ευθεία γραμμή, σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ T και L είναι μη γραμμική. Στη συνέχεια, υποθέστε ότι $T = kL^n$ και απεικονίστε σε γραμμικό χαρτί το $\log T$ σαν συνάρτηση του $\log L$. Από το διάγραμμα αυτό υπολογίστε τον εκθέτη n και τη σταθερά k και συγκρίνετε τις τιμές αυτές με το 0.5 και $2\pi/\sqrt{g}$ αντίστοιχα (δίνεται ότι για την Κρήτη g=980 cm/s^2). Τι συμπεραίνετε?

Β. Αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το g, όταν μετρήσουμε με ακρίβεια το L και T. Με βάση τις μετρήσεις που κάνατε, το g μπορεί να βρεθεί αλγεβρικά μέσω της εξίσωσης (3) ή και γραφικά. Στη συνέχεια υπολογίστε το g και με τις δύο μεθόδους.

Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείστε την (3) και τα δεδομένα του 1ου μέρους για το L και T_m. Επίσης υπολογίστε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα της τιμής του g. Για να υπολογίσετε το g γραφικά, χρησιμοποιείστε τα δεδομένα του 1ου μέρους και κατασκευάστε το διάγραμμα του l σαν συνάρτηση του T^2 μέ βάση την Σημείωση Β4. Από την κλίση της ευθείας γραμμής υπολογίστε το g και κατά προσέγγιση το απόλυτο και σχετικό σφάλμα. Και στις δύο περιπτώσεις μέτρησης του g λάβετε υπόψη τα σημαντικά ψηφία. Ποιά μέθοδος (αλγεβρική ή γραφική) είναι πιό ακριβής (σύγκριση των σχετικών τους σφαλμάτων); Συγκρίνετε επίσης τα αποτελέσματά σας με την γνωστή τιμή του g. Τι συμπεραίνετε (λάβετε υπόψη εδώ αυτά που είπαμε για το απλό εκκρεμές)? (Είναι αξιοπερίεργο επίσης να συγκρίνετε τις τιμές του L στον Πίνακα με αυτές που προκύπτουν μέ βάση τα αντίστοιχα μήκη l και την ανάλυση της Σημείωσης Β4).

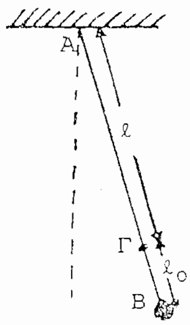
Γ. Για να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ T και του πλάτους ταλάντωσης, θα πρέπει να μετρηθεί η περίοδος T για διαφορετικές γωνιακές αποκλίσεις θ (η γωνία θ μετράται κατά προσέγγιση με τη χρήση μοιρογνωμονίου). Εδώ για να βρείτε κάποια διαφορά πάρτε σχετικά μεγάλες τιμές θ ($<$ 30-40°). Οι μετρήσεις για τον προσδιορισμό της περιόδου θα πρέπει να επαναληφθούν αρκετές φορές (αφού απαιτείται κάποια ακρίβεια καθόσον οι διαφορές μεταξύ των περιόδων είναι μικρές και το χρονόμετρο μη ακριβές), ώστε να βρείτε μια μέση περίοδο για κάθε θ (χρησιμοποιείστε κατάλληλο πίνακα). Επίσης για κάθε θ που χρησιμοποιείτε, βρείτε την περίοδο από την (4) (κρατώντας τους δυο πρώτους όρους της σειράς) και κατόπιν κατασκευάστε το διάγραμμα της περιόδου T σαν συνάρτηση του πλάτους

θ, για τα πειραματικά και θεωρητικά δεδομένα. Τι συμπεραίνετε για την σχέση μεταξύ T και του πλάτους ιαλάντωσης;

Δ. Τέλος εξετάσιε την σχέση μεταξύ της περιόδου T και της μάζας m του εκκρεμούς. Για το σκοπό αυτό δίνεται μια σειρά από μάζες. Χρησιμοποιώντας διαφορετικές μάζες μετρείστε την εκάστοτε περίοδο T για το ίδιο ακριβώς μήκος L. Στη συνέχεια, ένα διάγραμμα του T σαν συνάρτηση του m θα δείξει αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών. Τι συμπεραίνετε για την εξάρτηση του Τ από την μάζα m; Ποιές είναι κατά τη γνώμη σας οι κυριότερες πηγές σφαλμάτων στο πείραμα?

Σημείωση Β4. Επειδή το νήμα δεν είναι αβαρές και κυρίως λόγω του συστήματος πρόσδεσης του νήματος στη σφαίρα, το κέντρο βάρους της σφαίρας μάλλον δεν συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο της έτσι ώστε το μήκος L να μην είναι ακριβώς ίσο με την απόσταση του σημείου στήριξης από το γεωμετρικό κέντρο της σφαίρας. Η δυσκολία στην μέτρηση του ακριβούς μήκους L, μπορεί να ξεπεραστεί (;) με τον ακόλουθο τρόπο.

Σε ένα σημείο του νήματος δένουμε ένα κόμπο, ορίζοντας με τον τρόπο αυτό ένα σταθερό σημείο Γ (βλέπε Σχήμα Β4.2). Εστω l_0 η απόσταση του σημείου Γ από το κέντρο βάρους Β του εκκρεμούς, έτσι ώστε $l_0 + l = L$.



Σχήμα Β4.2. Εμμεση μέτρηση του μήκους L του εκκρεμούς

Από την εξίσωση (3) παίρνουμε

$$l = \frac{g}{4\pi^2}T^2 - l_0 \qquad (5)$$

Η γραφική παράσιαση της εξίσωσης (5), με το l καια μήκος του άξονα y και του T^2 καιά μήκος του άξονα x, είναι ευθεία γραμμή. Η κλίση της γραμμής ισούται με $k = g/4\pi^2$ (απ'όπου υπολογίζεται το g), ενώ το μήκος l_o υπολογίζεται από την διατομή της ευθείας με τον άξονα των y. Κατά συνέπεια, μετρώντας μόνο το l, μπορούμε (ενδεχομένως) να ελαττώσουμε την αβεβαιότητα (ή το σφάλμα) του L. Λέμε εδώ 'ενδεχομένως' διότι η μέθοδος που μόλις περιγράφθηκε εισάγει οπωσδήποτε σφάλματα τα οποία μπορεί να επιβάλλουν τελικά μεγαλύτερο σφάλμα στο L από την αβεβαιότητα που προκύπτει από την απευθείας μέτρησή του (μεταξύ του σημείου στήριξης και του κέντρου της μάζας).

Βιβλιογραφία

Halliday and Resnik, Φυσική, Μέρος Α', Κεφ.15.

Sears, Zemansky and Young, University Physics, Σελ. 203.

Weider and Sells, Elementary Classical Physics, Κεφ. 14.

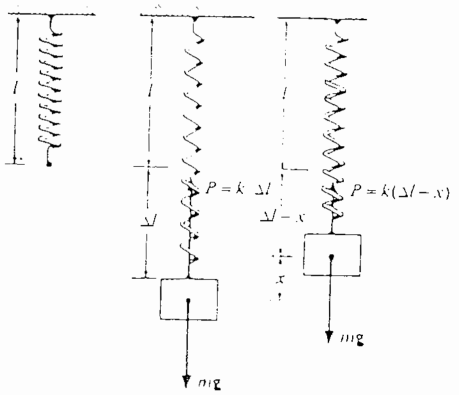
B5. Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Νόμος του Hooke.

Οταν μία δύναμη εφαρμόζεται σε ένα ελαστικό σώμα, προκαλεί μια παραμόρφωση (δηλαδή μεταβολή στο μέγεθος είτε το σχήμα του σώματος). Οταν η δύναμη πάψει να ενεργεί, τότε το σώμα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση και η παραμόρφωση εξαφανίζεται. Λόγω της ιδιότητάς του αυτής το σώμα ονομάζεται ελαστικό.

Κοινό παράδειγμα ελαστικού σώματος είναι το ελατήριο. Οταν μία δύναμη ενεργεί στο άκρο του ελατηρίου, προκαλεί μία επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου, το οποίο λόγω ελαστικότητας εξασκεί μία δύναμη που αντιδρά στην παραμόρφωση (δύναμη επαναφοράς). Εάν η παραμόρφωση ($\vec{x}$) δεν είναι, όπως λέμε, μόνιμη τότε η δύναμη επαναφοράς ($\vec{F}$), είναι ανάλογη του $\vec{x}$, δηλαδή

$$\vec{F} = -k\vec{x} \tag{1}$$

όπου η σταθερά k είναι η σταθερά του ελατηρίου. Η απλή αυτή σχέση είναι γνωστή σαν Νόμος του Hooke.



Σχήμα B5.1. Η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της μετατόπισης

Στα αριστερά του Σχήματος B5.1 φαίνεται ένα ελατήριο με σταθερά k και μήκος l. Οταν ένα σώμα μάζας m κρεμιέται από το κατώτερο άκρο του ελατηρίου, τότε αυτό επιμηκύνεται και το σώμα ισορροπεί σε μια ορισμένη θέση, όπου η δύναμη επαναφοράς $k\Delta l$ είναι ίση με το βάρος mg (βλέπε μέσον Σχήματος B5.1). Στη συνέχεια, αν η μάζα m τραβηχθεί προς τα κάτω και αφεθεί ελεύθερη, το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται. Ας υποθέσουμε, ότι το σώμα βρίσκεται σε μία θέση x πάνω από τη θέση ισορροπίας, όπως στα δεξιά του Σχήματος B5.1.

Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι τώρα $\Delta l - x$, και η δύναμη επαναφοράς είναι $k(\Delta l - x)$ ώστε σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα να έχουμε

$$ma_x = k(\Delta l - x) - mg = -kx \tag{2}$$

ή τελικά

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} = 0 \tag{3}$$

Η εξίσωση (2), δείχνει ότι η δύναμη που ενεργεί στο σώμα είναι ανάλογη της μετατόπισης και έχει φορά αντίθετη πρός αυτή. Αυτή είναι η αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί το σώμα απλή αρμονική κίνηση. Αυτό οδηγεί στην διαφορική εξίσωση (3), που είναι η εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Η λύση της εξίσωσης αυτής δείχνει ότι η μετατόπιση x είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου ($x = A\cos(\omega_0 t + \delta)$, όπου A είναι το πλάτος, ω_0 η γωνιακή συχνότητα και δ η σταθερά φάσης), ενώ η περίοδος ταλάντωσης δίνεται από την σχέση

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

Λεπτομέρειες σχετικά με τη λύση της εξίσωσης (3), μπορεί να βρεί κανείς στη Φυσική των *Halliday and Resnick*, Μέρος Α.

Πείραμα

Το αντικείμενο του πειράματος είναι η επαλήθευση του νόμου του Hooke και η μελέτη της απλής αρμονικής κίνησης του συστήματος μάζας-ελατηρίου. Τα υλικά που χρειάζεται κανείς είναι ένα ελατήριο, ορισμένες μάζες με άγκιστρο, ένα χρονόμετρο και μια κλίμακα που τοποθετείται κατακόρυφα πίσω από το ελατήριο για την μέτρηση της επιμήκυνσης. Η πειραματική διαδικασία περιλαμβάνει το εξής:

Α) Κρεμάστε μια μάζα και μετρείστε την επιμήκυνση του ελατηρίου. Στη συνέχεια, προσθέστε σταδιακά, μία σειρά μαζών και καταγράψτε την μετατόπιση σε κάθε νέα θέση ισορροπίας. Κατόπιν αφαιρέστε τις μάζες την μια κατόπιν της άλλης και καταγράψτε τις αντίστοιχες θέσεις (μετατοπίσεις) για δεύτερη φορά. Χρησιμοποιείστε ένα πίνακα για την παρουσίαση των μετρήσεων

Μάζα (kg)	Δύναμη (N)	Μεταιόπιση I (m)	Μετατόπιση II (m)	M.O. μεται/σης (m)
m_1				
m_2				
m_3				
$\vdots$				

Κατασκευάστε την γραφική παράσταση της δύναμης, που εξασκείται στο ελατήριο σαν συνάρτηση της μετατόπισης (ή επιμήκυνσης) του ελατηρίου. Κάνετε χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμής που περνά μέσα από τα σημεία (F_i, x_i). Τι συμπεραίνετε για την ισχύ του νόμου του Hooke; Ποιά είναι η σταθερά του ελατηρίου και πιο είναι το πειραματικό σφάλμα της σταθεράς;

B) Κρεμάστε μια μάζα στο άκρο του ελατηρίου και τεντώστε το ελατήριο προς τα κάτω, αφήνοντας το ελεύθερο. Το σύστημα αρχίζει ταλαντώσεις κατά μήκος της κατακόρυφης διεύθυνσης. Στη συνέχεια, μετρείστε την περίοδο ταλάντωσης αρκετές φορές (μετρείστε τον χρόνο t για N ταλαντώσεις ($N > 20$) και διαιρέστε με τον αριθμό ταλαντώσεων) και βρείτε μια μέση τιμή για την περίοδο T. Κατόπιν χρησιμοποιείστε την εξίσωση (4) για τον υπολογισμό της σταθεράς k. Συγκρίνετε την τιμή αυτή με την τιμή που βρήκατε προηγουμένως από το διάγραμμα. Καθορίστε το πειραματικό σφάλμα στο k. Συμφωνούν οι δύο τιμές που βρήκατε , μέσα στο όριο του πειραματικού σφάλματος; Ποιά από τις δύο μεθόδους είναι κατά την γνώμη σας ακριβέστερη; Στην περίπτωση μή συμφωνίας των δύο τιμών της k συζητείστε τις πιθανές πηγές σφάλματος που υπεισέρχονται.

Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό του k, στη μάζα m θα πρέπει να ληφθεί υπ'όψη και η μάζα του ελατηρίου, το οποίο επίσης, λαμβάνει μέρος στην ταλάντωση. Μπορεί να αποδειχθεί (βλέπε σημείωση B5), ότι η επίδραση της μάζας του ελατηρίου λαμβάνεται υπ'όψη, όταν προσθέσουμε στην μάζα m που κρεμάμε, το 1/3 της μάζας του ελατηρίου.

Γ) Για να διερευνήσετε αν η περίοδος ταλάντωσης του ελατηρίου είναι ανάλογη του $m^{1/2}$, μετρείστε την περίοδο ταλάντωσης T για μιά σειρά διαφορετικών μαζών. Στη συνέχεια, κατασκευάστε την γραφική παράσταση του T σαν συνάρτηση του $m^{1/2}$. Τι συμπεραίνετε από αυτό το διάγραμμα; Λαμβάνοντας υπ'οψη την εξίσωση (4) και την τελευταία γραφική παράσταση, υπολογίστε τη σταθερά της δύναμης του ελατηρίου k. Πόσο είναι το εκατοστιαίο ποσοστό διαφοράς της τιμής αυτής σε σχέση με τις προηγούμενες;

<u>Σημείωση Β5.</u> Στην περίπτωση του ελατηρίου - απλού αρμονικού ταλαντωτή, θα πρέπει να ληφθεί υπ'όψη ότι, εκτός από τη κρεμασμένη μάζα m στο κατώτερο άκρο του ελατηρίου, το ίδιο το ελατήριο μάζας m_s ταλαντώνεται επίσης. Βέβαια, η μάζα του ταλαντούμενου συστήματος δεν είναι απλώς $m + m_s$, επειδή όλα τα μέρη του ελατηρίου δεν ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος όπως η μάζα m, ενώ το ανώτερο άκρο παραμένει ακίνητο. Ο όρος διόρθωσης που πρέπει να προστεθεί στη μάζα m, υπολογίζεται παρακάτω.

Εστω L το μήκος ελατηρίου όταν η μάζα m ισορροπεί. Θα υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του ελατηρίου την χρονική στιγμή όταν η ταχύτητα του κατώτερου άκρου (ή της μάζας m) είναι v. Θεωρούμε ένα στοιχείο μήκους dx του ελατηρίου σε απόσταση x από το ανώτερο ακίνητο άκρο του. Τότε η μάζα του στοιχείου, dm_s, είναι

$$dm_s = \frac{m_s}{L} dx.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του στοιχείου, v_s είναι

$$v_s = \frac{x}{L} v$$

οπότε η κινητική ενέργεια του στοιχείου μήκους dx είναι

$$dE_k - \frac{1}{2} dm_s v_s^2 = \frac{1}{2} m_s \frac{x^2}{L^3} v^2 dx.$$

και η ολική κινητική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{m_s v^2}{L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} m_s) v^2$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με την Κ.Ε. ενός σώματος, που έχει μάζα ίση με το 1/3 της μάζας του ελατηρίου και κινείται με την ίδια ταχύτητα όπως και η μάζα m. Με άλλα λόγια, η ισοδύναμη μάζα του συστήματος ταλάντωσης ελατηρίου-μάζας ισούται με την αναρτημένη μάζα συν το ένα τρίτο της μάζας του ελατηρίου

$$m_{eff} = m + \frac{1}{3} m_s.$$

Βιβλιογραφία

Alonso and Finn, Mechanics I.

Halliday and Resnick, Φυσική Μέρος Α.

Sears, Zemansky and Young, University Physics.

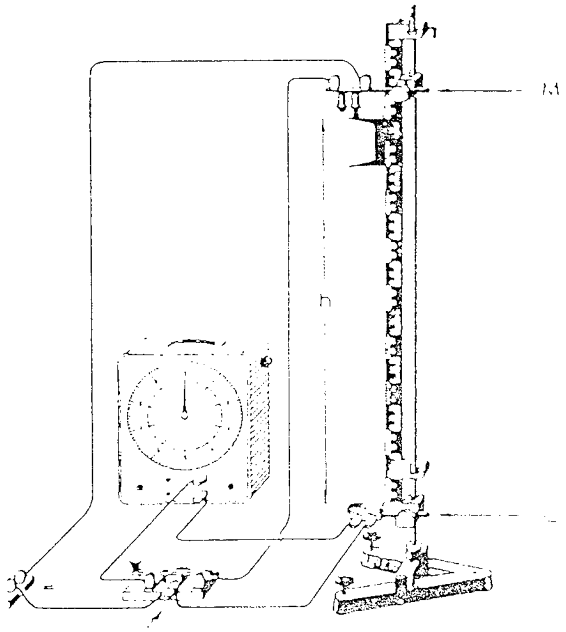
B6. Μέτρηση της Επιτάχυνσης της Βαρύτητας

Το πιό κοινό παράδειγμα κίνησης με σταθερή επιτάχυνση είναι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων λόγω της βαρύτητας. Είναι γνωστό, ότι στην περίπτωση που θεωρηθεί αμελητέα η αντίσταση του αέρα, όλα τα σώματα, ανεξάρτητα του μεγέθους και της μάζας των, πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση η οποία παραμένει σταθερή σε όλη την διάρκεια της πτώσης (εφ'όσον το ύψος απ'όπου πέφτουν είναι μικρό σε σχέση με την ακτίνα της γης). Η επιτάχυνση ενός σώματος που πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας συμβολίζεται με το γράμμα g και ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας (acceleration of gravity).

Σ'αυτή την εργαστηριακή άσκηση το g θα μετρηθεί με δύο διαφορετικές συσκευές : **A**) τη συσκευή της ελεύθερης πτώσης και **B**) το αντιστρεπτό φυσικό εκκρεμές

A. Ελεύθερη πτώση

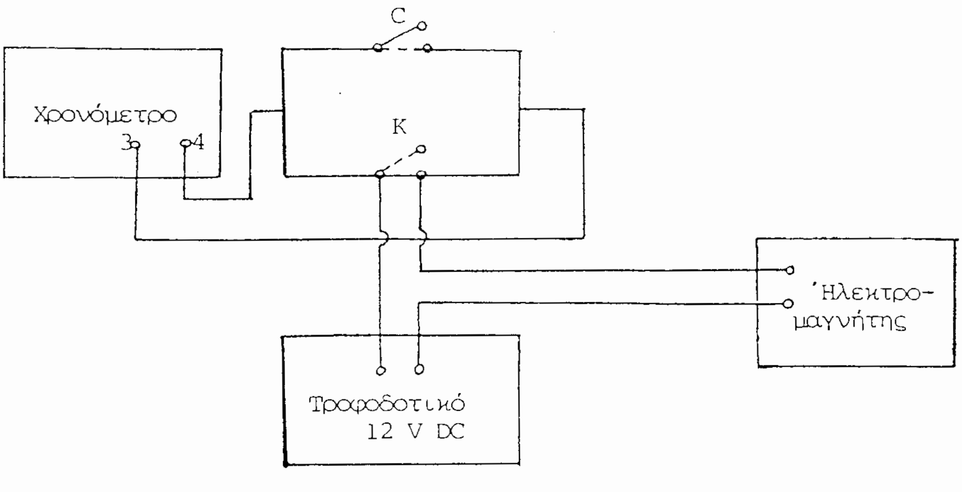
Η επιτάχυνση g υπολογίζεται από την εξίσωση της ομαλής επιταχυνόμενης κίνησης, $h = gt_h^2/2$, όταν μετρηθεί με ακρίβεια ο χρόνος πτώσης, t_h, ενός σώματος για ένα γνωστό ύψος h. Ο χρόνος t_h μετράται με ακρίβεια, μέσω ενός αυτόματου ηλεκτρικού χρονόμετρου που χρησιμοποιείται στη συσκευή μέτρησης του g η οποία απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα B6.1: Συσκευή ελεύθερης πτώσης με αυτόματο ηλεκτρικό χρονόμετρο

Στο Σχήμα B6.1 βλέπουμε μια χαλύβδινη σφαίρα να συγκρατείται μέσω ενός ηλεκτρομαγνήτη M, που τροφοδοτείται με 12V. Στο κύκλωμα παρεμβάλλεται ένας διακόπτης K, τύπου

Morse, που μπορεί να αποσυνδέσει τον ηλεκρομαγνήτη στιγμιαία, έτσι ώστε να ελευθερωθεί η σφαίρα. Ο ίδιος διακόπτης συνδέεται ταυτόχρονα και με το χρονόμετρο, έτσι ώστε, όταν κλείσουμε τον διακόπτη K, το χρονόμετρο αρχίζει να λειτουργεί την ίδια ακριβώς στιγμή, που η σφαίρα απελευθερώνεται και αρχίζει να πέφτει. Στο σημείο C υπάρχει ένας ανοικτός διακόπτης, που είναι συνδεδεμένος επίσης με το χρονόμετρο. Ο διακόπτης αυτός κλείνει με το κτύπημα της σφαίρας που πέφτει και προκαλεί διακοπή της χρονομέτρησης. Με το σύστημα αυτό, το χρονόμετρο δείχνει τον χρόνο που χρειάστηκε η σφαίρα, να πέσει από το σημείο M στο σημείο C. Η ακρίβεια της μέτρησης του χρόνου μπορεί να βελτιωθεί παίρνοντας τη μέση τιμή διαφόρων μετρήσεων. Για τον σκοπό αυτό, είναι καλύτερα το χρονόμετρο να μη μηδενίζεται μετά από κάθε διαφορετική μέτρηση, αλλά η μέτρηση να επαναλαμβάνεται αρκετές φορές και ο συνολικός χρόνος να διαιρείται με τον αριθμό των μετρήσεων. Επειδή ο χρόνος t_h μετράται με ακρίβεια ($\Delta t = 0.01s$), θα πρέπει να ληφθεί πρόνοια, έτσι ώστε η μέτρηση του ύψους να γίνει με την πιο μεγάλη ακρίβεια.



Σχήμα B6.2: Διάγραμμα συνδέσεων για τη συσκευή ελεύθερης πτώσης

Υπολογίστε το g για 5 ως 6 διαφορετικά ύψη και στη συνέχεια βρείτε τη μέση τιμή και το (απόλυτο και σχετικό) σφάλμα. Επίσης, υπολογίστε το σχετικό σφάλμα στο g γιά το μεγαλύτερο και το μικρότερο ύψος που χρησιμοποιείτε και συγκρίνετε τους αριθμούς. Τι συμπεραίνετε; Τέλος, αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τη διάταξη του σχήματος B6.1, ότι η ελεύθερη πτώση είναι ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση.

Παρατηρήσεις. 1) Μη πιέζετε απότομα τον μοχλό μηδενισμού του χρονομέτρου. Απότομη ή βίαιη κίνηση του μοχλού, μπορεί να καταστρέψει τον μηχανισμό επανατοποθέτησης των δεικτών. 2) Λόγω της κατασκευής του μηχανισμού μηδενισμού του χρονόμετρου ο μοχλός πλάγια αριστερά δεν πρέπει να χρησιμοποιείται όταν ένας από τους δείκτες σταματήσει στη διαίρεση 53 της κλίμακας. Σ'αυτή την περίπτωση μετακινήστε προς τα εμπρός τον δείκτη 1 ή 2 υποδιαιρέσεις και κατόπιν κάνετε χρήση του μοχλού.

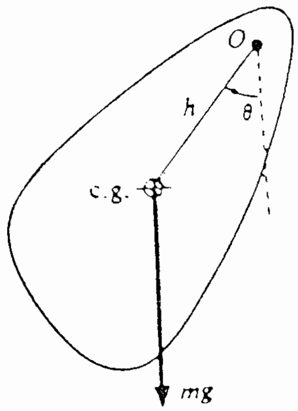
Περιγραφή και λειτουργία του χρονομέτρου. Το ηλεκτρικό χρονόμετρο μπορεί να μετρήσει χρόνους μέχρι 100 s, με ακρίβεια 0.01 s και ενεργοποιείται αυτόματα, μέσω ηλεκτρικών παλμών ή χειροκίνητα. Το χρονόμετρο περιλαμβάνει ένα κινητήρα, που δουλεύει σε συγχρονισμό με τα 50 Hz της γραμμής παροχής ρεύματος και ένα χρονομετρικό μηχανισμό, που ενεργοποιεί και αποενεργοποιεί το χρονόμετρο. Υπάρχουν δύο δείκτες. Ο γρήγορος δείκτης συμπληρώνει τις 100 υποδιαιρέσεις μιας πλήρους περιστροφής σε 1 s ενώ ο αργός προχωρεί μια υποδιαίρεση κάθε 1 s. Στην όψη του οργάνου υπαρχουν δύο διακόπτες. Ο κύριος διακόπτης (δεξιά) βάζει σε λειτουργία τον κινητήρα του χρονομέτρου. Ο αντιστρεπτός διακόπτης (αριστερά) βάζει σε λειτουργία τον μηχανισμό χρονομέτρησης που κινεί τους δείκτες. Στη μιά θέση του διακόπτη αυτού, ένα συνεχές ρεύμα περνά μέσω του πηνίου ενός ηλεκτρομαγνήτη που είναι τοποθετημένος στον άξονα του ηλεκτρικού κινητήρα. Ο ηλεκτρομαγνήτης ενεργοποιείται και έλκει τον μηχανισμό χρονομέτρησης, ο οποίος συνδέεται στον κινητήρα και οι δείκτες αρχίζουν να κινούνται. Οταν ο διακόπτης αντιστραφεί, το ρεύμα ενεργοποιεί ένα δεύτερο ηλεκτρομαγνήτη που τραβά τον χρονομετρικό μηχανισμό στην αντίθετη κατεύθυνση και τον αποχωρίζει από τον κινητήρα. Το σύστημα των δύο ηλεκτρομαγνητών έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε η παραπάνω διαδικασία να γίνεται ταχύτατα και να προκαλεί πολύ μικρά σφάλματα. Το ρεύμα για τους ηλεκτρομαγνήτες παρέχεται από ένα τροφοδοτικό συνεχούς ρεύματος (DC) που περιλαμβάνει ένα μετασχηματιστή ένα ανορθωτή και δύο λυχνίες 12 V των 5 W οι οποίες συνδέονται σε σειρα με τους ηλεκτρομαγνήτες και χρησιμοποιούνται για να δώσουν ένα ισχυρό ρεύμα για το μικρό χρονικό διάστημα που ο διακόπτης αντιστρέφεται, έτσι ώστε οι ηλεκτρομαγνήτες να αποκρίνονται ταχύτατα.

Στην περίπτωση που απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στη μέτρηση, η χειροκίνητη λειτουργία θα πρέπει να αποφεύγεται. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει το χρονόμετρο να αρχίσει και να σταματήσει αυτόματα από το κινούμενο σώμα, μέσω ενός ειδικού μηχανισμού. Μέρος του μηχανισμού αυτού είναι δύο ζευγάρια τερματικών στο μπροστινό τμήμα του οργάνου και ένας ηλεκρομαγνητικός διακόπτης στο εσωτερικό του χρονομέτρου, όπου επίσης υπαρχει μια μονάδα τροφοδοσίας που παρέχει το απαραίτητο ρεύμα ελέγχου (control current) το οποίο χρειάζεται για τον ηλεκτρομαγνητικό διακόπτη.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε φυλλάδιο *LEYBOLD*, No 31302: Large Electric Stopclock, Εργαστήριο Φυσικής.

Β. Φυσικό Αντιστρεπτό Εκκρεμές

Για να κατανοήσουμε την χρήση του αντιστρεπτού εκκρεμούς στον υπολογισμό του g, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε περιληπτικά στη θεωρία του φυσικού εκκρεμούς.



Σχήμα Β6.3: Φυσικό εκκρεμές

Φυσικό εκκρεμές, είναι ένα στερεό σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από ένα οριζόντιο άξονα ο οποίος δεν περνά από το κέντρο βάρους του σώματος. Το σχήμα Β6.3 δείχνει ένα σώμα μάζας m, αναρτημένο από ένα σημείο Ο και μετατοπισμένο από την κατακόρυφη διεύθυνση κατά γωνία θ. Η απόσταση του κέντρου βάρους (c.g.) από το σημείο στήριξης είναι h και η ροπή αδράνειας του εκκρεμούς ως προς τον άξονα Ο είναι I.

Το βάρος mg προκαλεί μια ροπή επαναφοράς $-mgh\sin\theta$. Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο αρχίζει να ταλαντώνεται. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για περιστροφική κίνηση γύρω από ένα ορισμένο άξονα, έχουμε

$$\sum T_{\varepsilon\xi} = \mathrm{I}a \tag{1}$$

ή

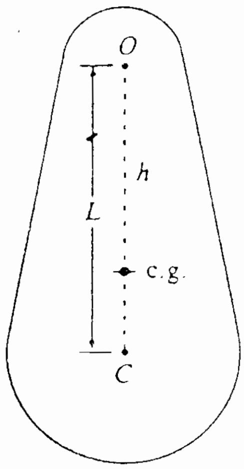
$$-mgh\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

όπου a είναι η γωνιακή επιτάχυνση. Οταν οι ταλαντώσεις είναι μικρού πλάτους, δηλαδή η γωνία θ είναι μικρή, ώστε $sin\theta \simeq \theta$ (όπου θ μετράται σε rad), η εξίσωση (2) γράφεται

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0. \tag{3}$$

Η τελευταία εξίσωση περιγράφει απλή αρμονική κίνηση με περίοδο ταλάντωσης που δίνεται από την σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{4}$$



Σχήμα Β6.4: Ισοδύναμο απλό εκκρεμές μήκους L και μάζας m

Είναι πάντοτε δυνατόν να βρούμε ένα ισοδύναμο απλό εκκρεμές, του οποίου η περίοδος είναι ίση με την περίοδο ενός ορισμένου φυσικού εκκρεμούς. Εάν L είναι το μήκος του ισοδύναμου απλού εκκρεμούς, τότε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{5}$$

απόπου προκύπτει ότι το ανηγμένο μήκος $L = \mathrm{I}/mh$. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η μάζα ενός φυσικού εκκρεμούς, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι συγκεντρωμένη σ'ένα σημείο C, του οποίου η απόσταση από το σημείο ανάρτησης O είναι $L = I/mh$. Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο αιώρησης του εκκρεμούς. (βλέπε Σχήμα B6.4).

Για το φυσικό εκκρεμές ισχύουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα:

1) Οι περίοδοι ταλάντωσης ενός φυσικού εκκρεμούς ως πρός διάφορους άξονες στήριξης οι οποίοι είναι παράλληλοι και σε ίση απόσταση από το κέντρο βάρους είναι ίσες.

2) Η περίοδος ενός φυσικού εκκρεμούς παραμένει η ίδια αν το εκκρεμές ταλαντώνειαι περί έναν άξονα που είναι παράλληλος προς τον αρχικό και διέρχεται από το κέντρο αιώρησης.

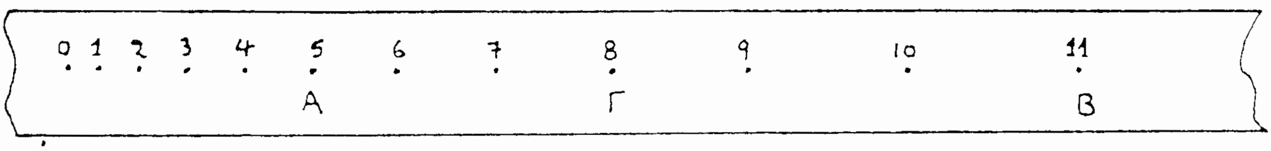
Πειραματικό μέρος. Από την (5), μπορούμε να βρούμε το g, αν ξέρουμε την περίοδο T και το ανηγμένο μήκος L, ενός φυσικού εκκρεμούς. Για τον προσδιορισμό όμως του L, χρειάζεται να ξέρουμε τα μεγέθη I, m και h. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος απλουστεύεται με την χρήση του αντιστρεπτού εκκρεμούς ή εκκρεμούς Cater (από τον κατασευαστή του). Αυτό έχει δύο σταθερούς και παράλληλους άξονες ταλάντωσης (στήριξης) και δύο κινητές μάζες. Το μήκος μεταξύ των δύο αξόνων είναι το ανηγμένο μήκος του εκκρεμούς όταν η περίοδος αιώρησης είναι η ίδια και για τους δύο άξονες (σύμφωνα με το 2ο θεώρημα του φυσικού εκκρεμούς). Τότε, ο ένας άξονας περνά από το κέντρο αιώρησης σε σχέση με τον άλλο και αντίστροφα. Ερώτηση: Παρατηρώντας το εκκρεμές Cater βλέπει κανείς ότι έχει κατασκευαστεί, έτσι ώστε η μάζα του είναι ασύμμετρα κατανεμημένη ως προς τους δύο άξονες στήριξης. Γιατί;

Δίνεται ένα εκκρεμές Cater, ένα χρονόμετρο και ένας κανόνας μήκους ενός μέτρου. Ζητείται να βρείτε μία μέθοδο, ώστε να υπολογίσετε την τιμή του g (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε γραφικές παραστάσεις). Υπολογίστε το πειραματικό σφάλμα στο g. Συγκρίνετε τις δύο τιμές του g (μέρος Α και Β) με τη δοσμένη τιμή (για το γεωγραφικό πλάτος του Ηρακλείου, δηλ. 35° N, g=980 cm/s^2) και μεταξύ τους. Ποιά μέθοδος είναι πιό ακριβής; Αναφέρατε πιθανές πηγές σφάλματος.

B7. Μελέτη Ελεύθερης Πτώσης

Η συσκευή της ελεύθερης πτώσης που χρησιμοποιείται στο πείραμα, περιλαμβάνει ένα μηχανισμό καταγραφής της κίνησης του πέφτοντος σώματος, που αποτελείται από ένα κύκλωμα δύο παράλληλων αγωγών (ένα σύρμα και ένα έλασμα) οι οποίοι συνδέονται με μια γεννήτρια ισχυρών παλμών πολύ μικρής χρονικής διάρκειας. Ενα μεταλλικό σφαιρίδιο, που συγκρατείται σε μία σιαγόνα στο πάνω μέρος της συσκευής, μπορεί να αφεθεί να πέσει μεταξύ των δύο αγωγών. Μια ταινία χαρτιού με ειδική επικάλυψη, στην οποία αποτυπώνεται το 'ίχνος' της κίνησης, προσαρμόζεται κατάλληλα έτσι ώστε να καλύπτει το αγώγιμο έλασμα. Μεσω ενός διακόπτη, η γεννήτρια παρέχει σειρά ισχυρών παλμών, διάρκειας λίγων μs, με συχνότητα 50 Hz.

Στο πείραμα, ενώ πιέζουμε συνεχώς τον διακόπτη λειτουργίας της γεννήτριας, απελευθερώνουμε το σφαιρίσιο που αρχίζει να πέφτει. Κατά την διάρκεια της πτώσης δημιουργείται ένας παλμός κάθε 1/50 s που επιτρέπει σε ένα ρεύμα να περνά από το σύρμα στο έλασμα μέσω του μεταλικού σφαιριδίου έτσι ώστε ο σπινθήρας που δημιουργείται να αποτυπώνει ένα μικρό σημείο, σαν τελεία, στο ειδικό χαρτί. Με τον τρόπο αυτό η θέση του σώματος που πέφτει απεικονίζεται σαν συνάρτηση του χρόνου. Μετά την πτώση και καταγραφή, η ταινία του χαρτιού εμφανίζει την εικόνα του Σχήματος B7.1. Οπως είπαμε, ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων είναι 1/50 s. Παρατηρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των σημείων μεγαλώνει συνέχεια αφού η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.



Σχήμα B7.1: Αποτύπωση της θέσης σώματος κατά την ελεύθερη πτώση του

Το πείραμα αυτό μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την στιγμιαία ταχύτητα σε ένα αποτυπωμένο σημείο, π.χ. στο σημείο Γ του Σχήματος B7.1, ως εξής: Επιλέγουμε δύο σημεία εκατέρωθεν του Γ, που απέχουν ίσο αριθμό χρονικών διαστημάτων, μετρούμε την απόσταση s_{AB} και διαιρούμε με τον χρόνο t_{AB} (π.χ. στο Σχήμα B7.1 t_{AB}=6/50 s). Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να υπολογισθεί η μέση ταχύτητα $\overline{v}_{AB}$ του σώματος κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος t_{AB} η οποία, για την περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, ισούται με την στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του χρονικού διαστήματος t_{AB}. (Θα πρέπει να δείξετε ότι η μέση ταχύτητα $\overline{v}_{AB}$, είναι η στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον ακριβώς του χρονικού διαστήματος t_{AB} και να διατυπώσετε την προυπόθεση υπό την οποία τούτο ισχύει. Σημειώστε ότι: η μέση ταχύτητα είναι $\overline{v}_{AB} = (s_B - s_A)/(t_B - t_A)$, η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, και s_A, s_B είναι οι μετατοπίσεις του σώματος από την αρχή της κίνησης τις χρονικές στιγμές t_A και t_B).

Πριν πάρετε το ίχνος της τροχιάς βεβαιωθείτε ότι η βάση της συσκευής είναι οριζοντιομένη έτσι ώστε το βάρος να πέφτει ακριβώς κατακόρυφα, χωρίς να αγγίζει τους παράλληλους αγωγούς. Κάθε φοιτητής στήν ομάδα θα πρέπει να πάρει ένα ξεχωριστό ίχνος της κίνησης και να κάνει την δική του ανάλυση. Η ανάλυση των δεδομένων περιλαμβάνει τα παρακάτω τρία μέρη. Σημειώστε ότι και στα τρία μέρη θα επιβεβαιώσετε ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μην αγγίζετε τα σύρματα ή οποιοδήποτε άλλο μη ηλεκτρικά μονωμένο μέρος της συσκευής, όταν πιέζετε τον διακόπτη λειτουργίας της γεννήτριας παλμών.

Α) Υπολογισμός του g με βάση το διάγραμμα $s = f(t)$. Αρχίστε από ένα σημείο (οπωσδήποτε όχι το πρώτο αποτυπωμένο σημείο) και θεωρείστε το σαν αρχή της κίνησης, δηλαδή έστω ότι εκεί t=0. Στήν συνέχεια επιλέξτε ένα αριθμό μεταγενέστερων σημείων (οχι υποχρεωτικά διαδοχικών) κατά μήκος όλης της ταινίας, σημειώστε τα σημεία αυτά με τους αριθμούς: $1, 2, 3 \cdots$ και μετρείστε τις αποστάσεις s_1, s_2, s_3, $\cdots$ από το σημείο που επιλέξατε σαν αρχή της κίνησης, και βρείτε τους αντίστοιχους χρονους t_1, t_2, t_3, $\cdots$. Ετσι θα πάρετε n ζεύγη μετρήσεων t_i, s_i, i=1,2,$\cdots n$,

Στήν περίπτωση που η αρχική ταχύτητα ήταν 0, για να αποδείξει κάποιος ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, αρκεί να βρεί μέσω ενός διαγράμματος ότι $s \propto t^2$. Εδώ όμως, στο σημείο αρχής της κίνησης που επιλέξαμε, η αρχική ταχύτητα v_0 δεν είναι μηδέν, συνεπώς θα πρέπει να την υπολογίσουμε και να την λάβουμε υπόψη στην διαγραμματική ανάλυση που θα κάνουμε. Ο υπολογισμός του v_0 γίνεται με την μέθοδο της στιγμιαίας ταχύτητας όπως περιγράφθηκε προηγουμένως. Στη συνέχεια θα κατασκευάσετε το λαγαριθμικό διάγραμμα του $\log(s - v_0 t)$ σαν συνάρτηση του $\log t$ και θα προραρμόσετε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μια ευθεία γραμμή στα σημεία του διαγράμματός σας. Είναι η κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη; Αν θεωρήσουμε ότι $s - v_0 t = \frac{1}{2} g t^2$, να υπολογιστεί η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g, από το διάγραμμα και να συγκριθεί με την γνωστή τιμή των 980 ms^{-2}.

Β) Υπολογισμός του g με βάση το διάγραμμα $v = f(t)$. Από το ίχνος της κίνησης (π.χ. Σχήμα Β7.1), μπορεί να υπολογιστεί η στιγμιαία ταχύτητα v σε ένα οποιοδήποτε αποτυπωμένο σημείο. Κατόπιν, έχοντας την στιγμιαία ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου και στηριζόμενοι στην παραδοχή ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, μπορούμε να υπολογίσουμε το g.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπολογίστε την στιγμιαία ταχύτητα σε 7–8 σημεία τουλάχιστον (όχι κατ'ανάγκη διδοχικά) και κατόπιν κατασκευάστε το διάγραμμα στιγμιαίας ταχύτητας σαν συνάρτηση του χρόνου και προσαρμόστε μια ευθεία γραμμή στα πειραματικά σας δεδομένα. Από το προσαρμογή αυτή, και με βάση εξισώσεις που δόθηκαν στο Μέρος Α του βιβλίου, να βρείτε την τιμή του $g \pm \Delta g$. Να συγκριθεί η τιμή του g με αυτή για την Κρήτη (δηλαδή $g \simeq 9.80$ ms^{-2}) και με την τιμή του g που βρήκατε από το μέρος (Α) της ανάλυσης. Πέφτει η τιμή του g μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος; Πόσα σημαντικά ψηφία έχει η τιμή του g που βρήκατε;

Γ) Υπολογισμός του g με βάση το διάγραμμα $\overline{v} = f(\Delta t)$. Η στιγμιαία ταχύτητα μπορεί να υπολογισθεί μ'έναν ακόμα τρόπο, που πηγάζει από τον ορισμό της παραγώγου

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta t}$$

Επιλέξτε ένα αποτυπωμένο σημείο τη χρονική στιγμή t και καθορίστε τη μέση ταχύτητα $\Delta S/\Delta t$ μεταξύ του χρονικού διαστήματος t και $t + \Delta t$ για διαδοχικά ελαττούμενες τιμές του Δt (π.χ. 8/50 , 7/50 , 6/50 , $\cdots$, 1/50 s). Κατόπιν απεικονίστε τη μέση ταχύτητα $\overline{v}$, που υπολογίσατε για κάθε ένα από αυτά τα χρονικά διαστήματα, σαν συνάρτηση του Δt και προεκτείνετε την ευθεία που περνά μέσα από τα σημεία αυτά μέχρι το Δt=0. Η τιμή της μέσης ταχύτητας, που αντιστοιχεί στο Δt=0 είναι εξ ορισμού η στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή t. Συγκρίνετε αυτή την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας με την αντίστοιχη τιμή που μπορεί να βρεθεί μέσω της μεθόδου που χρησιμοποιήσατε σιά μέρη (A) και (B) της ανάλυσης και βρείτε την εκατοστιαία διαφορά (ποία τιμή κατα την γνώμη σας είναι ακριβέστερη και γιατί;) Επίσης να βρείτε από την καμπύλη σας την επιτάχυνση της βαρύτητας, αφού πρώτα δείξετε ότι η μέση ταχύτητα, $\overline{v}$, είναι γραμμική συνάρτηση του διαστήματος Δt, στο οποίο αντιστοιχεί. Η νέα αυτή τιμή του g να συγκριθεί με αυτές που βρήκατε προηγουμένως και την γνωστή τιμή που σας δώθηκε.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα :

1) Είσοδο των δεδομένων t_i, s_i ; $i = 1, 2, \cdots, n$ και δημιουργία ενός αρχείου διαδοχικών ζευγών t_i, s_i (Data file). (Χρησιμοποιείστε όσο το δυνατόν περισσότερα ζεύγη σημείων).

2) Θεωρώντας ότι για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, προσαρμόστε στα δεδομένα σας με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού,υπολογίστε και εκτυπώστε τα s_0, v_0, a και g=9.80 ms^{-2}, φτιάξτε ένα γραφικό του $s = f(t)$ όπου θα συγκρίνονται τα πειραματικά σημεία (t_i, s_i) με την καμπύλη που προκύπτει από το πολυώνυμο που βρήκατε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

3) Με βάση τις μετρήσεις t_i, s_i και ότι $\overline{v} = (s_{i+1} - s_i)/(t_{i+1} - t_i) = v_t$ όπου $t = (t_{i+1} + t_i)/2$, υπολογίστε την στιγμιαία ταχύτητα v_j σαν συνάρτηση του χρόνου t_j, όπου j= 1,2,... n-1. Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι $v = v_0 + at$, προσαρμόστε με την μέθοδο των Ε.Τ. μια ευθεία γραμμή στις τιμές t_j, v_j. Βρείτε και εκτυπώστε τα v_o, a και την % διαφορά του a με την δοσμένη τιμή g=9.80 ms^{-2}. Στη συνέχεια, φτιάξτε ένα γραφικό, όπου θα απεικονίζονται οι πειραματικές τιμές t_j, v_j και η ευθεία γραμμή που βρήκατε με προσαρμογή.

4) Με βάση την ταχύτητα v_j και τους αντίστοιχους χρόνους t_j, υπολογίστε την μέση επιτάχυνση $\overline{a_i}$, σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα Δt_i. Αντιστοιχείστε την επιτάχυνση $\overline{a_i}$ στο μέσον του χρονικού διαστήματος Δt_i (εδώ οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στις θέσεις i=2,3, $\cdots$, n-1), και φτιάξτε μια γραφική παράσταση, που θα περιλαμβάνει τα σημεία t_i, a_i ($a = f(t)$) και την ευθεία a=9.80 ms^{-2}.

Στις γραφικές παραστάσεις που θα εκτυπωθούν κάθε μιά τους σε διαφορετική σελίδα, θα πρέπει να υπάρχουν κατάλληλες κλίμακες στους άξονες με διαστήματα τιμών, περιγραφή αξόνων και φυσικές μονάδες στο S.I.

B8. Απλή κυκλική κίνηση. Κεντρομόλα δύναμη

Είναι γνωστό ότι ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει μόνο ακτινική επιτάχυνση που ονομάζεται κεντρομόλα, γιατί κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου, της οποίας το μέτρο είναι σταθερό και ίσο με υ^2/r, όπου υ είναι η ταχύτητα και r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Για ένα σώμα σε ομαλή κυκλική κίνηση, η επιτάχυνση και η ταχύτητα είναι πάντοτε κάθετες μεταξύ τους.

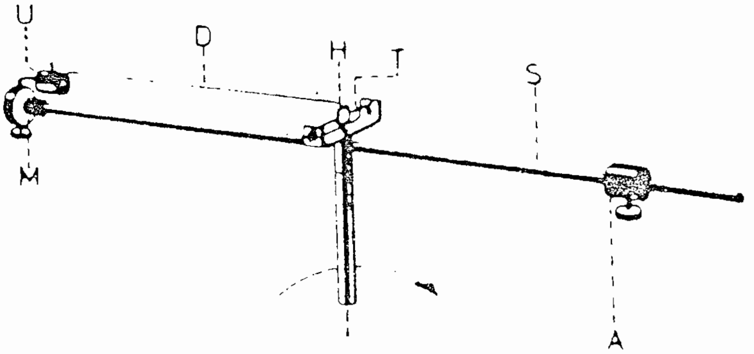
Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ($\vec{F} = m\vec{a}$), η ύπαρξη της κεντρομόλας επιτάχυνσης σημαίνει ότι, για ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η συνισταμένη δύναμη που εξασκείται σ'ένα σώμα που βρίσκεται σε ομαλή κυκλική κίνηση είναι μια κεντρομόλα δύναμη της οποίας το μέτρο είναι

$$F = ma = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

ή αν λάβουμε υπ'όψη ότι $\upsilon = \omega r$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$F = m\omega^2 r \tag{1}$$

Αν το κινητό είναι προσδεμένο στο κέντρο του κύκλου, τότε μία δύναμη, ίση και αντίθετη της κεντρομόλας, εξασκείται στο κέντρο που, για αντιδιαστολή, ονομάζεται φυγόκεντρη. Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση, επιβαιβεώνεται η ισχύς της Εξίσωσης (1) με την φυγοκεντική συσκευή του παρακάτω σχήματος που μετρά αντί της κεντρομόλας τη φυγόκεντρη δύναμη.

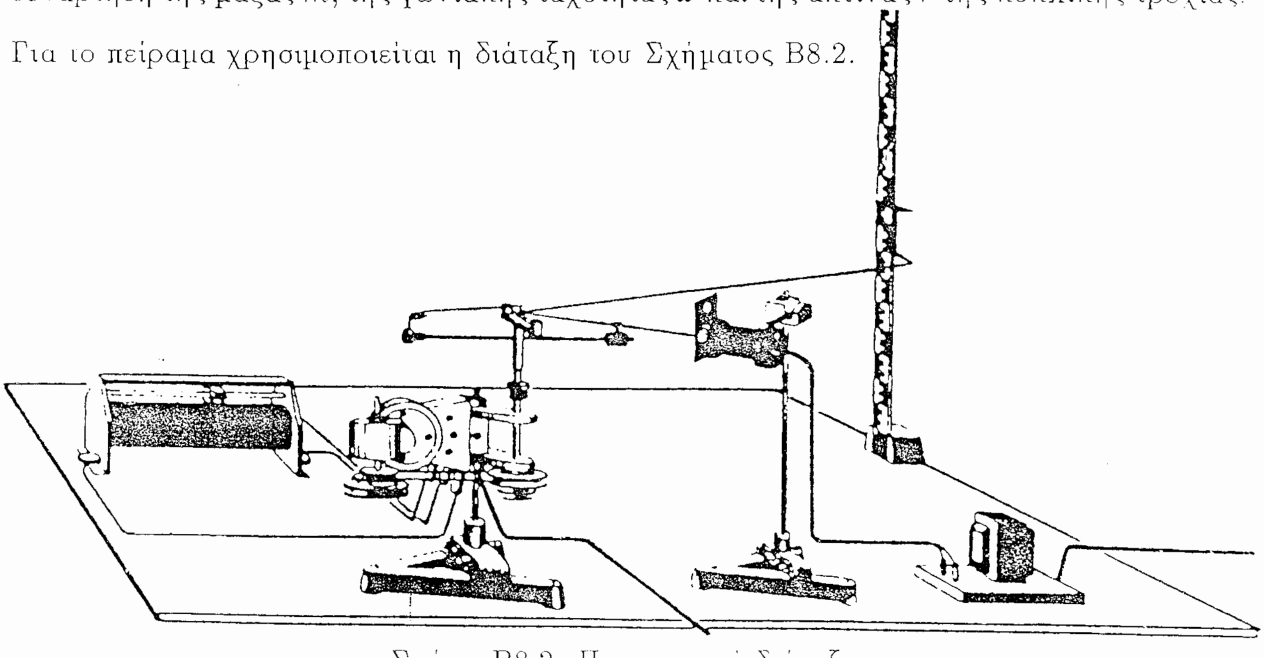


Σχήμα B8.1 Φυγοκεντρική συσκευή

Οπως φαίνεται στο Σχήμα B8.1, η συσκευή μέτρησης της φυγόκεντρης δύναμης αποτελείται από ένα κατακόρυφο άξονα που στηρίζει δύο ίσους οριζόντιους βραχίονες, και που μπορεί να περιστρέφεται μέσω ενός κινητήρα. Στον ένα βραχίονα υπάρχει ένα κινητό στήριγμα M, όπου τοποθετείται το σώμα U, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος του βραχίονα. Στον άλλο βραχίονα υπάρχει ένα κινητό αντίβαρο A που τοποθετείται, σε σχέση με το M, στην ίδια περίπου απόσταση από το κέντρο. Στο κέντρο είναι στερεωμένο κατακόρυφα, με ελαστική σύνδεση μέσω ενός σύρματος, ένα μικρό κάτοπτρο H, που φέρει στο ανώτερο άκρο ένα μικρό άγκιστρο. Από το άγκιστρο αυτό προσδένεται το σώμα U, μέσω του μη εκτατού νήματος D. Οταν η συσκευή περιστρέφεται, το κάτοπτρο H στρέφεται περί τον οριζόντιο άξονα, κάτω από την επίδραση της φυγόκεντρης δύναμης, η οποία είναι ίση με την κεντρομόλα που εξασκείται στο σώμα U. Η στροφή του κατόπτρου μετράται με την βοήθεια μιας ανακλώμενης φωτεινής κηλίδας πάνω σε μια κατακόρυφη κλίμακα.

Πειραματικό μέρος

Η παραπάνω συσκευή χρησιμοποιείται για την μελέτη της φυγόκεντρης δύναμης σαν συνάρτηση της μάζας m, της γωνιακής ταχύτητας ω και της ακτίνας r της κυκλικής τροχιάς. Για το πείραμα χρησιμοποιείται η διάταξη του Σχήματος B8.2.



Σχήμα B8.2. Πειραματική διάταξη

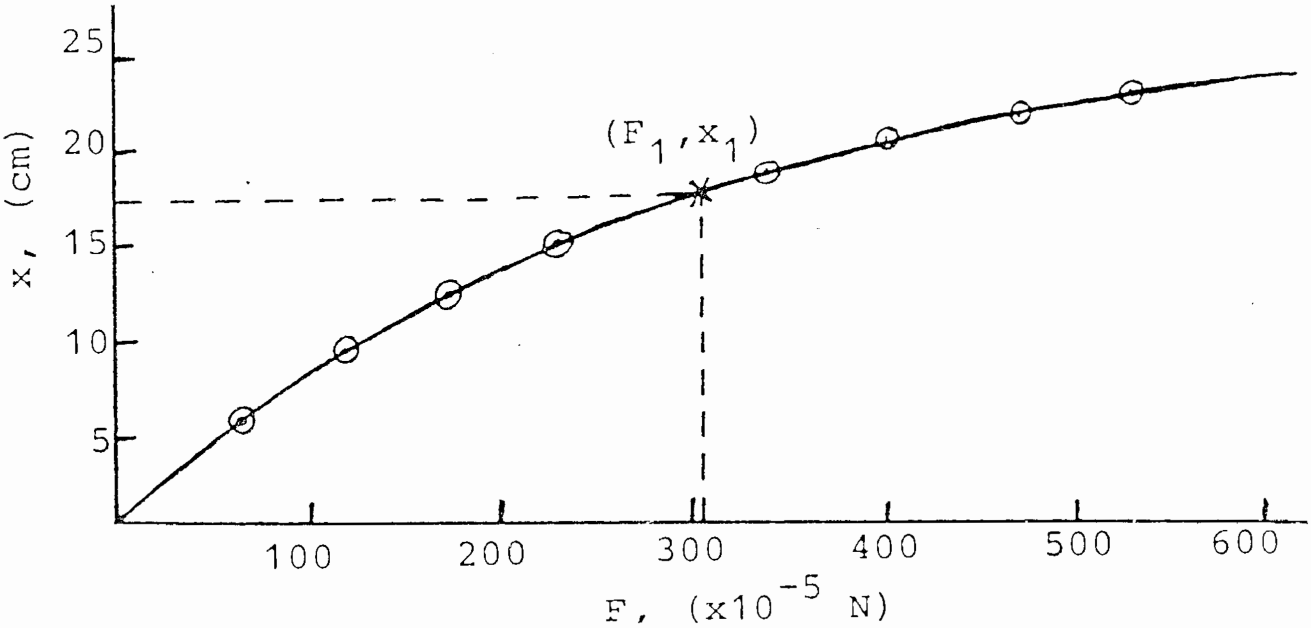
Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει ένα τροφοδοτικό μεταβλητής τάσης που τροφοδοτεί ένα κινητήρα, ο οποίος περιστρέφει, μέσω ενός ιμάντα, ένα κατακόρυφο άξονα όπου στηρίζεται το σύστημα της φυγοκεντρικής συσκευής. Επίσης υπάρχει ένα σύστημα Laser He-Ne χαμηλής ισχύος που στέλνει μια λεπτή δεσμη φωτός πάνω στο περιστρεφόμενο κάτοπτρο.

Χρησιμοποιώντας διαφορετικές μάζες (m), διαφορετικά νήματα r και διαφορετικές γωνιακές συχνότητες ω, ζητείται η πειραματική επιβεβαίωση του νόμου της κεντρομόλας δύναμης που εκφράζεται από την Εξίσωση (1). Πρίν προχωρήσετε στο κύριο μέρος του πειράματος όμως, είναι απαραίτητο πρώτα να κάνετε βαθμονόμηση (callibration) για την εύρεση της σχέσης μεταξύ της απόκλισης της κηλίδας στο πέτασμα και της φυγόκεντρης δύναμης στην οποία αντιστοιχεί.

Βαθμονόμηση. Επειδή δεν μπορούμε να μετρήσουμε την φυγόκεντρη δύναμη κατευθείαν, θα κάνουμε βαθμονόμηση η οποία θα μας επιτρέψει να ανάγουμε τις αποκλίσεις της δέσμης πάνω στην μετρική κλίμακα, οι οποίες μπορούν να μετρηθούν, στις αντίστοιχες φυγοκεντρικές δυνάμεις οι οποίες τις προκαλούν. Η βαθμονόμηση αυτή γίνεται στρέφοντας το κάτοπτρο μέσω της εφαρμογής μιας γνωστής δύναμης, και καταγράφοντας την απόκλιση της κηλίδας από την θέση ισορροπίας, η οποία αντιστοιχεί σε φυγόκεντρη δύναμη ίση με το μηδέν. Συστήνουμε δύο τρόπους βαθμονόμησης: **α)** Χρήση ενός ευαίσθητοου δυναμόμετρου που συνδέεται στο άγκιστρο του κατόπτρου. **β)** Σύνδεση του αγκίστρου με ένα αβαρές νήμα, που περνά πάνω από μια τροχαλία που βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το άγκιστρο, στο άλλο άκρο του οποίου κρεμούνται μικρές γνωστές μάζες (βάρη) που εξασκούν γνωστές τάσεις στο κάτοπτρο και το στρέφουν.

Και οι δύο παραπάνω μέθοδοι απαιτούν, για την αποφυγή σφαλμάτων, το δυναμόμετρο η το σχοινί να είναι εντελώς οριζόντια και ακριβώς παράλληλα προς τον βραχίονα S της φυγοκεντρικής συσκευής. Η μέθοδος (β) είναι πιο ακριβής από την (α) και είναι αυτή που τελικά χρησιμοποιείται στο πείραμα. Από την στιγμή που θα γίνει η βαθμονόμηση η θέση των διαφόρων εξαρτημάτων (π.χ. φυγοκεντρική συσκευή, ηλεκτροκινητήρας, πηγή φωτός, κατακόρυφη κλιμακα) πρέπει να μείνει απολύτως αμετάβλητη.

Για την βαθμονόμηση χρησιμοποιούμε μια σειρά από μάζες (τουλάχιστον 8) οι οποίες επιλέγονται έτσι ώστε να καλύψουν ισόρροπα όλη την αναμενόμενη διαδρομή τιμών των αποκλίσεων της φωτεινής κηλίδας κατά την εκτέλεση του κυρίως πειραματικού μέρους (τα όρια των τιμών των αποκλίσεων μπορείτε εύκολα να τα εκτιμήσετε πρίν αρχίσετε την βαθμονόμηση). Για την εύρεση της φυγόκεντρης δύναμης από την απόκλιση της δέσμης χρησιμοποιείται ένα διάγραμμα βαθμονόμησης, που θα πρέπει να κατασκευάσετε, παράδειγμα του οποίου δίνεται στο Σχήμα Β8.3.



Σχήμα Β8.3. Σχέση μεταξύ φυγόκεντρης δύναμης και απόκλισης της δέσμης

Ακολουθεί η κύρια πειραματική διαδικασία η οποία περιλαμβάνει τα εξής δύο μέρη:

Α). Θα εξετάσετε πως η δύναμη F εξαρτάται από την μάζα, $F = f(m)$, την ακτίνα, $F = f(r)$, και την γωνιακή ταχύτητα, $F = f(\omega)$. Οταν μελετάτε την μεταβολή της φυγόκεντρης δύναμης συναρτήσει ενός από τα τρία αυτά μεγέθη τα άλλα δύο θα πρέπει να παραμείνουν σταθερά. (Υπόδειξη: Για να βρείτε ότι $F \propto \omega^2$ θα πρέπει να απεικονίσετε το $\log F$ σαν συνάρτηση του $\log \omega$ και κατόπιν να υπολογίσετε την κλίση της γραμμής που ισούται με τον εκθέτη σε μια συναρτησιακή σχέση δύναμης μεταξύ δύο μεταβλητών, δηλαδή $x = ky^n$). Για τα διαγράμματά σας θα πρέπει να έχετε τουλάχιστον 6 ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i). Επίσης θα πρέπει να κάνετε χρήση της μεθόδου Ε.Τ. για την προσαρμογή ευθείας γραμμής για κάθε συναρτησιακή σχέση που διερευνάτε, η οποία και θα επιτρέψει τον υπολογισμό των κλίσεων και διατομών οι οποίες στη συνέχεια θα πρέπει να συγκριθούν με τις γνωστές τιμές που έχετε.

B). Εκτελέστε το πείραμα για δύο διαφορετικές τριάδες m,ω,και r, και προσδιορίστε τις αντίστοιχες τιμές της F από το διάγραμμα βαθμονόμησης και την Εξίσωση (1). Ισχύει η εξίσωση (1) μέσα στα όρια σφάλματος του πειράματος; Το τελευταίο συνεπάγεται εδώ πλήρη ανάλυση πειραματικών σφαλμάτων με την μέθοδο του πιθανού σφάλματος εμμέσων μετρήσεων όπως αυτή παρουσιάσθηκε στο Μέρος Α του βιβλίου. Για τον υπολογισμό του σφάλματος ΔF της πειραματικής τιμής με βάση το διαδικασία βαθμονόμησης θα πρέπει να λάβετε υπόψη ότι το σφάλμα στήν απόκλιση Δx οφείλεται κυρίως σε μικροδονήσεις της φυγοκεντρικής συσκευής που προκαλούν μια μικρή 'ταλάντωση' της θέσης της κηλίδας πάνω στην κατακόρυφη κλίμακα.

Σημείωση. Η μέτρηση της γωνιακής ταχύτητας, η κυκλικής συχνότητας, ω, θα γίνει έμμεσα από την μέτρηση της περιόδου περιστροφής της φυγοκεντρικής συσκευής. Πρός τούτο χρησιμοποιείστε ένα χρονόμετρο και μετρείστε τον χρόνο που χρειάζεται για να εμφανισθεί η φωτεινή κηλίδα 20 ή 30 φορές στη κλίμακα. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται η περίοδος T μιας περιστροφής και στη συνέχεια η κυκλική συχνότητα ω. Για περισσότερη ακρίβεια η ίδια μέτρηση πρέπει να επαναλειφθεί περισσότερες φορές και να βρεθεί μια μέση τιμή.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει:

1) Είσοδο μετρήσεων και δημιουργία αρχείων (Data files):

a) Βαθμονόμησης $F = f(x)$ F_i, x_i $i = 1, 2, \cdots$

b) Μεταβολή ακτίνας $x = f(r)$ x_i, r_i $i = 1, 2, \cdots$

c) Μεταβολή συχνότητας $x = f(\omega)$ x_i, ω_i $i = 1, 2, \cdots$ $\omega_i = 2\pi/T_i$

2) Δημιουργία υποπρογράμματος, με το οποίο θα είναι δυνατό να προσαρμόζεται ένα πολυώνυμο 1ου, 2ου ή 3ου βαθμού $y = f(x)$ σε μια σειρά μετρήσεων x_i, y_i με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

3) Με ανακύκλωση να βρείτε ποιό πολυώνυμο (1ου, 2ου ή 3ου βαθμού) προσαρμόζεται καλλίτερα στην καμπύλη βαθμονόμησης F_i, x_i. (Ο απλούστερος τρόπος να βρείτε ποιά καμπύλη είναι η πιό κατάλληλη, είναι να συγκρίνετε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών των μετρήσεων F_i από τις αντίστοιχες τιμές κάθε καμπύλης $F(x)$ για $x = x_i$, δηλαδή το $\sum\{(F_i - F(x_i)\}^2$). Στη συνέχεια να κάνετε μέσω του προγράμματός σας ένα γραφικό $F(x)$, όπου θα απεικονίζονται τα σημεία των μετρήσεων F_i, x_i και η καλλίτερη δυνατή καμπύλη που προσαρμόζεται σ' αυτά. Επίσης τυπώστε στην έξοδο το πολυώνυμο ως εξής (π.χ. αν είναι 3ου βαθμού):

$$F = A + B * X + C * X * *2 + D * X * *3$$

4) Κάνετε χρήση του πολυωνύμου που προσαρμόσατε και σχηματίστε τα ζεύγη μετρήσεων F_i, r_i και F_i, ω_i με βάση τα αρχεία x_i, r_i και x_i, ω_i.

5) Χρησιμοποιείστε το υποπρόγραμμα και βρείτε το πιο κατάλληλο πολυώνυμο (1ου, 2ου ή 3ου βαθμού), που προσαρμόζεται στις μετρήσεις $F_i(r_i)$ και $F_i(\omega_i)$. Εκτυπώστε τα πολυώνυμα αυτά και στη συνέχεια κάνετε δύο γραφικά για την κεντρομόλα δύναμη $F = f(r)$ και $F = f(\omega)$, όπου θα απεικονίζονται τα ζεύγη μετρήσεων και οι καμπύλες που προσαρμόσατε.

B9. Μελέτη Στατικής και Κινητικής Τριβής

Στο παρόν πείραμα θα διερευνηθεί η φύση των δυνάμεων της τριβής, στην περίπτωση που ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε κάποιο άλλο. Οι νόμοι της τριβής είναι πολύπλοκοι και δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως. Μία ακριβής ανάλυση είναι δύσκολη γιατί περιλαμβάνει σύνθετες αλληλεπιδράσεις, μεταξύ των επιφανειών σε μοριακό και ατομικό επίπεδο.

Σ' αυτό το πείραμα θα γίνει μία προσπάθεια να βρεθούν ορισμένοι εμπειρικοί νόμοι, που θα περιγράφουν κατά προσέγγιση τις στατικές και κινητικές δυνάμεις τριβής. Η πειραματική διαδικασία που θα ακολουθηθεί αφήνεται στην πρωτοβουλία των φοιτητών, που εκτελούν το πείραμα. Πριν όμως έλθετε στο εργαστήριο, θα πρέπει να μελετήσετε το κεφάλαιο περί δυνάμεων τριβής του βιβλίου σας και να προετοιμάσετε καλά το πειραμά σας. Συζητείστε τον τρόπο εργασίας με το άλλο μέλος της ομάδας σας και αποφασίστε μια κοινή πειραματική διαδικασία. Ποσότητες ή παράμετροι που έχουν κάποια σπουδαιότητα, θα πρέπει να μεταβάλλονται και να μετρούνται αρκετές φορές, ώστε να βρίσκεται η δυνατή σχέση που τις συνδέει. Χρησιμοποιείστε πίνακες και γραφικές παραστάσεις για την εύρεση της σχέσης μεταξύ διαφόρων ποσοτήτων. Μπορείτε εφ' όσον έχετε χρόνο να μελετήσετε όσο το δυνατόν περισσότερες σχέσεις. Η διαδικασία που θα ακολουθήσετε θα πρέπει να περιγράφεται με σαφήνεια στην εργαστηριακή σας αναφορά.

Ενας οδηγός για το πειραμά σας περιλαμβάνει:

1) Διερεύνηση της σχέσης της δύναμης τριβής (στατικής και κινητικής) με την επιφάνεια επαφής και τη κάθετη δύναμη αντίδρασης.

2) Υπολογισμούς, επαναλαμβάνοντας τη μέτρηση αρκετές φορές, των συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής για τις επιφάνειες που παρέχονται και καθορισμός των ορίων των τιμών τους (απόλυτο και σχετικό σφάλμα).

Τα βασικά υλικά που παρέχονται για το πείραμα είναι ένα κεκλιμένο επίπεδο και τρία κινητά. Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι μεταβλητή και μπορεί να μετρηθεί (π.χ.

με μοιρογνωμόνιο). Η επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου χωρίζεται σε δύο μέρη τα οποία έχουν διαφορετική τραχύτητα. Υπάρχουν επίσης δύο στερεωμένες τροχαλίες για την εξάσκηση των δυνάμεων στα κινητά μέσω κρεμασμένων μαζών. Επίσης είναι διαθέσιμα διάφορα σταθμά που χρησιμοποιούνται για τις δυνάμεις νήματος και για να μεταβάλλουν το βάρος των κινητών. Εαν χρειάζεστε επιπλέον όργανα (π.χ. χρονόμετρα κλπ) ζητείστε τα από τον διδάσκοντα του εργαστηρίου.

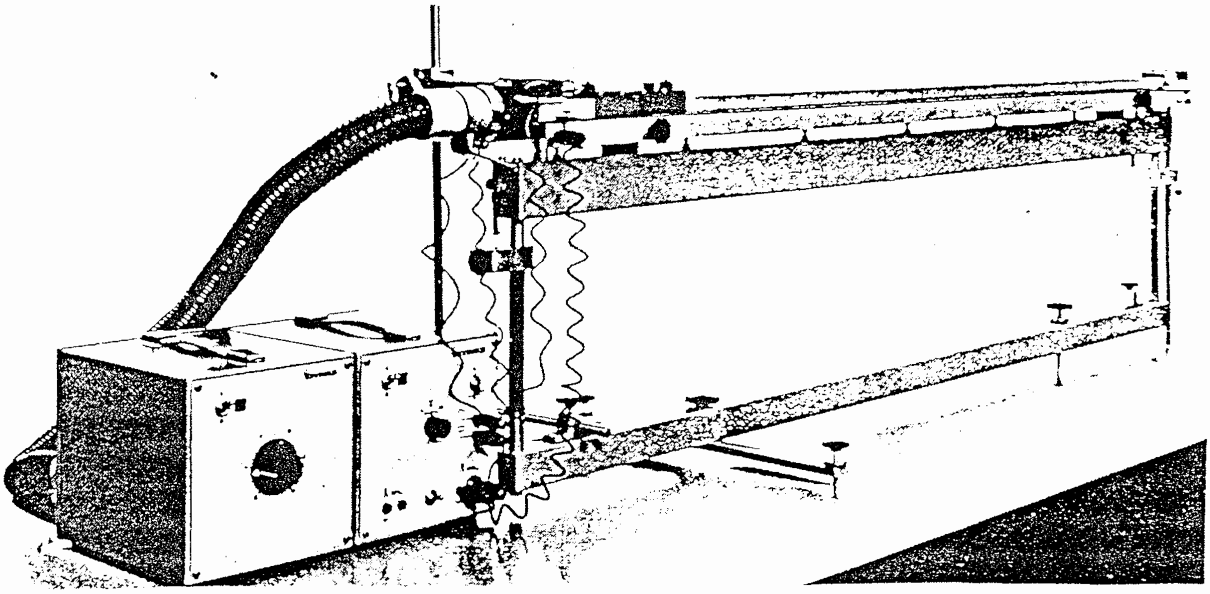
Ερώτηση: Γιατί το κεκλιμένο επίπεδο θεωρείται απλή μηχανή; Μηχανές είναι συστήματα σωμάτων, με τα οποία ενέργεια μιας μορφής μετασχηματίζεται σε ενέργεια άλλης μορφής, π.χ. οι κινητήρες (πετρελαιοκινητήρες, ηλεκτροκινητήρες), με τις οποίες μετατρέπεται ενέργεια μιας μορφής (θερμότητα καύσης, ηλεκτρική ενέργεια) σε μηχανικό έργο.

Βιβλιογραφία

Halliday and Resnick, Φυσική, Μέρος Α.

Πειράματα Μηχανικής με τον Αερόδρομο

Τα πέντε (5) πειράματα που ακολουθούν βασίζονται στην σειρά 'Μηχανική' των εργαστηριακών ασκήσεων Φυσικής του Πανεπιστημίου του Berkeley. Τα πειράματα αυτά έχουν σχεδιασιεί για την παρατήρηση ορισμένων βασικών φαινομένων της κλασσικής Νευτωνίου Μηχανικής. Μια ποικιλία πειραματικών διατάξεων θα σας δώσει την ευκαιρία να εφαρμόσετε τις βασικές αρχές της μηχανικής (όπως π.χ. τους νόμους του Νεύτωνα, σχέσεις ορμής και ενέργειας) στην ανάλυση φαινομένων τα οποία μπορείτε να παρατηρήσετε και να μετρήσετε.



Συσκευή αερόδρομου

Ολα τα πειράματα αυτής της σειράς χρησιμοποιούν τον 'αερόδρομο' (air track), μία απλή και ευαίσθητη συσκευή που επιτρέπει κίνηση ενός κινητού με αρκετά μειωμένη τριβή. Καιάλληλα κατασκευασμένα κινητά κινούνται σ' ένα ευθύγραμμο φορέα στηριζόμενα πάνω σ' ένα λεπτό στρώμα αέρα, πάχους 0,1-0,3 mm, που δημιουργείται μ'ένα σύστημα εμφύσησης του αέρα μέσα από σειρές οπών στην επιφάνεια του φορέα. Η αρχή βασικά είναι η ίδια με αυτή του οχήματος που καλείται Hover-Craft. Η μόνη τριβή στο κινητό είναι αυτή του στρώματος αέρα, στο οποίο το κινητό επιπλέει. Εκτός από το βασικό σύστημα του αερόδρομου, που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, στα διάφορα πειράματα περιλαμβάνονται επίσης μηχανισμοί χρονομέτρησης, διάφορα ελάσματα, τα οποία προσαρμόζονται στα άκρα των κινητών για την μελέτη διαφόρων μορφών κρούσεων, ελατήρια για την μελέτη ταλαντώσεων, μηχανισμοί δημιουργίας εξαναγκασμένης κίνησης, κ.α.

Οι μετρήσεις χρόνου γίνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να καταγραφεί η τροχιά του κινητού σαν συνάρτηση του χρόνου χωρίς να επηρεασθεί η κίνησή του. Οι μετρήσεις χρόνου μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στα πειράματα είναι μια διάταξη καταγραφής σπινθήρων που χρησιμοποιεί μια ταινία κηρομένου χαρτιού, προσαρμοσμένη κατά μήκος του φορέα και ένα ηλεκτρόδιο προσαρμοσμένο στο κινητό. Ο μηχανισμός αυτός συνδέεται με μια γεννήτρια που παράγει ισχυρούς παλμούς τάσης πολύ μικρής διάρκειας με σταθερή συχνότητα, με αποτέλεσμα την δημιουργία σπινθήρων (τόξου) που αποτυπώνονται στο ειδικό (κηρομένο) χαρτί. Με τον τρόπο αυτό καταγράφεται η θέση του κινητού σαν συνάρτηση του χρόνου.

ΟΔΗΓΙΕΣ-ΣΥΣΤΑΣΕΙΣ

Θα πρέπει να μεταχειρίζεστε τις συσκευές των αερόδρομων με πολύ προσοχή. Οι συσκευές που έχουμε στο εργαστήριο, και οι οποίες είναι οι πλέον κατάλληλες για τα συγκεκριμένες ασκήσεις που έπονται, δεν είναι δυνατον να αντικατασταθούν με ίδιες γιατί δεν είναι διαθέσιμες πλέον στην αγορά. Μη τις μετακινείτε βίαια η τις πιέζετε γιατί μπορεί να υποστεί ζημιά η ευθυγράμμισή τους. Τα κινητά επίσης μπορεί να καταστραφούν εύκολα. Ιδιαίτερα προσέξτε τις επιφάνειες του φορέα και των κινητών. Ποτέ μην σύρετε τα κινητά στον αερόδρομο χωρίς να λειτουργεί η μονάδα διοχέτευσης αέρα.

Οταν λειτουργεί η διάταξη καταγραφής σπινθήρων προσέξτε πολύ μην αγγίζετε το κινητό. Το ηλεκτρικό σοκ που μπορεί να πάθει κανείς δεν είναι βέβαια θανατηφόρο (!), αλλά οπωσδήποτε όχι ευχάριστο.

Οι επιφάνειες των συσκευών και των κινητών θα πρέπει να καθαρίζονται επισταμένα πριν από κάθε πείραμα.

B10. Ταχύτητα και Επιτάχυνση

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, όταν ένα σώμα μπαίνει σε κίνηση υπό την επίδραση μιας στιγμιαίας δύναμης (ώθησης) πάνω σε μια επίπεδη και και χωρίς τριβή επιφάνεια, συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα. Παρατηρώντας αν τα κινητά στον αερόδρομο ακολουθούν αυτή την πρόβλεψη μπορείτε να βγάλετε συμπεράσματα για την ευθυγράμμιση και την οριζοντιότητα του αερόδρομου και πόσο σημαντική είναι η τριβή που οφείλεται στο λεπτό στρώμα αέρα όπου επιπλέει το κινητό.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, όταν μία δύναμη επιδρά σε ένα σώμα μάζας m τότε αυτό αποκτά μία επιτάχυνση a που είναι ευθέως ανάλογη της δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας. Η σχέση αυτή εκφράζεται σαν

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \tag{1}$$

στην οποία επισημαίνεται ότι αν ενεργούν περισσότερες από μία δυνάμεις στο σώμα, τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων. Στο πείραμα που ακολουθεί, οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα είναι σταθερές, δηλαδή δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ενας απλός τρόπος για να πετύχετε μια σταθερή δύναμη είναι να υψώσετε τον αερόδρομο από το ένα άκρο κατά ένα ορισμένο ύψος. Η επιτάχυνση ενός κινητού στην περίπτωση αυτή μπορεί να βρεθεί από την γωνία κλίσης ή να καθορισθεί πειραματικά από τη θέση του σώματος σε διαδοχικές χρονικές στιγμές.

Πείραμα

Πρίν κάνετε οτιδήποτε διαβάστε τις συστάσεις που δίνονται στην προηγούμενη σελίδα και εξοικειωθείτε με την χρήση της συσκευής. Ανοίξτε τον προμηθευτή αέρα και παρατηρείστε την κίνηση των κινητών στον αερόδρομο.

Κατόπιν προχωρείστε στην οριζοντιοποίηση της συσκευής. Προς τούτο τοποθετείστε ένα κινητό κοντά στο μέσο του φορέα και ελευθερώστε το χωρίς καμιά ώθηση. Ρυθμίστε τον κοχλία οριζοντίωσης στη βάση της συσκευής, έτσι ώστε το κινητό να ισορροπεί και να μην επιταχύνεται προς τα δεξιά η προς τα αριστερά. Στη συνέχεια μετατοπίστε το κινητό σε άλλες θέσεις και ελέξτε αν ηρεμεί ή επιταχύνεται. Μετά τη ρύθμιση, μη μετακινείτε τη συσκευή από τη θέση της, γιατί ακόμα και μικρές ανωμαλίες στην επιφάνεια του τραπεζιού μπορεί να έχουν αισθητό αποτέλεσμα στην οριζοντιότητα της και στις μετρήσεις.

Α) Σταθερή ταχύτητα. Προσαρμόστε ένα συμπιεζόμενο έλασμα με την βοήθεια μιας κολλητικής ταινίας στο ένα άκρο του αερόδρομου. Πιέστε το έλασμα με ένα κινητό, το οποίο στη συνέχεια το αφήνετε ελεύθερο. Μία άλλη μέθοδος εκτόξευσης είναι μέσω μιας ελαστικής ταινίας που είναι τεντωμένη κατάλληλα στο άκρο του φορέα, κάθετα στην κίνηση. Στη περίπτωση αυτή η εκτόξευση του κινητού γίνεται όπως στη σφεντόνα. Δοκιμάστε μέχρις ότου πετύχετε ταχύτητα κίνησης (εκτόξευσης) της τάξης των 10-20 cm/s.

Στη συνέχεια, προσαρμόστε μια ταινία ειδικού χαρτιού στη κατάλληλη υποδοχή στο φορέα, εκτοξεύστε το κινητό και χρησιμοποιείστε τη συσκευή δημιουργίας σπινθήρων (σπινθηριστή), αφού κάνετε τις κατάλληλες συνδέσεις, για να πάρετε ένα ίχνος της τροχιάς του κινητού. Προσέξτε ώστε να αποενεργοποιήσετε τον σπινθηριστή όταν το κινητό φτάσει στην άλλη άκρη της συσκευής για να αποφύγετε επικάλυψη από ένα δεύτερο ίχνος προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Χρησιμοποιείστε ένα κανόνα με υποδιαιρέσεις mm και μετρείστε την απόσταση των αποτυπωμένων σημείων (όχι αναγκαία όλων η διαδοχικών) από ένα σημείο που ορίζεται σαν αρχή (όχι αναγκαία το πρώτο), και των αντίστοιχων χρονικών διαστημάτων των σημείων. Κατόπιν, κατασκευάστε ένα διάγραμμα που δείχνει την θέση του κινητού σαν συνάρτηση του χρόνου και προσαρμόστε σε αυτό μια ευθεία γραμμή (με τη μέθοδο Ε.Τ.). Τι συμπεραίνετε από το διάγραμμα; Υπολογίστε την ταχύτητα του κινητού για διάφορα χρονικά διαστήματα βρείτε μια μέση τιμή και το σφάλμα που αντιστοιχεί σε αυτή. Επαληθεύεται ο 1ος νόμος του Νεύτωνα μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος; Το τελευταίο σημαίνει ότι θα πρέπει να βρείτε ένα τρόπο να αιτιολογήσετε το σφάλμα που βρήκατε εξετάζοντας τις πηγές σφάλματος, μεταξύ των οποίων είναι και η δύναμη τριβής, και να εκτιμήσετε την συνεισφορά τους στο σφάλμα.

Τώρα να επαναλάβετε το πείραμα με μιά αρκετά μικρότερη ταχύτητα (περίπου τη μισή της προηγούμενης). Τι συμπεραίνετε από την σύγκριση των ταχυτήτων και των σφαλμάτων τους; Οι αποκλίσεις από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα είναι μεγαλύτερες στη δεύτερη περίπτωση (σε σύγκριση με την πρώτη); Εξηγείστε.

B) Σταθερή Επιτάχυνση. Οταν ένα σώμα ελευθερώνεται από μια κατάσταση ηρεμίας κοντά στην επιφάνεια της γης, επιταχύνεται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση εφ' όσον η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και το σώμα διανύει μια απόσταση η οποία είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα της γης. Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας μεταβάλλεται με το γεωγραφικό πλάτος κατά λίγα δέκατα επί τοις εκατό και για τα μέσα πλάτη λαμβάνεται περίπου ίσο με g=9.80 m/s^2.

Μπορούμε να μετρήσουμε το g άν υψώσουμε λίγο το ένα άκρο του αερόδρομου ώστε να χρησιμοποιηθεί σαν κεκλιμένο επίπεδο και κάνουμε μετρήσεις του s σαν συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια επεξεργαζόμαστε τις μετρήσεις γιά να βρούμε την επιτάχυνση a του κινητού και να υπολογίσουμε το g. Αν η γωνία κλίσης της συσκευής είναι α, τότε η επιτάχυνση του κινητού συνδέεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας:

$$a = g \sin \alpha \tag{2}$$

Υψώστε το ένα άκρο του αερόδρομου κατά ένα ύψος h και αφήστε το κινητό να κινηθεί προς τα κάτω ώστε να πάρετε το ίχνος της τροχιάς σε μιά ταινία με την βοήθεια του σπινθηριστή. Για τις μετρήσεις μας λαμβάνουμε ένα σημείο σαν αρχή ($s = 0, t = 0$) της κίνησης και μετράμε τις αποστάσεις διάφορων αποτυπωμένων σημείων και των χρόνων που αντιστοιχούν στις θέσεις των.

Η επιτάχυνση μπορεί να καθορισθεί με διάφορους τρόπους. Ενας τρόπος είναι μέσω της εξίσωσης

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{3}$$

που ισχύει για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν κατασκευασθεί το διάγραμμα του $s - v_0 t$ όχι σαν συνάρτηση του t αλλά του t^2, τότε το αποτέλεσμα πρέπει να είναι μία ευθεία γραμμή της οποίας η κλίση είναι $a/2$. Στην παραπάνω εξίσωση, v_0 είναι η στιγμιαία ταχύτητα που αντιστοιχεί στο σημείο που ορίσαμε σαν αρχή της κίνησης. Για τον υπολογισμό του v_0, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της μέσης ταχύτητας και το γεγονός, ότι για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η μέση ταχύτητα σε ένα διάστημα, είναι ίση με την στιγμιαία ταχύητα στο μέσον του χρονικού διαστήματος (για επιπλέον επεξηγήσεις βλέπε άσκηση B7). Υπολογίστε με την μέθοδο αυτή την επιτάχυνση a και το σφάλμα Δa.

Ενας δεύτερος τρόπος υπολογισμού της επιτάχυνσης είναι από το διάγραμμα της στιγμιαίας ταχύτητας v σαν συνάρτησης του χρόνου t αφού για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση έχουμε

$$v = v_0 + at. \tag{4}$$

Με βάση το ίχνος που έχουμε, μπορούμε να ορίσουμε πάλι ένα σημείο σαν αρχή της κίνησης και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την στιγμιαία ταχύτητα στις θέσεις ενός αριθμού σημείων όπως ακριβώς υπολογίστηκε η αρχική ταχύτητα προηγουμένως η όπως εξηγείται με λεπτομέρεια στην ασκηση B7, δηλαδή, βρίσκοντας την μέση ταχύτητα για ένα διάστημα Δt στο μέσον του οποίου βρίσκεται το αποτυπωμένο σημείο στο οποίο ενδιαφερόμαστε να βρούμε την στιγμιαία ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδειχτεί εύκολα (και ζητείται να το αποδείξετε) ότι η μέση ταχύτητα $\overline{v} = \Delta s/\Delta t$ ισούται με την στιγμιαία ταχύτητα $v_{t_1+\Delta t/2}$ στο μέσον του χρονικού διαστήματος Δt.

Σύφωνα με τα παραπάνω, υπολογίστε μερικά (7–8) ζεύγη (v_i, t_i), κάνετε το διαγραμμα $v = f(t)$ και προσαρμόστε σε αυτό μια ευθεία γραμμή (με την μέθοδο Ε.Τ.) απο την κλιση της οποίας θα βρείτε την επιτάχυνση a ενώ από την διατομή της την αρχική ταχύτητα v_0. Επίσης, με κάποιο τρόπο, εκτιμήστε το απόλυτο σφάλμα Δa.

Μία τρίτη μέθοδος που παρέχει (ενδεχομένως) μεγαλύτερη ακρίβεια είναι να χρησιμοποιήσετε επιπλέον σημεία, από αυτά που πήρατε προηγουμένως, και να υπολογίσετε τις στιγμιαίες ταχύτητες στα σημεία αυτά. Κατόπιν με βάση τις στιγμιαίες αυτές ταχύτητες μπορείτε να κάνετε συνδιασμό των ταχυτήτων αυτών για να βρείτε ενα αρκετά μεγάλο αριθμό μέσων επιταχύνσεων $\overline{a_i}$, αφού η μέση επιτάχυνση ορίζεται απο την σχέση

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{5}$$

Από τις μέσες επιταχύνσεις θα βρείτε μια μέση τιμή γιά την επιτάχυνση και το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα μέσης τιμής η την μέση απόκλιση από την μέση τιμή.

Στην ανάλυση θα χρησιμοποιήσετε και τις τρεις μεθόδους για τον υπολογισμό του a και την εκτίμηση του Δa και θα κάνετε συγκρίσεις. Είναι η κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος; Στη συνέχεια μεσω της εξίσωσης (2) θα υπολογίσετε το g (αφού μετρήσετε πρώτα την γωνία του κεκλιμένου επιπέδου α), και θα κάνετε συγκρίσεις με την γνωστή τιμή του g όπως και πλήρη ανάλυση διάδοσης πειραματικών σφαλμάτων για την εύρεση του Δg.

Το ίδιο πείραμα μπορεί να επαναληφθεί για μια μεγαλύτερη κλίση π.χ. $3h$. Να επαναλάβετε το πείραμα και να εφαρμόσετε μία μόνο μέθοδο (π.χ. την μη γραφική μέθοδο) για τον υπολογισμό του $a \pm \Delta a$. Είναι το σχετικό σφάλμα $\Delta a/a$ μικρότερο ή μεγαλύτερο από το αντίστοιχο σφάλμα που βρήκατε στην προηγούμενη περίπτωση και γιατί;

Γ) Υπολογισμός της μάζας του κινητού. Το τελευταίο μέρος του πειράματος αφορά τον υπολογισμό της μάζας του κινητού. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας μία σταθερή γνωστή δύναμη στο κινητό και μετρώντας την επιτάχυνσή της. Η συσκευή επαναφέρεται στην οριζόντια θέση και ελέγχεται πάλι η οριζοντιότητά της. Κατόπιν συνδέουμε μία μαγνητική ταινία παχους ~ 0.5 cm στο κινητό και την περνάμε πάνω από μια τροχαλία αέρα (που βρίσκεται προσαρμοσμένη στο ένα άκρο του αερόδρομου). Στο άλλο άκρο της ταινίας κρεμάμε ένα μικρό βάρος μάζας m (της τάξης των λίγων g)

Εστω M η προς μέτρηση μάζα του κινητού. Η τάση T της ταινίας είναι μικρότερη από το βάρος mg, επειδή το σώμα μάζας m επιταχύνεται προς τα κάτω με την ίδια επιτάχυνση, όπως και το κινητό. Η εξίσωση της κίνησης για την μάζα m είναι

$$mg - T = ma$$

ενώ για το σώμα M είναι

$$T = Ma$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$M = (\frac{g}{a} - 1)m. \tag{6}$$

Η επιτάχυνση a μπορεί να μετρηθεί με οποιαδήποτε από τις μεθόδους που συζητήθηκαν προηγουμένως (π.χ. την 2η μέθοδο στην οποία απαιτείται γραφική παράσταση του $v = f(t)$). Μετρείστε την επιτάχυνση a και υπολογίστε την μάζα M και στη συνέχεια εκτιμήστε το πειραματικό σφάλμα ΔM. Ζυγίστε την μάζα M και συγκρίνετε τις δύο τιμές. Συμφωνούν μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος;

Ερωτήσεις

1) Ποιά είναι περίπου η εκατοστιαία διαφορά μεταξύ $\sin\alpha$ και α εάν $\alpha = 1^\circ$ καί πόση όταν $\alpha = 10^\circ$;

2) Πόσο είναι το πειραματικό σφάλμα στις μετρήσεις των αποστάσεων των σημείων της ταινίας; Τι σφάλμα περίπου θα περίμενε κανείς στην τιμή της επιτάχυνσης, λόγω του σφάλματος στη μέτρηση των αποστάσεων;

3) Που είναι η τριβή του στρώματος αέρα πιο σημαντική στις μικρές ή στις μεγάλες ταχύτητες του κινητού και γιατί;

4) Μεταβάλλεται η δύναμη τριβής με τη μάζα του κινητού και γιατί; Πως θα μπορούσε κάποιος να το ελέγξει αυτό πειραματικά;

5) Στο τελευταίο μέρος του πειράματος θεωρούμε ότι η συσκευή είναι κεκλιμένη κατά γωνία α αντί να είναι οριζόντια. Βρείτε μια σχέση για την επιτάχυνση. Δείξτε ότι η επιτάχυνση μπορεί να έχει θετική ή αρνητική φορά και ότι αυτό εξαρτάται από τις τιμές του m, M και α. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια γωνία, για την οποία η επιτάχυνση είναι μηδέν. Θα μπορούσε να καθορισθεί η μάζα M από την μέτρηση αυτής της γωνίας; Πως; Τι πλεονεκτήματα θα είχε αυτό;

Προτεινόμενο πρόγραμμα.

Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει τα εξής:

1) Είσοδο πειραματικών δεδομένων

α) μιας σειράς μετρήσεων t_i, s_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ ($n \geq 15$) για την περίπτωση της κίνησης με σταθερή ταχύτητα και δημιουργία αρχείου A.

β) μιας σειράς μετρήσεων t_i, s_i,$i = 1, 2, \cdots, n$ ($n \geq 15$) για την επιταχυνόμενη κίνηση, την γωνία του κεκλιμένου επιπέδου και δημιουργία αρχείου B

2) Χρήση του αρχείου Α. Προσαρμογή με Ε.Τ στα δεδομένα $s = s(t)$ μιας ευθείας γραμμής $s = s_0 + vt$. Κατασκευή γραφικού που θα απεικονίζει τα ζεύγη των μετρήσεων και την καλλίτερη ευθεία που περνά μέσα απ' αυτά. Εκτύπωση των τιμών s_0 και v της ευθείας.

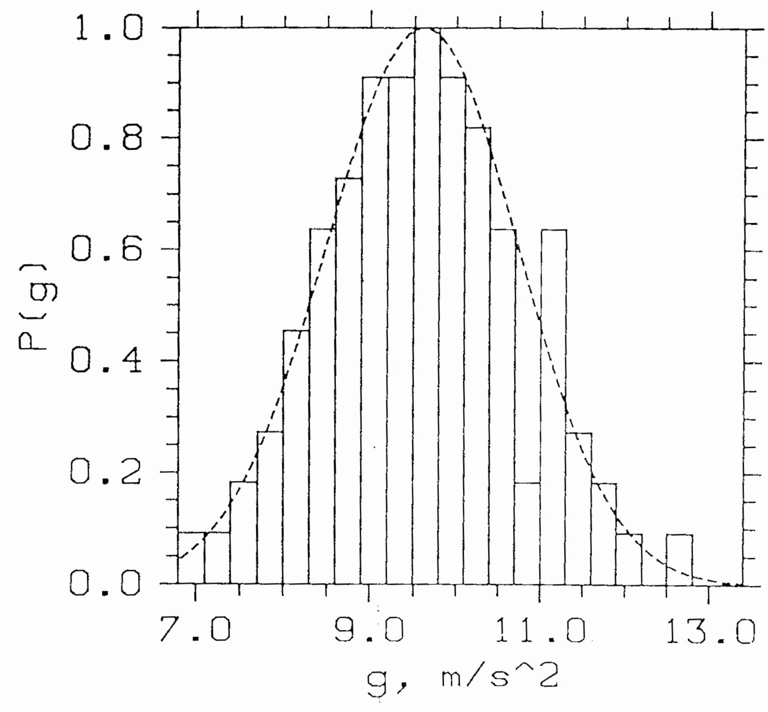
3) Χρήση του αρχείου Β. Με βάση τις μετρήσεις t_i, s_i βρείτε τις τιμές της στιγμιαίας ταχύτητας v_j $(j = 2, 3, 4, \cdots, n-1)$ τις χρονικές στιγμές t; Κάνετε χρήση όλων των τιμών της $v - j$ *ισοβαρώς*, και υπολογίστε (με ανακυκλώσεις) ένα μεγάλο αριθμό τιμών (π.χ. ≥ 200) της επιτάχυνσης a_i (χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης), και από αυτή στην συνέχεια την επιτάχυνσης της βαρύτητας $g_i = a_i/\sin\alpha$. Επιπλέον, κάνοντας χρήση των τιμών g_i $(i = 1, 2, \cdots, N$ και $N \geq 200)$ υπολογίστε την μέση τιμή

$$\overline{g} = (\sum_{i=1}^{N} g_i)/N$$

και την τυπική απόκλιση

$$\sigma_g = [\{\sum_{i=1}^{N}(\overline{g} - g_i)^2]/N\}^{1/2}$$

Στη συνέχεια βρείτε το ιστόγραμμα των τιμών του g_i. Κάνετε ένα γραφικό, όπου θα απεικονίζεται το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα καθώς και η κανονικοποιημένη κατανομή Gauss $G(g)$ (βλέπε μέρος Α), η οποία έχει μέση τιμή g και τυπική απόκλιση σ_g. Δηλαδή το γραφικό αυτό του προγράμματός σας θα μοιάζει με το αμέσως παρακάτω.



Β11. Κρούσεις

Στο πείραμα αυτό θα διερευνήσετε τις κρούσεις μεταξύ δύο κινητών στον αερόδρομο. Οι βασικές αρχές που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των κρούσεων είναι ο 2ος και 3ος νόμος του Νεύτωνα απ' όπου προκύπτει η αρχή διατήρησης της ορμής.

Δύο κινητά κινούνται στον οριζοντιομένο αερόδρομο και συγκρούονται έτσι ώστε, σε πρώτη προσέγγιση, να θεωρούμε οτι δεν εξασκούνται άλλες οριζόντιες δυνάμεις σε αυτά εκτός από την στιγμιαία δύναμη που εξασκεί το ένα στο άλλο κατά τη κρούση. Εστω ότι οι μάζες τους είναι m_1 και m_2 και οι ταχύτητές τους v_1 και v_2. Επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματική ποσότητα, θεωρούμε την v_1 ως θετική ή αρνητική αν m_1 κινείται προς τα δεξιά ή αριστερά αντίστοιχα (το ίδιο ισχύει για την ταχύτητα v_2). Και οι δύο ταχύτητες θεωρούνται μη συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου επειδή μεταβάλλονται στιγμιαία κατα τη κρούση.

Οταν τα κινητά βρίσκονται στιγμιαία σε επαφή κατά τη διάρκεια της κρούσης εξασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Υποθέτουμε οτι οι δυνάμεις που εξασκούνται στις μάζες m_1 και m_2 είναι F_1 και F_2 αντίστοιχα και έχουν το ίδιο σημείο (θετικό ή αρνητικό), όπως και οι ταχύτητες. Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F_1 = m_1\frac{dv_1}{dt}, \qquad F_2 = m_2\frac{dv_2}{dt} \tag{1}$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, οι δύο δυνάμεις αλληλεπίδρασης, F_1 και F_2, έχουν ίσο μέγεθος αλλά διαφορετικές διευθύνσεις, έτσι ώστε

$$F_1 = -F_2 \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε

$$m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt} = 0$$

η οποία μπορεί να γραφεί σαν

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2) = 0 \tag{3}$$

Η ποσότητα m_1v_1 είναι η ορμή του πρώτου κινητού και συνήθως συμβολίζεται με P_1 (P_2 για το άλλο κινητό). Από την (3) συμπεραίνουμε ότι η ολική ορμή, $P_1 + P_2$, δεν μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της κρούσης, καθ' όσον η παράγωγός της ως προς τον χρόνο είναι μηδέν, δηλαδή

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{σταθ.} \tag{4}$$

Σύμφωνα με την (4) η ορμή **διατηρείται στη διάρκεια της κρούσης.** Σημειώστε ότι, το αποτέλεσμα αυτό δεν εξαρτάται από την περιπλοκότητα των δυνάμεων κατά την κρούση, και ότι η διατήρηση της ορμής ισχύει μόνον εφ' όσον δεν εξασκούνται κατά τη κρούση εξωτερικές δυνάμεις στα κινητά.

Συνήθως ταξινομούμε τις κρούσεις σύμφωνα με την σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση. Εάν η σχετική ταχύτητα έχει το ίδιο μέγεθος πριν και μετά, η κρούση λέγεται τελείως ελαστική. Αν η σχετική ταχύτητα έχει μικρότερο μέγεθος μετά από ότι πριν, η κρούση είναι ημιελαστική, και τέλος αν η σχετική ταχύτητα μετά τη κρούση είναι μηδέν (δηλαδή αν τα δύο σώματα κολλούν το ένα στο άλλο) η κρούση είναι ανελαστική ή πλαστική. Η σχέση της τελικής προς την αρχική σχετική ταχύτητα ονομάζεται συντελεστής κρούσης (coefficient of restitution) που συμβολίζεται με ϵ. Για τελείως ελαστική κρούση $\epsilon = 1$, για τελείως ανελαστική $\epsilon = 0$ ενώ για ημιελαστική κρούση $0 < \epsilon < 1$. Π.χ. στη περίπτωση που η μάζα m_1 έχει πριν την κρούση ταχύτητα v_0 και η μάζα m_2 βρίσκεται σε ηρεμία, τότε σύμφωνα με τον ορισμό, ο συντελεστής κρούσης είναι

$$\epsilon = \frac{v_2 - v_1}{v_0}, \tag{5}$$

όπου v_1 και v_2 είναι οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε την αρχική (πριν την κρούση) και την τελική (μετά την κρούση) κινητική ενέργεια. Το πρόβλημα θα εξετασθεί αναλυτικά για την περίπτωση που $m_1 = m_2$ και για την περίπτωση που το κινητό m_2 παραμένει ακίνητο πριν την κρούση. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{6}$$

και αφού $m_1 = m_2$

$$v_0 = v_1 + v_2 \tag{7}$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να συνδυασθεί με την (5), έτσι ώστε να έχουμε τις παρακάτω εκφράσεις για v_1 και v_2

$$v_1 = \frac{1}{2}(1-e)v_0 \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{1}{2}(1+e)v_0 \tag{8}$$

Στη συνέχεια, αν R είναι ο λόγος της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια, δηλαδή

$$R = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}{\frac{1}{2}m_1 v_0^2}, \tag{9}$$

τότε το μέγεθος R για την περίπτωση ίσων μαζών παίρνει τη μορφή

$$R = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_0^2} \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας τις (8), η (10) παίρνει την μορφή

$$R = \frac{1}{2}(1+e^2) \tag{11}$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η κινητική ενέργεια μετά είναι ίση με αυτή πρίν τη κρούση μόνον όταν η κρούση είναι τελείως ελαστική, δηλαδή όταν $e = 1$. Αν $e < 1$, τότε $R < 1$ και η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι μικρότερη από αυτή πριν την κρούση. Σημειώστε ότι η ελαχίστη τιμή του R είναι $1/2$ (όταν $e = 0$, δηλαδή για ανελαστική κρούση). Μια παρόμοια έκφραση για το R ισχύει για την περίπτωση ανίσων μαζών

$$R = \frac{m_1 + e^2 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{12}$$

η οποία δείχνει πάλι ότι η κινητική ενέργεια διατηρείται μόνον όταν $e = 1$.

Πείραμα

Α) Ισες μάζες. Βάλτε δύο πανομοιότυπα κινητά στον οριζοντιομένο αερόδρομο τα οποία φέρουν ελάσματα κρούσης προσαρμοσμένα στα άκρα τους. Τοποθετείστε σε ηρεμία το ένα κινητό στο μέσο περίπου του φορέα και αναγκάστε το άλλο να κινηθεί με ταχύτητα της τάξης των 20 cm/s ώστε να κτυπήσει το πρώτο. Επειδή οι μάζες των κινητών είναι ίσες, θα περίμενε κανείς, αφού η ορμή διατηρείται, μετά την κρούση να υπάρχει ανταλλαγή των κινητικών καταστάσεων των δύο σωμάτων. Στο πείραμα χρειάζεται να το επιβεβαιώσετε αυτό μέσα από μια ποσοτική ανάλυση, δηλαδή να βρείτε βασικά αν η ορμή διατηρείται μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος. Για λεπτομερή μελέτη της κρούσης χρειάζεστε τις ταχύτητες των κινητών πριν και μετά. Αυτές μπορούν να βρεθούν αν χρησιμοποιήσουμε τον σπινθηριστή και αποτυπώσουμε σε ταινία ειδικού χαρτιού τις θέσεις των κινητών πριν και μετά την κρούση σαν συνάρτηση του χρόνου. Αφού πάρετε τα 'ίχνη' αυτά η ανάλυση στη συνέχεια θα γίνει όπως και στο μέρος Α της άσκησης Β10 για την εύρεση της ταχύτητας και του σφάλματός της πρίν και μετά την κρούση.

Τι συμπεραίνετε σχετικά με : **1)** τη διατήρηση της ορμής, **2)** τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, και **3)** τον συντελεστή κρούσης;

Για τη μελέτη μιας μη πλαστικής κρούσης δύο κινητών ίσης μάζας, χρησιμοποιείστε ταινία διπλής επιφάνειας κόλλησης και προσαρμόστε την στις επιφάνειες κρούσης των ελασμάτων των κινητών. Στή συνέχεια μέσω του σπινθηριστή και της προηγούμενης διαδικασίας θα καθορίσετε την αρχική και τελική ταχύτητα των κινητών και θα εξετάσετε πάλι αν διατηρείται η ορμή και η κινητική ενέργεια μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος. Τι έγινε η κινητική ενέργεια που χάθηκε (σε σχέση με αυτή πριν την κρούση);

<u>Β) Ανισες μάζες.</u> Προσθέστε βάρη στο ένα κινητό, ή χρησιμοποιείστε ένα βαρύτερο, για να μελετήσετε κρούσεις με άνισες μάζες. Κάνετε ποιοτικές παρατηρήσεις για τις περιπτώσεις $m_1 > m_2$ και $m_1 < m_2$ και σημειώστε τα αποτελέσματα. Εκλέξτε ένα συνδυασμό μαζών για ποσοτική ανάλυση. Σημειώστε ότι στη περίπτωση αυτή είναι αναγκαίο να μετρηθούν τρείς ταχύτητες: η αρχική και τελική του m_1 και η τελική ταχύτητα του m_2. Ολες αυτές οι ταχύτητες μπορούν να μετρηθούν στην ιδια ταινία ειδικού χαρτιού με την βοήθεια του σπινθηριστή εφόσον γίνει το κατάλληλο κύκλωμα σύνδεσης των ακροδεκιών της γεννήτριας παλμών. Αφού αποτυπώσετε τις κινήσεις, ερευνείστε ποσοτικά (με τον προηγούμενο τρόπο ανάλυσης) την διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας πριν και μετά την κρούση. Αν υπάρχει χρόνος μελετείστε επίσης την περίπτωση της ανελαστικής κρούσης με άνισες μάζες.

<u>Γ) Μαγνητοστατική δύναμη.</u> Η μαγνητοστατική δύναμη αλληλεπίδρασης (μεταξύ των

πόλων δύο μαγνητών), η οποία ακολουθεί τον νόμο του Coulomb ($F_m \propto (p_1 \cdot p_2)/r^2$, όπου p_1, p_2 είναι οι μαγνητικές ποσότητες των δύο πόλων και r η μεταξύ τους απόσταση), μπορεί να μελετηθεί με την βοήθεια της συσκευής του αερόδρομου. Είναι ενδιαφέρον να ερευνήσει κανείς, πως η δύναμη αυτή μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των μαγνητών. Αυτό αποτελεί και το αντικείμενο του παρακάτω πειράματος.

Εδώ παρέχονται μικροί κεραμικοί μαγνήτες που προσαρμόζονται στα άκρα δύο κινητών έτσι ώστε καθώς το ένα κινητό πλησιάζει το άλλο να ενεργεί μία απωστική μαγνητική δύναμη. Με τα κινητά στο ένα άκρο της συσκευής και τους μαγνήτες ο ένας απέναντι στον άλλο, υψώστε σε ένα ορισμένο ύψος h το άλλο άκρο του αερόδρομου. Το κινητό, που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του φορέα, θα ηρεμήσει στη θέση εκείνη όπου η μαγνητική δύναμη ισορροπείται από την συνιστώσα του βάρους $mg \sin\alpha$, όπου α είναι η γωνία κλίσης του αερόδρομου από το οριζόντιο επίπεδο. Μετρείστε ακριβώς την απόσταση μεταξύ των μαγνητών και επαναλάβατε την μέτρηση για διάφορες (6-7) γωνίες κλίσης α. Υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής δύναμης για κάθε θέση και κατόπιν κατασκευάστε την γραφική παράσταση της μαγνητικής δύναμης, σαν συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των μαγνητών. Τι συμπεραίνετε; Για να βρείτε ότι $F_m \propto r^{-2}$, θα πρέπει να κάνετε επίσης το διάγραμμα $\log F_m, \log r$, και να προσαρμόσετε μία ευθεία γραμμή της οποίας την κλίση θα την συγκρίνετε με τη δύναμη του -2 που αναμένεται από τον νόμο του Coulomb.

<u>Δ) Μέτρηση μαγνητοστατικής δυναμικής ενέργειας.</u> Η δυναμική ενέργεια λόγω της μαγνητοστατικής αλληλεπίδρασης, V_m, μπορεί να μετρηθεί με την ίδια πειραματική διάταξη. Με τον αερόδρομο κεκλιμένο, όπως και προηγουμένως, μετακινείστε το ένα κινητό σε μια ορισμένη θέση ύψους h και ελευθερώστε το χωρίς αρχική ταχύτητα. Αυτό θα κινηθεί προς το άλλο μέχρι μια μικρή απόσταση από αυτό, οπότε και θα 'ανακλαστεί' προς τα πίσω υπό την επίδραση της απωστικής μαγνητικής δύναμης. Στο σημείο που αντιστρέφεται η φορά της κίνησης, το κινητό έχει ταχύτητα ίση με μηδέν και συνεπώς μηδέν κινητική ενέργεια. Η αύξηση της μαγνητικής δυναμικής ενέργειας στο σημείο αυτό, θα πρέπει να είναι ίση με την ελλάττωση της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας που ισούται με $mgl \sin\alpha$, όπου l είναι το διάστημα που διάνυσε το κινητό από την θέση όπου αφέθηκε ελεύθερο μέχρι το σημείο 'α-

νάκλασης'. Πάρτε αρκετές (6-7) τιμές του l, π.χ. αφήνοντας το κινητό αρχικά από το ύψος h οπότε αυτό κάνει μια σειρά αναπηδήσεων για κάθε μια των οποίων έχουμε διαφορετικό l, και μετρήστε τις αντίστοιχες αποστάσεις r μεταξύ των μαγνητών των δύο κινητών. Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μια σειρά τιμών της μαγνητικής ενέργειας που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αποστάσεις r μεταξύ των μαγνητών.

Για την διερεύνηση της συναρτησιακής σχέσης $V_m = f(r)$, κατασκευάστε ένα διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας σαν συνάρτηση της μεταξύ των μαγνητών απόστασης. Πώς μπορείτε να βρείτε αν η μεταβολή της V_m ακολουθεί τη θεωρητική πρόβλεψη: $V_m \propto r^{-1}$;

Βρείτε την κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα $V_m = f(r)$ σε διάφορα σημεία και λαμβάνοντας υπ' όψη την σχέση μεταξύ δύναμης και δυναμικής ενέργειας, δηλαδή

$$F_m = -\frac{dV_m}{dr},$$

υπολογίστε την δύναμη F_m σαν συνάρτηση της απόστασης r μεταξύ των μαγνητών. Για να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις τιμές της F_m που βρήκατε στο μέρος (Γ), τοποθετείστε τα νέα ζεύγη των τιμών (F_m, r) στο προηγούμενο διάγραμμα. Τι συμπεραίνετε;

Αντίστροφα, θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει την δυναμική μαγνητική ενέργεια V_m από την καμπύλη της F_m σαν συνάρτηση του r (μέρος Γ) με γραφική ολοκλήρωση π.χ. μετρώντας τα τετραγωνάκια χαρτιού (το εμβαδό) που είναι κάτω από την καμπύλη. Ενας άλλος δυνατός τρόπος, είναι να χρησιμοποιήσετε την συναρτησιακή σχέση $F_m = kr^n$ που βρήκατε με προσαρμογή καμπύλης προηγουμένως και στη συνέχεια να βρείτε με αναλυτική ολοκλήρωση τη δυναμική ενέργεια V_m σαν συνάρτηση του r. Αν θέλετε να ικανοποιήσετε τη περιέργειά σας επιχειρείστε αυτούς τους υπολογισμούς και κάνετε συγκρίσεις.

Ερωτήσεις

1) Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε μία μικρή ποσότητα εκκρηκτικού στο ένα από τα δύο κινητά, ακριβώς στο σημείο επαφής τους, η οποία εκρήγνυται κατά την κρούση και απωθεί τα κινητά. Είναι η ορμή πριν και μετά την κρούση η ίδια; Η κινητική ενέργεια;

2) Ποιό είναι το αποτέλεσμα της τριβής μεταξύ του στρώματος αέρα και του κινητού

πάνω στα συμπεράσματά σας σχετικά με την διατήρηση της ορμής στις κρούσεις;

3) Αποδείξτε την σχέση (12) για την περίπτωση ανίσων μαζών.

4) Κατά την διάρκεια της κρούσης τα ελάσματα κρούσης συμπιέζονται και αποσυμπιέζονται, όπως σ' ένα ελατήριο. Πρέπει η δύναμη κρούσης να είναι ανάλογη της μετατόπισης (δηλ. όπως σε ένα ελατήριο $\vec{F} = -k\vec{x}$), ώστε η κρούση να είναι τελείως ελαστική; Αν όχι ποια πρέπει να είναι η αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η δύναμη;

Μελέτη Κρούσεων μέ Υπολογιστική Προσομοίωση

Πολλά φαινόμενα και νόμοι είναι δυνατόν να μελετηθούν με *Προσομοίωση* (Simulation) στον υπολογιστή. Εδώ δίνεται η ευκαιρία στον φοιτητή να εξοικειωθεί με τα αποτελέσματα της τεχνικής αυτής επαναλαμβάνοντας τα πειράματα κρούσης, που έκανε στον αερόδρομο ή και άλλα που θα ήθελε να κάνει αλλά δεν πρόλαβε), στην οθόνη ενός μικρουπολογιστή, με την βοήθεια ενός έτοιμου προγράμματος. Για την χρήση του προγράμματος χρειάζονται λίγα Αγγλικά και καλή γνώση και κατανόηση της θεωρίας των κρούσεων σε μία διεύθυνση.

Είναι βασικό για τον φοιτητή να έχει καταλάβει τη διαφορά μεταξύ πραγματικού πειράματος και προσομοίωσης. Εδώ, η προσομοίωση, διερευνά τις κρούσεις στον αερόδρομο με βάση τις εξισώσεις που αναφέρθηκαν στην αρχή της ασκησης Β11. Τα αποτελέσματα των κρούσεων μεταξύ των δύο κινητών που θα δείτε στην οθόνη, θα πλησιάζουν, αλλά δεν θα συμφωνούν με αυτά που παρατηρήσατε στό πείραμα, γιατί τα σφάλματα που εισάγονται, λόγω τριβών, παρατηρητού, κακής ευθυγράμμισης ή οριζοντίωσης της συσκευής, κ.α., δεν λαμβάνονται υπ' όψη στο πρόγραμμα (πως θα μπορούσαν εξάλλου να ληφθούν υπόψη;). Θα πρέπει να κατανοηθεί ότι, σε αντίθεση με το πείραμα, η προσομοίωση δεν μπορεί να ελέγξει την ορθότητα της θεωρίας. Μην ξεχνάτε : **Η προσομοίωση δεν μπορεί να αντικαταστήσει το πείραμα**, αλλά βοηθά στη φυσική διερεύνηση του φαινομένου.

Το όλο πρόγραμμα βρίσκεται σε ενα μικρουπολογιστή και περιλαμβάνει 4 μέρη που επιγράφονται: THEORY, DEMONSTRATIONS, TUTORIAL και DESIGN A COLLISION.

Ολα τα κείμενα είναι στα Αγγλικά. *Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τουλάχιστον το τέταρτο μέρος (DESIGN A COLLISION) για τον σχεδιασμό 2 ή 3 κρούσεων των οποίων τις παραμέτρους, αποτελέσματα καθώς και παρατηρήσεις-σχόλια θα πρέπει να παρουσιάσει στην αναφορά του.*

Μια σύντομη περιγραφή επί του περιεχομένου των 4 μερών του προγράμματος ακολουθεί αμέσως παρακάτω:

1) THEORY (Θεωρία): Εδώ δινονται λεπτομερή εισαγωγικά θεωρητικά στοιχεία κρούσεων μεταξύ δύο κινητών σε μία διεύθυνση. Οι έννοιες της ορμής, κινητικής ενέργειας, ελαστικής και ανελαστικής κρούσης, εξετάζονται λεπτομερώς, ενώ παρέχονται και οι βασικές εξισώσεις που χρειάζονται για να καθορίσουν την κατάσταση πριν και μετά την κρούση. Μπορείτε να προχωρήσετε στην επόμενη σελίδα πιέζοντας 'SPACE' ή να πάτε στην προηγούμενη πιέζοντας 'RETURN'.

2) DEMONTRATIONS (Επιδείξεις): Εδώ επιδεικνύονται 7 διαφορετικές περιπτώσεις κρούσεων που περιλαμβάνουν: ελαστική κρούση μεταξύ δύο κινητών ίσης μάζας, ένα κινητό με μεγαλύτερη μάζα συγκρούεται μ' ένα μικρότερης μάζας, έτσι ώστε και τα δύο κινούνται μετά την κρούση στην ίδια διεύθυνση, μία πλήρως ανελαστική κρούση ίσων ή ανίσων μαζών, κ.α.. Στην οθόνη εμφανίζεται ένας γραμμικός κανόνας και ένα ψηφιακό χρονόμετρο, με τα οποία προσδιορίζεται η θέση των δύο κινητών κάποια χρονική στιγμή. Ενα πλεονέκτημα των προσομοιώσεων αυτών είναι ότι ο φοιτητής μπορεί να ακινητοποιήσει /αποκινητοποιήσει τα κινητά (πιέζοντας SPACE), καταγράφοντας έτσι αποστάσεις και χρόνους.

3) TUTORIAL (Φροντιστηριακό): Ενας κατάλογος προς επιλογή (menu) διαφόρων προβλημάτων εμφανίζεται στην οθόνη, των οποίων η λύση απαιτεί τον καθορισμό διαφόρων κινηματικών ποσοτήτων, που σχετίζονται με την κρούση (π.χ. ταχύτητα, ορμή, κινητική ενέργεια για ελαστικές και μη κρούσεις). Τα προβλήματα παρουσιάζονται με μια προσομοίωση της κρούσης. Ο φοιτητής ερωτάται και θα πρέπει να δώσει την σωστή απάντηση, αν

για δύο συνεχείς φορές αποτύχει, τότε το πρόγραμμα του δίνει τη σωστή απάντηση.

4) DESIGN A COLLISION (Σχεδιασμός Κρούσης): Ο φοιτητής μπορεί να επιλέξει μεταξύ ελαστικής ή ανελαστικής κρούσης και κατόπιν να έχει την δυνατότητα να εκλέξει από ένα κατάλογο παραμέτρων τιμές για τις μάζες και ταχύτητες των δύο κινητών. Στη συνέχεια η κρούση προσομοιώνεται στην οθόνη, ενώ δίνεται και μία σειρά από αριθμητικά αποτελέσματα (π.χ. μάζες, αρχικές και τελικές ταχύτητες, αρχικές και τελικές ορμές, ολική ορμή πριν και μετά, αρχικές και τελικές κινητικές ενέργειες, ολική κινητική ενέργεια πριν και μετά, % διαφορές ποσοτήτων πριν και μετά την κρούση). Επίσης εμφανίζονται μερικές εκπλήξεις, όταν κανείς πειραματίζεται με διαφορετικές τιμές, που δείχνουν την ποικιλία και πλούτο των αποτελεσμάτων των κρούσεων σε μια κατεύθυνση.

B12. Παθητικές Δυνάμεις

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσετε διάφορες παθητικές δυνάμεις (dissipative forces), που ονομάζονται έτσι επειδή ενεργούν ώστε να καταναλίσκεται ενέργεια κατά την κίνηση ενός σώματος. Στην περίπτωση κίνησης στον αερόδρομο, οι παθητικές, η αποσβεστικές (damping forces), δυνάμεις που θα μελετηθούν περιλαμβάνουν τις δυνάμεις μηχανικής τριβής, δυνάμεις μαγνητικής επαγωγής, και δυνάμεις αλληλεπίδρασης σε μη απολύτως ελαστικές κρούσεις.

Η κίνηση στον αερόδρομο δεν είναι απολύτως χωρίς τριβή. Η κύρια αιτία της τριβής οφείλεται στο λεπτό στρώμα αέρα μεταξύ του κινητού και του φορέα. Μπορεί να δειχθεί ότι η δύναμη είναι ανάλογη της επιφάνειας A του κινητού, της σχετικής ταχύτητας του κινητού ως προς τον φορέα και αντιστρόφως ανάλογη του πάχους d του στρώματος του αέρα πάνω στο οποίο 'επιπλέει' το κινητό, δηλαδή

$$F = -\frac{\eta A v}{d} \tag{1}$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους (coefficient of viscosity) του ρευστού (εδώ αέρα).

Το πλέον ενδιαφέρον γνώρισμα αυτής της δύναμης είναι η σχέση αναλογίας προς την ταχύτητα του κινητού, δηλαδή

$$F = -bv, \tag{2}$$

όπου σύμφωνα με την (1) η σταθερά b εξαρτάται από τις διαστάσεις της επιμέρους διάταξης και των ιδιοτήτων του ρευστού. Το αρνητικό σημείο δείχνει, ότι η διεύθυνση της F είναι πάντοτε αντίθετη της ταχύτητας v.

Οταν ένα κινητό κινείται σ' ένα οριζόντιο επίπεδο χωρίς άλλη δύναμη εκτός της τριβής, η εξίσωση της κίνησής του είναι:

$$F = ma \quad \text{ή} \quad -bv = m\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

και δείχνει ότι ο ρυθμός μείωσης της ταχύτητας του κινητού είναι ανάλογος του μέτρου της ταχύτητας. Για μια αρχική ταχύτητα v_0 η επιβράδυνση είναι μεγαλύτερη στην αρχή ενώ μειώνεται καθώς η ταχύτητα ελαττώνεται.

Είναι εύκολο να βρούμε την ολική απόσταση που διανύει το κινητό πριν σταματήσει. Εκφράζουμε το dv/dt, μέσω του dv/dx κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \tag{4}$$

Αντικαθιστούμε την (4) στην (3) και έχουμε

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{b}{m}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί, έτσι ώστε

$$v = -\frac{b}{m}x + c$$

όπου c είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Αν v_0 είναι η αρχική ταχύτητα στο σημείο $x = 0$ τότε $c = v_0$, ώστε η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$v = v_0 - \frac{b}{m}x. \tag{5}$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι το κινητό σταματά ($v = 0$) αφού διανύσει μια απόσταση x ίση με

$$x = \frac{mv_0}{b} \tag{6}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί εξισώνοντας την ώθηση δύναμης με την ολική μεταβολή της ορμής, δηλαδή

$$\int F dt = \int -bv dt = \int -b dx = -bx = -mv_0.$$

Αλλο παράδειγμα παθητικής δύναμης, που είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος, απαντάται στην περίπτωση που δημιουργούνται επαγωγικά ρεύματα σε ένα αγωγό λόγω της κίνησής του σε ένα μαγνητικό πεδίο. Οταν ένα ηλεκτρικά αγώγιμο σώμα κινείται μέσω ενός μαγνητικού πεδίου με ταχύτητα v, η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή δημιουργεί στον αγωγό επαγωγικά ρεύματα, των οποίων η ένταση είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της ροής, $d\Phi/dt$ [1]. Τα επαγωγικά ρεύματα θα προκαλέσουν μία δύναμη στο κινούμενο σώμα η οποία είναι ανάλογη της έντασης του ρεύματος, των διαστάσεων του αγωγού και του μαγνητικού

[1] Βλέπε Μέρος Β, *Halliday and Resnick* Σελ. 229,230,241–244.

πεδίου, ενώ η διεύθυνσή της είναι τέτοια ώστε να αντιδρά στην κίνηση (παθητική δύναμη). Το μέτρο της δύναμης είναι

$$F = -bv,$$

δηλαδή εδώ έχουμε το μαγνητικό ανάλογο της μηχανικής δύναμης τριβής που εξετάσαμε προηγουμένως. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά b είναι ανάλογη της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του αγωγού, της επιφάνειας του αγωγού και του τετραγώνου της έντασης του μαγνητικού πεδίου (βλέπε ερώτηση 1).

Για τη μελέτη της μαγνητικής αποσβεστικής δύναμης στον αερόδρομο, τοποθετούμε μόνιμους μαγνήτες στα κινητά με αποτέλεσμα η επιβράδυνση στην κίνηση να προκαλείται από επαγωγικά ρεύματα στο φορέα του αερόδρομου, λόγω της σχετικής κίνησης του προς το κινητό με τους μαγνήτες.

Μία τρίτη κατηγορία παθητικών δυνάμεων στην συσκευή του αερόδρομου, σχετίζεται με την συμπεριφορά των μεταλλικών ελασμάτων. Οταν ένα κινητό συγκρούεται με κάποιο άλλο, μέσω ελασμάτων προσαρμοσμένων στα κινητά, η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση, είναι λίγο μικρότερη σε μέγεθος απ' ότι πριν την κρούση. Ο λόγος των δύο σχετικών ταχυτήτων, μετά και πριν, ονομάζεται συντελεστής κρούσης ϵ (όπως και στο πείραμα Β11). Ο λόγος ότι $\epsilon < 1$, οφείλεται στο ότι μηχανική ενέργεια καταναλίσκεται σε θερμότητα με την συμπίεση και αποσυμπίεση των ελασμάτων κατά τη κρούση.

Μια ενδιαφέρουσα μελέτη όλων των παραπάνω παθητικών δυνάμεων, μπορεί να γίνει στον αερόδρομο. Η συσκευή ανυψώνεται από το ένα της άκρο κατά μία γωνία κλίσης α και ένα κινητό αφήνεται από το ψηλότερο άκρο να κινηθεί προς τα κάτω. Στο κατώτερο άκρο συγκρούεται και αναπηδά προς τα πίσω αλλά δεν επιστρέφει στο ίδιο σημείο απ' όπου ξεκίνησε λόγω των αποσβεστικών δυνάμεων που εξασκούνται στο σώμα. Μετά από μία διαδοχική σειρά αναπηδήσεων, το κινητό τελικά σταματά στο κάτω άκρο του φορέα. Αν η αρχική απόσταση απ' όπου αφέθηκε το κινητό είναι x_0, τότε μετά την πρώτη αναπήδηση το κινητό διανύει μία απόσταση $x_1 < x_0$, μετά την δεύτερη αναπήδηση $x_2 < x_1$ κ.ο.κ. Οι αποστάσεις αυτές μπορούν να μετρηθούν σε μία κλίμακα προσαρμοσμένη κατά μήκος του φορέα του αερόδρομου.

Οι εξισώσεις κίνησης του παραπάνω συστήματος, όπου συμπεριλαμβάνονται οι δυνάμεις τριβής (μηχανική και επαγωγική μαγνητική) και οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης στα ελάσματα κρούσης μπορούν να λυθούν ακριβώς. Οι ακριβείς λύσεις είναι περίπλοκες και δυσκολονόητες και γι' αυτό μια προσεγγιστική ανάλυση είναι πιο χρήσιμη. Παρ' όλο που και οι δύο παθητικές δυνάμεις (δηλ. της τριβής και των ελασμάτων κρούσης) συμμετέχουν στην κίνηση, μπορούμε να εξετάσουμε τα αποτελέσματά τους ξεχωριστά. Επίσης θα δούμε ότι κατά τη κίνηση η επίδραση της μιας δύναμης μπορεί να υπερισχύσει της άλλης.

Θα εξετάσουμε πρώτα τις δυνάμεις τριβής. Η αρχική δυναμική ενέργεια ως προς το σημείο κρούσης είναι $mgx_0 \sin\alpha$, ενώ μετά την πρώτη αναπήδηση είναι $mgx_1 \sin\alpha$. Η απώλεια ενέργειας συνεπώς είναι

$$mg\Delta x \sin\alpha \tag{7}$$

όπου $\Delta x = x_1 - x_0$. Επειδή η δύναμη βαρύτητας είναι συντηρητική, η απώλεια ενέργειας οφείλεται αποκλειστικά στο έργο που καταναλώνεται για την υπερνίκηση των δυνάμεων τριβής. Το έργο αυτό μπορεί να υπολογισθεί προσεγγιστικά, αν υποθέσουμε ότι η τριβή είναι μικρή σε σύγκριση με την δύναμη βαρύτητας, έτσι ώστε η κίνηση να είναι περίπου η ίδια όπως θα ήταν στην περίπτωση απουσίας της τριβής (!). Το έργο της τριβής κατά την διάρκεια της πρώτης καθόδου x_0 είναι

$$W = \int_0^{x_0} F dy = \int_0^{x_0} -bv dy \tag{8}$$

όπου η μεταβλητή y παριστάνει την στιγμιαία απόσταση του κινητού από το σημείο αρχής x_0. Η επιτάχυνση του κινητού είναι περίπου $a = g\sin\alpha$, έτσι ώστε η ταχύτητα v σε κάθε θέση y δίνεται από την σχέση

$$v^2 = 2ay = 2g\sin\alpha y$$

Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή την εξίσωση (8) και έχουμε

$$W = \int_0^{x_0} -b(2ay)^{1/2} dy = -\frac{2b(2a)^{1/2}(x_0)^{3/2}}{3} \tag{9}$$

Το έργο της δύναμης τριβής στην επιστροφή είναι περίπου το ίδιο, ώστε η ολική απώλεια ενέργειας λόγω τριβής είναι $2W$. Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την εξίσωση (7) βρίσκουμε για το Δx

$$\Delta x = -\frac{2b(2x_0)^{3/2}}{3ma^{1/2}} \tag{10}$$

Ετσι η μεταβολή δρόμου μετά την πρώτη αναπήδηση είναι ανάλογη της αρχικής απόστασης στην 3/2 ($\Delta x \propto x_0^{3/2}$). Ομοια, η μεταβολή δρόμου μετά την δεύτερη αναπήδηση είναι ανάλογη του $x_1^{3/2}$ με την ίδια σταθερά αναλογίας κ.ο.κ. Αυτή η σχέση μπορεί να διερευνηθεί πειραματικά.

Για να εξετάσουμε τώρα τις παθητικές δυνάμεις στα ελάσματα κρούσης, ας θυμηθούμε ότι ϵ (ο συντελεστής κρούσης) είναι ο λόγος των σχετικών ταχυτήτων μετά και πριν την κρούση. Επειδή η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του v^2 ο λόγος των κινητικών ενεργειών ακριβώς μετά και ακριβώς πριν την κρούση είναι ϵ^2. Αν αγνοήσουμε εδώ τις απώλειες ενέργειας λόγω τριβής, ϵ^2 είναι ο λόγος της δυναμικής ενέργειας που αποκτά το κινητό στην πιο απομακρυσμένη απόσταση μετά την κρούση διά της δυναμικής ενέργειας στη θέση x_0 πριν την αναπήδηση (Γιατί;). Σύμφωνα μ' αυτό έχουμε

$$x_1 = \epsilon^2 x_0 \quad , \quad x_2 = \epsilon^2 x_1 \quad \text{κ.ο.κ}$$

απ' όπου η διαφορά σε ύψος για την πρώτη και δεύτερη αναπήδηση είναι

$$\Delta x = x_1 - x_0 = -(1-\epsilon^2)x_0 \quad \text{και} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = -(1-\epsilon^2)x_1 \tag{11}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι στην περίπτωση που τα ελάσματα κρούσης είναι ο κύριος μηχανισμός απώλειας μηχανικής ενέργειας, η ελάττωση της απόστασης Δx που διανύει το κινητό μετά την πρώτη αναπήδηση είναι ανάλογη της απόστασης x_0 πριν την αναπήδηση, αντί του $x_0^{3/2}$ που ισχύει για την περίπτωση που οι δυνάμεις τριβής είναι οι κύριες αποσβεστικές (παθητικές) δυνάμεις.

Πείραμα

<u>Α) Μηχανική απόσβεση.</u> Αφού οριζοντιώσετε την συσκευή εκτοξεύστε ένα κινητό και μετρείστε την αρχική του ταχύτητα και το σφάλμα της (με την μέθοδο που εφαρμόσατε στο μερος Α της Β10), όπως και την ολική απόσταση που διανύει το κινητό μεχρι να σταματήσει. Για τις μετρήσεις αυτές θεωρείστε ότι οι κρούσεις μέσω των ελασμάτων είναι τελείως ελαστικές. Από τα δεδομένα υπολογίστε την σταθερά απόσβεσης b χρησιμοποιώντας την (6) και το πειραματικό σφάλμα Δb.

Προσθέστε βάρη στο κινητό, ώστε περίπου η μάζα του να αυξηθεί κατά το 1/3 περίπου και επαναλάβετε τις προηγούμενες μετρήσεις και υπολογισμούς. Συγκρίνετε τις τιμές του b για τις δύο περιπτώσεις. Υπάρχει διαφορά; Γιατί;

Β) Μαγνητική απόσβεση. Για να παρατηρήσετε την μαγνητική απόσβεση, προσαρμόστε τέσσερις κεραμικούς μαγνήτες στο κινητό συμμετρικά. Προσαρμόστε αρκετές μάζες σ' ένα άλλο κινητό, ώστε να έχει το ίδιο βάρος με το πρώτο. Τοποθετείστε τα δύο κινητά στον αερόδρομο και σπρώξτε τα μαζί (με το μαγνητικό κινητό δεύτερο), ώστε να πάρουν και τα δύο την ίδια αρχική ταχύτητα. Τι παρατηρείτε; Καθορίστε την σταθερά εξασθένησης b για το μαγνητικό κινητό με την ίδια μέθοδο όπως και προηγουμένως στο μέρος Α. Σημειώστε ότι στην περίπτωση αυτή μετράτε το ολικό b, λόγω μαγνητικής και μηχανικής εξασθένησης.

Γ) Αναπήδηση. Στην περίπτωση αυτή ο αερόδρομος είναι κεκλιμένος κατά γωνία α. Προσαρμόστε ένα έλασμα κρούσης στο κάτω άκρο της συσκευής και ελευθερώστε το κινητό από το ψηλότερο σημείο του φορέα του αερόδρομου. Καταγράψτε (χρησιμοποιώντας την κλιμακα που είναι προσαρμοσμένη κατα μήκος του φορέα) την αρχική θέση και τις μετέπειτα θέσεις στις οποίες επιστρέφει το κινητό μετά από κάθε αναπήδηση. Εξετάστε την σχέση μεταξύ της απόστασης x πριν, και της ελάττωσης Δx μετά, την αναπήδηση. Τι συμπεραίνετε;

Εάν έχετε χρόνο, επαναλάβετε το πείραμα της αναπήδησης με μαγνητική εξασθένηση. Επίσης εξετάστε τα ίδια πράγματα για διαφορετικές γωνίες α. Ο συντελεστής κρούσης του ελάσματος μπορεί να μεταβληθεί, όταν περιτυλιχθεί ένα κομμάτι ελαστικού γύρω από την επιφάνεια κρούσης. Πως μεταβάλλεται (αν μεταβάλλεται) ο συντελεστής κρούσης e με την ταχύτητα του κινητού;

Λεπτομερής ανάλυση του πειράματος της αναπήδησης, μπορεί να γίνει με την χρήση λογαριθμικού χαρτιού. Οταν σ' αυτό το χαρτί κάνουμε τη γραφική παράσταση π.χ. του y έναντι του x, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, όπως αν κάνουμε την γραφική παράσταση του $\log y$ έναντι του $\log x$.

Για να καταλάβουμε τη χρησιμότητα αυτής της τεχνικής θα θεωρήσουμε πάλι την εξίσωση

(10). Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε τελικά

$$\log(-\Delta x) = \frac{3}{2}\log x_0 + \log\left(\frac{2b}{3m}\cdot\sqrt{\frac{8}{b}}\right) \tag{12}$$

Αν λοιπόν η κίνηση στο πείραμα αναπήδησης συμπεριφέρεται σύμφωνα με την εξίσωση (12), η γραφική παράσταση του $-\Delta x$ έναντι του x σε λογαριθμικό χαρτί, (που στην πραγματικότητα είναι η γραφική παράσταση του $\log(-\Delta x)$ έναντι του $\log x$), πρέπει να είναι μια ευθεία γραμμή μέ κλίση ίση με 3/2. Αν όμως το κινητό συμπεριφέρεται σύμφωνα με την εξίσωση (11), τότε έχουμε

$$\log(-\Delta x) = \log x + \log(1 - e^2) \tag{13}$$

Πάλι η γραφική παράσταση του $\log(-\Delta x)$ έναντι του $\log x$ πρέπει να είναι ευθεία γραμμή με κλίση 1. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι η κλίση της καμπύλης σε κάποια της περιοχή λέει ποιός μηχανισμός εξασθένησης κυριαρχεί σ' αυτή την περιοχή.

Πρίν το διάγραμμα, μπορεί κανείς να προβλέψει το σχήμα των καμπυλών. Θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψη, ότι οι μεγαλύτερες ταχύτητες στην κίνηση παρατηρούνται στις πρώτες λίγες αναπηδήσεις, έτσι ώστε οι δυνάμεις εξασθένησης είναι μεγαλύτερες στην αρχή και γίνονται λιγότερο σημαντικές μετά από ένα ορισμένο αριθμό αναπηδήσεων. Θα πρέπει όμως επίσης να λάβει κανείς υπ' όψη, ότι όταν οι ταχύτητες γίνουν πολύ μεγάλες, οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να βρούμε την εξίσωση (10) μπορεί να μην ισχύουν, ώστε να έχουμε αποκλίσεις από την αναμενόμενη κλίση των 3/2. Πως προβλέπετε να συμπεριφέρεται η κλίση του διαγράμματός σας;

Ερωτήσεις

1) Γιατί η μαγνητική δύναμη εξασθένησης είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης του μαγνητικού πεδίου και της αγωγιμότητας του υλικου; Αποδείξτε το.

2) Αποδείξτε ότι η ποσότητα m/b έχει μονάδες χρόνου. Ποιά είναι η σημασία αυτού του 'χρόνου' στο πείραμα; Π.χ. πως σχετίζεται με τον χρόνο που απαιτείται για για ένα κινητό που κινείται στον οριζοντιομένο αερόδρομο, να πάρει μία ταχύτητα v ίση με το μισό της αρχικής ταχύτητας v_0;

3) Συζητείστε λεπτομερώς την φύση των προσεγγίσεων που χρησιμοποιήθηκαν για να καταλήξουμε στην εξίσωση (10).

4) Για ένα κινητό που υφίσταται μόνο την τριβή του λεπτού στρώματος αέρα (viscous damping), πως μεταβάλλεται η σταθερά b με την μάζα m του κινητού;

5) Ενα κινητό ελευθερώνεται από την κορυφή του κεκλιμένου αερόδρομου με ταχύτητα v_0. Αποδείξτε ότι όταν το μήκος του φορέα είναι αρκετά μακρύ, θα φθάσει μία τελική ταχύτητα ('τερματική ταχύτητα'), η οποία είναι ανεξάρτητη της v_0. Βρείτε μια έκφραση για την τερματική ταχύτητα.

6) Είναι το αποτέλεσμα του αέρα που περιβάλλει το κινητό σημαντικό σε σύγκριση με το αποτέλεσμα του στρώματος αέρα, μεταξύ του κινητού και του φορέα στον καθορισμό της ολικής δύναμης τριβής; Εξηγείστε.

B13. Περιοδική Κίνηση

Ολοι γνωρίζουμε παραδείγματα περιοδικής κίνησης. Ενα ιδιαίτερα απλό είδος περιοδικής κίνησης απαντάται στη συμπεριφορά του αρμονικού ταλαντωτή, ο οποίος υπηρετεί σαν ένα μοντέλο που αντιπροσωπεύει τα βασικά χαρακτηριστικά άλλων περιοδικών κινήσεων. Τα κύρια χαραστηριστικά του αρμονικού ταλαντωτή είναι τα εξής:

α) Η δύναμη που ενεργεί στην ταλαντούμενη μάζα (δύναμη επαναφοράς) έχει μέγεθος ανάλογο της μετατόπισης της μάζας από τη θέση ισορροπίας και διεύθυνση προς την θέση ισορροπίας. Κατά συνέπεια, η επιτάχυνση της μάζας είναι ανάλογη της μετατόπισης.

β) Η κίνηση της μάζας είναι τέτοια, ώστε η μετατόπισή της από την θέση ισορροπίας είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

γ) Η συχνότητα των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητη του πλάτους.

Από τα παραπάνω μόνο το (α) είναι πράγματι θεμελιώδες. Τα (β) και (γ) προκύπτουν από το (α), όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Εστω σύστημα αρμονικού ταλαντωτή στον οποίο η μετατόπιση της μάζας m από την θέση ισορροπίας είναι x. Τότε η δύναμη επαναφοράς δίνεται από την σχέση

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \tag{1}$$

όπου k είναι μία σταθερά που ονομάζεται σταθερά δύναμης του συστήματος. Μια τέτοια δύναμη μπορεί να προκληθεί από ένα ελατήριο που υπακούει τον νόμο του Hooke (π.χ. βλέπε B5). Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

Η μετατόπιση x πρέπει να είναι συνάρτηση του χρόνου η οποία να ικανοποιεί την εξίσωση (2) και συνεπώς να αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$x = x_0 \cos\omega t \quad \text{και} \quad x = x_0 \sin\omega t \tag{3}$$

είναι λύσεις, όπου x_0 είναι μία σταθερά που ονομάζεται πλάτος και ω είναι ίσο με την ποσότητα $(k/m)^{1/2}$. Εδώ το x_0 καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες κίνησης του συστήματος, ενώ το ω εξαρτάται από τις βασικές παραμέτρους του συστήματος, δηλαδή τις σταθερές k και m.

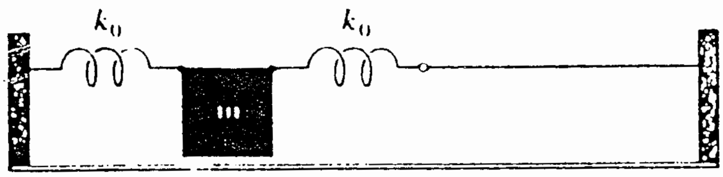
Κάθε φορά που η ποσότητα ωt αυξάνεται κατά 2π, η κίνηση συμπληρώνει ένα κύκλο (εδώ φυσικά με τη λέξη κύκλο δεν εννοούμε γεωμετρικό κύκλο). Ο χρόνος που χρειάζεται για ένα κύκλο ονομάζεται περίοδος και συμβολίζεται με το T. Βλέπουμε ότι το T δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(m/k)^{1/2}. \tag{4}$$

Το αντίστροφο της περιόδου είναι ο αριθμός των κύκλων ανά μονάδα χρόνου, η συχνότητα και συμβολίζεται με το f. Δηλαδή έχουμε

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

Η ποσότητα ω αντιπροσωπεύει το χρονικό ρυθμό μεταβολής της ποσότητας ωt στην εξίσωση (3). Επειδή ωt παίζει το ρόλο γωνίας, ω συχνά ονομάζεται γωνιακή συχνότητα. Συχνά όμως χρησιμοποιείται η λέξη συχνότητα για το ω όπως και για το f.



Σχήμα B13.1. Σύστημα αρμονικής ταλάντωσης

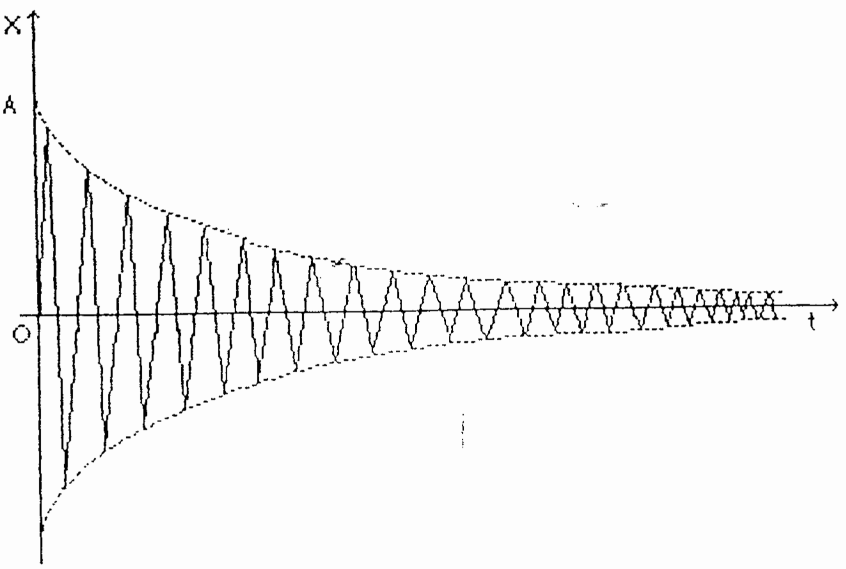
Το σύστημα του Σχήματος B13.1 έχει περίπου τις ιδιότητες που περιγράφηκαν προηγούμενα. Ενα κινητό μάζας m προσαρμόζεται στον οριζοντιομένο αερόδρομο μέσω δύο πανομοιότυπων ελατηρίων σταθεράς k_0. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε από τα δύο ελατήρια για να τεντωθεί ή συμπιεστεί κατά μία απόσταση x χρειάζεται μία δύναμη $F = k_0 x$. Στη θέση ισορροπίας και τα δύο ελατήρια είναι τεντωμένα κατά το ίδιο ποσό, έτσι ώστε η ολική δύναμη είναι μηδέν.

Οταν η μάζα μετατοπίζεται μία απόσταση x δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη του αριστερού ελατηρίου αυξάνει κατά $k_0 x$, ενώ αυτή του δεξιού ελαττούται κατά το ίδιο ποσό.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι η συνολική δύναμη προς τα αριστερά να έχει μέγεθος $2k_0x$, έτσι ώστε η σταθερά δύναμης που χρησιμοποιείται στο παραπάνω σύστημα είναι $k = 2k_0$.

Η δύναμη που ενεργεί στη μάζα είναι συντηρητική και κατά συνέπεια η ολική ενέργεια διατηρείται. Οταν η μάζα βρίσκεται στα πλέον απομακρυσμένα σημεία από την θέση ισορροπίας, η ενέργεια του συστήματος είναι μόνο δυναμική (όπως σε ένα συμπιεσμένο ελατήριο). Οταν η μάζα περνά από την θέση ισορροπίας, στο σημείο αυτό το σώμα έχει μόνο κινητική ενέργεια. Στη διάρκεια ενός κύκλου κίνησης, η ενέργεια μετατρέπεται από κινητική σε δυναμική και αντίστροφα, αλλά η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η μέση δυναμική ενέργεια είναι ίση προς την μέση κινητική ενέργεια και ότι κάθε μία ισούται με το μισό της ολικής ενέργειας (δείξτε το).

Η παρατήρηση δείχει ότι όταν ένα πραγματικό μηχανικό σύστημα ταλάντωσης τεθεί σε κίνηση, οι ταλαντώσεις φθίνουν σταδιακά με την πάροδο του χρόνου και τελικά το σύστημα έρχεται σε ηρεμία στην θέση ισορροπίας του. Η θέση της μάζας, στη περίπτωση αυτή, δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου στο Σχήμα Β13.2. Αυτό το αποτέλεσμα, που δεν προβλέπεται από το παραπάνω απλό μοντέλο του αρμονικού ταλαντωτή, οφείλεται στην παρουσία αποσβεστικών δυνάμεων (δυνάμεων τριβής), επιπλέον των ελαστικών δυνάμεων επαναφοράς που αντιπροσωπεύονται από την σταθερά δύναμης k. Διάφορες περιπτώσεις αποσβεστικών δυνάμεων μελετήθηκαν στην προηγούμενη άσκηση Β12.



Σχήμα Β13.2 Αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το αποτέλεσμα των αποσβεστικών δυνάμεων στον αρμονικό ταλαντωτή. Στηριζόμενοι στο προηγούμενο πείραμα (B12), δεχόμαστε ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από την σχέση

$$F = -bv = -b\frac{dx}{dt} \tag{6}$$

όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης, η οποία χαρακτηρίζει το μέγεθος της δύναμης τριβής. Με άλλα λόγια ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει το πλάτος των ταλαντώσεων εξαρτάται από το b (μεγάλη τιμή του b σημαίνει γρήγορη απόσβεση και το αντίθετο). Η επιπλέον δύναμη που εκφράζεται από την (6), πρέπει να συμπεριληφθεί στη διαφορική εξίσωση, που εκφράζει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η οποία τώρα γράφεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{7}$$

Η σχέση μεταξύ της απόσβεσης και των ιδιοτήτων του συστήματος, (οι σταθερές k,m και b) μπορεί να εξετασθεί με πιο μεγάλη λεπτομέρεια. Προς τούτο υπάρχουν δύο δυνατοί μέθοδοι. Η μία είναι προσεγγιστική και στηρίζεται στην ιδέα διατήρησης της ενέργειας και η άλλη χρησιμοποιεί την γενική λύση της εξίσωσης (7). Εδώ θα ακολουθήσουμε την πρώτη μέθοδο.

Αρχίζουμε με την ακόλουθη ερώτηση: Εάν η μέγιστη μετατόπιση (που την ονομάσαμε πλάτος) για ένα ορισμένο κύκλο είναι x_0, πόση ενέργεια χάνει το σύστημα κατά την διάρκεια αυτού του κύκλου; Ο ρυθμός απώλειας της ενέργειας είναι ο ρυθμός εκτέλεσης έργου ενάντια στη δύναμη απόσβεσης, και είναι ίσος με το μέγεθος της δύναμης (bv) επί την ταχύτητα v, δηλαδή bv^2. Η ποσότητα αυτή μεταβάλλεται κατά την διάρκεια ενός κύκλου και η ολική απώλεια ενέργειας δίνεται κατά προσέγγιση από τον μέσο ρυθμό απώλειας της ενέργειας κατά την διάρκεια του κύκλου (δηλαδή την μέση τιμή του bv^2) επί την περίοδο του κύκλου η οποία δίνεται από την (4).

Για να βρούμε την μέση τιμή του v^2, ξέρουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle$ για ένα αρμονικό ταλαντωτή ισούται με την μέση δυναμική $\langle \frac{1}{2}kx^2 \rangle$, έτσι ώστε κάθε μία από αυτές τις ποσότητες πρέπει να ισούται με το μισό της ολικής ενέργειας E. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}E \tag{8}$$

Στη συνέχεια, ο μέσος ρυθμός απώλειας είναι

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle = -\langle bv^2\rangle = -\frac{b}{m}E \tag{9}$$

και η απώλεια ενέργειας στην διάρκεια ενός κύκλου είναι

$$\Delta E = -(\frac{b}{m}E)(\frac{2\pi}{\omega}) = -2\pi\frac{b}{(km)^{1/2}} \cdot E \tag{10}$$

Ξέρουμε ότι dE/dt δεν παραμένει σταθερή στην διάρκεια ενός κύκλου, αλλά είναι μέγιστη όταν v είναι μέγιστο και 0 όταν $v = 0$. Αν θεωρήσουμε πως η ενέργεια μειώνεται κατά τη κίνηση λόγω απωλειών, βλέπουμε ότι η (9) είναι μια διαφορική εξίσωση του E της οποίας η λύση της δίνει την ολική ενέργεια σαν συνάρτηση του χρόνου. Η λύση της (9), όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε μετά από αντικατάσταση, είναι

$$E = E_0 e^{-(\frac{b}{m})t} \tag{11}$$

όπου E_0 είναι η αρχική ολική ενέργεια την χρονική στιγμή $t = 0$. Βλέπουμε ότι η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί η ενέργεια στο $1/e$ της αρχικής τιμής ονομάζεται χρόνος αποκατάστασης (relaxation time) και ισούται με m/b.

Είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να εισάγουμε τον παράγοντα ποιότητας (Quality factor), Q, που ορίζεται σαν ο λόγος 2πE διά της ενέργειας ΔE που καταναλίσκεται σε ένα κύκλο. Μία σχέση για το Q με βάση εξίσωση (10) είναι

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E} = \frac{m\omega}{b} = \frac{(mk)^{1/2}}{b} \tag{12}$$

Γνωρίζοντας πως η ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται με τον χρόνο (βλέπε εξίσωση 11), μπορούμε να εξετάσουμε πως το πλάτος ταλάντωσης, που συνήθως παρατηρείται και μετρείται άμεσα, ελαττούται με τον χρόνο. Επειδή η ολική ενέργεια ενός κύκλου, E, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους x_0, η μεταβολή του x_0 με τον χρόνο πρέπει να δίνεται από τη τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης που περιγράφει την χρονική μεταβολή της ενέργειας E, δηλαδή της μορφής

$$\{e^{-\frac{b}{m}t}\}^{\frac{1}{2}} = e^{-(\frac{b}{2m})t}$$

Κατά συνέπεια, το μέγιστο πλάτος x_0 πρέπει να δίνεται από την σχέση

$$x_0 = x_0' e^{-(\frac{b}{2m})t} \tag{13}$$

όπου x_0' είναι το αρχικό πλάτος την χρονική στιγμή $t = 0$.

Ο χρόνος αποκατάστασης του πλάτους των ταλαντώσεων (δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στο $1/e$ του αρχικού) είναι

$$\tau = \frac{2m}{b} \tag{14}$$

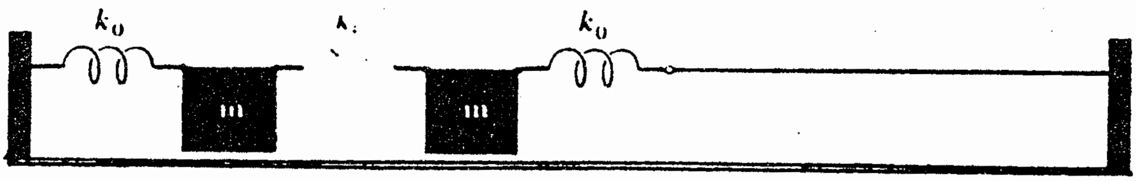
Επίσης μπορούμε να ορίσουμε το χρόνο υποδιπλασιασμού, $T_{1/2}$, σαν τον χρόνο που απαιτείται για να πέσει το πλάτος στο μισό της αρχικής του τιμής. Αυτό δίνεται από την σχέση

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{2m \ln 2}{b} = \frac{1.386m}{b} \tag{15}$$

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων (14) και (15) και της εξίσωσης (12) έχουμε

$$Q = \frac{1}{2}\omega\tau = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{T}) \cdot (\frac{T_{1/2}}{\ln 2}) = \frac{\pi \cdot T_{1/2}}{\ln 2 \cdot T} \tag{16}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το Q μπορεί να βρεθεί από άμεσα μετρούμενες χαρακτηριστικές παραμέτρους της κίνησης.



Σχήμα Β13.3 Σύζευξη δύο ταλαντωτών

Τελικά θα εξετάσουμε σύντομα το πρόβλημα ενός ταλαντούμενου συστήματος που περιλαμβάνει δύο μάζες. Το απλούστερο παράδειγμα εμφανίζεται στο Σχήμα Β13.3 Εάν μία από τις μάζες μετατεθεί από την θέση ισορροπίας της και ελευθερωθεί, η κίνηση που προκύπτει δεν είναι ημιτονοειδής. Εν τούτοις, το σύστημα έχει δυνατές μορφές κινήσεων στις οποίες οι θέσεις και των δύο μαζών μεταβάλλονται ημιτονοειδώς. Μια δυνατότητα είναι οι δύο μάζες να κινούνται, έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ αυτών να παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή το κεντρικό ελατήριο δεν συμμετέχει στην κίνηση (δεν προκαλει δύναμη επαναφοράς σε καμμία από τις μάζες) έτσι ώστε η ολική σταθερά δύναμης είναι απλώς k_0. Κατά συνέπεια η συχνότητα της κίνησης κάθε μάζας δίνεται από την σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{17}$$

Μία άλλη δυνατότητα είναι οι δύο μάζες να έχουν ακριβώς αντίθετες κινήσεις. Στην περίπτωση αυτή το μέσον του κεντρικού ελατηρίου παραμένει ακίνητο. Η κίνηση καθε μάζας είναι ακριβώς η ίδια όπως στην περίπτωση που υπάρχει ένα ελατήριο, με σταθερή δύναμης k_0, προσαρμοσμένο στην μία πλευρά της μάζας, ενώ στην άλλη πλευρά υπάρχει ένα ελατήριο που έχει μισό μήκος σε σχέση με το προηγούμενο. Μειώνοντας όμως το μήκος του ελατηρίου στο μισό η σταθερά δύναμης (ή σταθερά ελατηρίου) διπλασιάζεται έτσι ώστε η ολική σταθερά δύναμης για κάθε μάζα είναι $3k_0$ και η συχνότητα που αντιστοιχεί είναι

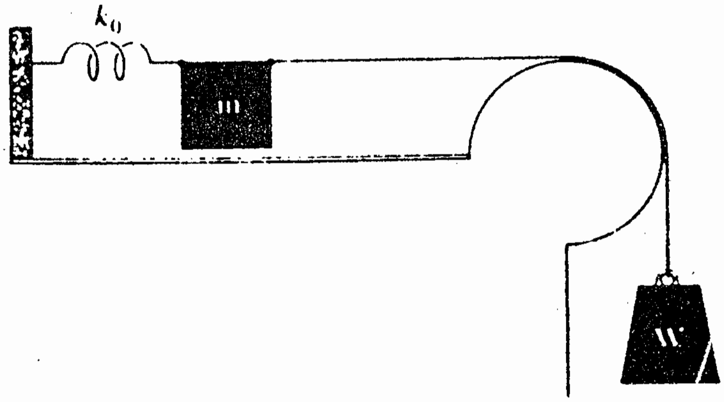
$$\omega = \sqrt{\frac{3k_0}{m}}. \tag{18}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορεί να ελεγθούν πειραματικά. Τα χαρακτηριστικά απόσβεσης μπορούν επίσης να ερευνηθούν. Ο χρόνος αποκατάστασης και ο παράγοντας ποιότητας μπορούν να καθορισθούν για κάθε κίνηση. Κάθε κίνηση ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών, όπως το προηγούμενο, στο οποίο όλες οι μάζες κινούνται ημιτονοειδώς με την ίδια συχνότητα, ονομάζεται κανονικός τρόπος (normal mode) του συστήματος.

Πείραμα

Α) Σταθερά ελατηρίου. Για να συγκρίνουμε τις θεωρητικές προβλέψεις με την πειρανατική συμπεριφορά του συστήματος, πρέπει η μάζα και οι σταθερές των ελατηρίων να είναι γνωστές. Η προτεινόμενη διαδικασία για την μέτρηση της σταθεράς του ελατηρίου, εμφανίζεται στο Σχήμα Β13.4.

Η θέση ισορροπίας της μάζας στον αερόδρομο θα πρέπει να σημειωθεί με ένα σταθερό σημείο αναφοράς στο κινητό. Κατόπιν προσθέστε μικρές μάζες της τάξης των 10 g διαδοχικά μέχρι τα 100 g και μετρείστε την μετατόπιση του σημείου αναφοράς για κάθε τιμή του ολικού βάρους W. Προσοχή: Μην τεντώσετε το ελατήριο πέραν των 30 cm γιατί μπορεί να παρμορφωθεί μόνιμα.



Σχήμα Β13.4: Διάταξη μέτρησης της σταθεράς k του ελατηρίου

Κατασκευάστε ένα διάγραμμα της μετατόπισης του ελατηρίου σαν συνάρτηση της εφαρμοσμένης δύναμης που είναι το βάρος $W = mg$. Από το διάγραμμα αυτό καθορίστε την σταθερά k_0 με προσαρμογή της καλλιτερης ευθείας και εκτιμήστε το σφάλμα Δk_0.

Β) Απλή αρμονική κίνηση. Για να παρατηρήσετε απλή αρμονική ταλάντωση, συνδέστε δύο πανομοιότυπα ελατήρια στα άκρα ενός κινητού όπως στη διάταξη του Σχήματος Β13.1. Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια θα πρέπει να είναι τεντωμένα γύρω στα 10 cm το καθένα. Κατόπιν μετατοπίστε το κινητό γύρω στα 5 cm από την θέση ισορροπίας και ελευθερώστε το. Παρατηρείστε την κίνηση και σημειώστε την μεταφορά της ενέργειας μεταξύ του κινητού και των ελατηρίων.

Χρονομετρείστε 10-20 κύκλους της κίνησης και υπολογίστε την περίοδο T και τη συχνότητα f. Επαναλάβετε την μέτρηση με μικρότερα και μεγαλύτερα πλάτη ταλάντωσης σημειώνοντας κάθε διαφορετικό πλάτος ταλάντωσης. Παρατηρείτε καμμία σημαντική μεταβολή στην συχνότητα;

Από την συχνότητα και την σταθερά k_0 υπολογίστε την μάζα του κινητού $m \pm \Delta m$. Μετρείστε την μάζα στο ζυγό και συγκρίνετε τις δύο τιμές (εκαταστιαία διαφορά). Είναι η διαφορά μεταξύ των μαζών εντός των ορίων του πειραματικού σφάλματος; Αυξείστε την μάζα τοποθετώντας γνωστές μάζες στο κινητό και μετρείστε την περίοδο T. Κατόπιν χρησιμοποιείστε την εξίσωση (4), υπολογίστε το T και συγκρίνετε τις δύο τιμές. Είναι ίσες μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος;

Γ) Απόσβεση. Η απόσβεση της ταλάντωσης λόγω τριβών μπορεί να παρατηρηθεί με την ίδια πειραματική διάταξη όπως και στο μέρος Β. Μετατοπίστε το κινητό από την θέση ισορροπίας και ελευθερώστε το χωρίς αρχική ταχύτητα. Αριθμείστε τον αριθμό των κύκλων που χρειάζονται για να ελαττωθεί το πλάτος στο μισό σε σχέση με το αρχικό.

Υπολογίστε το Q του συστήματος και τον χρόνο αποκατάστασης τ, καθώς και την σταθερά απόσβεσης b. Στη συνέχεια προσθέστε μαγνήτες στο κινητό και καθορίστε πάλι το Q του συστήματος. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με το Q ενός κινητού της ίδιας μάζας, αλλά χωρίς μαγνήτες. Ποιό θα είναι το Q στην περίπτωση μόνο της μαγνητικής απόσβεσης; (Η μαγνητική απόσβεση ή εξασθένηση εξετάζεται λεπτομερώς στην άσκηση Β12.)

Τελικά μπορείτε να εξετάσετε τη μεταβολή του Q με την μάζα, μεταβάλλοντας κατα μικρές ποσότητες την μάζα του κινητού. Μπορεί να βρείτε ότι καθώς το m αυξάνει, το Q αυξάνει επίσης μέχρι που φτάνει ένα μέγιστο και κατόπιν ελαττώνεται. Γιατί το Q μεταβάλλεται κατ' αυτόν τον τρόπο;

Για τη μελέτη της ταλάντωσης με το χρόνο, χρησιμοποιείστε κινητό μάζας m και μετρείστε την μεταβολή του μεγίστου πλάτους x_0 της ταλάντωσης σαν συνάρτησης του χρόνου, χρησιμοποιώντας ένα κοινό χρονόμετρο του εργαστηρίου. Στην συνέχεια απεικονίστε το x_0 σαν συνάρτηση του t σε ημιλογαριθμικό χαρτί. Ζητείται να βρείτε αν ισχύει η (13), δηλαδή

$$x_0 = (x_0)_{max} \cdot e^{-\frac{bt}{2m}}$$

Δεν θα πρέπει μόνο να δείξετε ότι το x_0 μεταβάλλεται εκθετικά με τον χρόνο, αλλά και ότι η κλίση της καμπύλης είναι περίπου ίση με, ή πλησιάζει, την σταθερά $b/2m$, που βρέθηκε με βάση τις προηγούμενες μετρήσεις σας (κάνετε σύγκριση).

Δ) Συζευγμένοι ταλαντωτές (coupled oscillators). Για την μελέτη των συζευγμένων ταλαντωτών, πραγματοποιείστε την διάταξη του Σχήματος Β13.3. Μετατοπίστε την μία μάζα κρατώντας την άλλη σταθερή και ελευθερώστε και τις δύο ταυτόχρονα. Σημειώστε την σύνθετη φύση της κίνησης. Τώρα επιχειρήστε το ακόλουθο: μετατοπίστε εξ ίσου και τις δύο μάζες ώστε να πλησιάσουν η μία την άλλη και κατόπιν ελευθερώστε τις. Είναι η κίνηση που παρατηρείται ημιτονοειδής; Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης, δηλαδή όταν οι μάζες κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις, ονομάζεται συμμετρικός (symmetric mode). Μετρείστε τον χρόνο 10-20 ταλαντώσεων, υπολογίστε την περίοδο ή την συχνότητα και συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό, με το προβλεπόμενο απότην εξίσωση (17).

Κατόπιν μετατοπίστε τις δύο μάζες προς την ίδια κατεύθυνση, με την ίδια ακριβώς απόσταση από την θέση ισορροπίας τους, και ελευθερώστε τις ταυτόχρονα. Καθορίστε πάλι την συχνότητα και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την προβλεπόμενη από την θεωρία (Εξ. 18). Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης ονομάζεται αντισυμμετρικός (antisymmetric mode).

Ε) Τροποποιημένοι ταλαντωτές (modified oscillators). Μία ενδιαφέρουσα τροποποίηση του συστήματος στο Σχήμα Β13.3, είναι η αντικατάσταση του κεντρικού ελατηρίου, με ένα άλλο που έχει πολύ μικρή σταθερά ελατηρίου. Στην περίπτωση αυτή ο συμμετρικός και αντισυμμετρικός τρόπος θα έχουν σχεδόν την ίδια συχνότητα. (Γιατί;). Συναρμολογείστε ένα τέτοιο σύστημα, μετατοπίστε μία μάζα από την θέση ισορροπίας , κρατώντας την άλλη ακίνητη και ελευθερώστε και τις δύο ταυτόχρονα. Τι θα συμβεί; Πως η παρατηρούμενη συμπεριφορά μπορεί να κατανοηθεί σε σχέση με τους κανονικούς τρόπους (normal modes) του προηγουμένου συστήματος;

Μετρείστε τον αριθμό των κύκλων που χρειάζονται, ώστε το πλάτος ταλάντωσης να ελαττωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Υπολογίστε το Q και για τους δύο τρόπους (συμμετρικό και αντισυμμετρικό) και συγκρίνετε και τις δύο τιμές μεταξύ τους, καθώς και με το Q του αρμονικού ταλαντωτή. Τι συμπεραίνετε;

Ερωτήσεις

1) Πως σχετίζεται η κίνηση του συστήματος στο Σχήμα Β13.1 με την κίνηση του απλού εκκρεμούς;

2) Γιατί είναι επιθυμητό να χησιμοποιούμε δύο ελατήρια στη διάταξη του σχήματος Β13.1, αντί για ένα μόνο ελατήριο;

3) Εάν ένα ελατήριο με σταθερά k_0 κοπεί στη μέση, ποιά είναι η σταθερά δύναμης (ή σταθερά ελατηρίου) του μισού ελατηρίου;

4) Δύο όμοια ελατήρια, καθένα με σταθερά ελατηρίου k_0, συνδέονται σε σειρά. Ποιά είναι στην περίπτωση αυτή η σταθερά ελατηρίου; Ποιά είναι η σταθερά ελατηρίου όταν συνδέονται παράλληλα;

5) Αν ένας αρμονικός ταλαντωτής στον αερόδρομο που δέχεται απόσβεση μόνο λογω μηχανικής τριβής έχει μία τιμή Q_f, και μόνο με μαγνητική απόσβεση μία τιμή Q_m, αποδείξτε ότι η τιμή $Q_{\text{ολ}}$, όταν και τα δύο είδη απόσβεσης συμμετέχουν στην ταλάντωση δίνεται από την σχέση: $1/Q_{\text{ολ}} = 1/Q_f + 1/Q_m$.

6) Η ποσότητα m που εμφανίζεται στις εκφράσεις της συχνότητας είναι η αδρανειακή ή η μάζα βαρύτητας του κινητού;

7) Στην προηγούμενη ανάλυση των αρμονικών ταλαντωτών, οι μάζες των ελατηρίων έχουν αγνοηθεί. Το αποτέλεσμα της μάζας του ελατηρίου θα αυξήσει ή θα ελαττώσει την συχνότητα; Εξηγείστε. Κάνετε μία προσεγγιστική εκτίμηση της τάξης μεγέθους της διόρθωσης, π.χ. είναι 0.1%, 1%, 10%, ή κάτι άλλο;

Σημείωση. Η πλήρης λύση της διαφορικής εξίσωσης (7) δίνεται από την σχέση

$$x = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega' t + \delta) \tag{19}$$

όπου

$$\omega' = 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}, \tag{20}$$

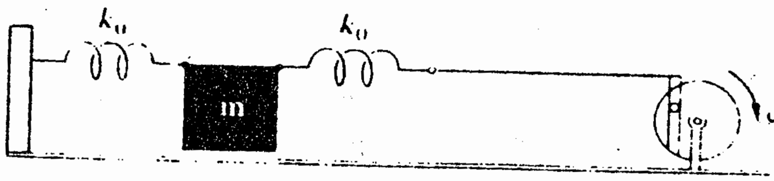
και δ είναι η σταθερά φάσης. Η απομάκρυνση της μάζας m από την θέση ισορροπίας, δίνεται από την εξίσωση (19), μόνο όταν η απόσβεση είναι μικρή ή με άλλα λόγια το b είναι μικρό. Στην περίπτωση του συστήματος που εξετάσαμε, το b θεωρείται αρκετά μικρό, λόγω της ειδικής συσκευής του αερόδρομου που μειώνει τη τριβή, έτσι ώστε ο όρος $(b/2m^2)$ θεωρήθηκε αμελητέος σε σχέση με τον (k/m).

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή βλέπε *Halliday and Resnick* κεφ. 15 και την βιβλιογραφία που συστήνεται εκεί.

B14. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του αρμονικού ταλαντωτή, όταν επιπλέον της δύναμης του ελατηρίου και των δυνάμεων απόσβεσης, που εξετάστηκαν στο προηγούμενο πείραμα, ενεργεί στη μάζα m μία εξωτερική, ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη, δύναμη. Οπως θα δούμε στη περίπτωση αυτή της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, το σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται με την συχνότητα μεταβολής της εξωτερικής δύναμης και με πλάτος ταλάντωσης που εξαρτάται από το μέτρο και την συχνότητα της δύναμης. Οταν η συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται η δύναμη είναι κοντά στην φυσική συχνότητα δόνησης του συστήματος, τότε το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο και το φαινόμενο ονομάζεται <u>συντονισμός</u> (**resonance**).

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιείται εδώ είναι παρόμοια αυτής που χρησιμοποιείται στο πείραμα B13. Η κύρια διαφορά είναι ότι το νήμα που προηγουμένως δένεται μεταξύ ενός ελατηρίου και του άκρου του αερόδρομου, τώρα δένεται μεταξύ του ελατηρίου και μιας συσκευής, που αναγκάζει το προσδεμένο άκρο του νήματος, να εκτελεί ημιτονοειδή κίνηση με μεταβαλλόμενο πλάτος και συχνότητα.



Σχήμα B14.1. Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Η διάταξη αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα B14.1 Η κίνηση του κινητήρα προκαλεί μια ημιτονοειδή μεταβολή στην επιμήκυνση του νήματος, η οποία στη συνέχεια εξασκεί μία ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη δύναμη στη ταλαντούμενη μάζα. Υποθέτουμε ότι η κίνηση της χορδής περιγράφεται σαν $rcos\omega' t$, όπου r είναι το πλάτος της κίνησης και ω' είναι η γωνιακή συχνότητα. Εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι k_0, η επιπλέον ημιτονοειδής δύναμη που εξασκείται στη μάζα είναι

$$F = k_0 x = k_0 r cos\omega' t \tag{1}$$

Σημειώστε ότι ω' δεν είναι αναγκαία ίσο προς την ιδιοσυχνότητα $\omega = (k_0/m)^{1/2}$ του συστήματος (ιδιοσυχνότητα είναι αυτή με την οποία το σύστημα ταλαντώνεται χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης).

Το αποτέλεσμα της εξωτερικής αυτής δύναμης, είναι να προκαλέσει ημιτονοειδή κίνηση της μάζας m, με την ίδια συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται και η δύναμη. Για να δούμε πως εξηγείται αυτό, αρχίζουμε από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, που τώρα περιέχει ένα επιπρόσθετο όρο σε σύγκριση με το προηγούμενο πείραμα (βλέπε Β13, Εξίσωση (2)). Αν αγνοήσουμε αποσβέσεις έχουμε

$$-kx + k_0 r cos\omega' t = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

Η ερώτηση είναι αν υπάρχει λύση που ικανοποιεί την (2), της μορφής

$$x = x_0 cos\omega' t, \tag{3}$$

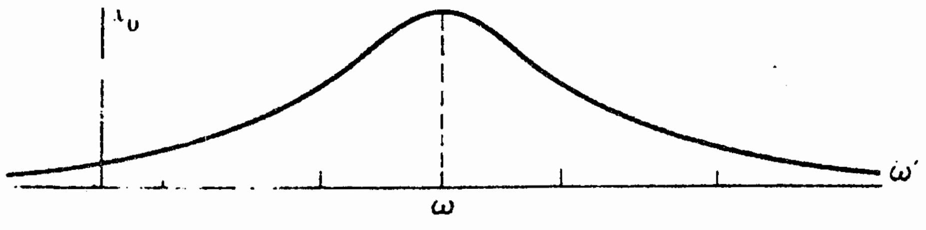
όπου ω' είναι η ίδια συχνότητα όπως και στην εξίσωση (1) και x_0 είναι σταθερά, που πρέπει να καθοριστεί. Μετά από αντικατάσταση της (3) στην (2), βρίσκουμε ότι x_0 δίνεται από την σχέση

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega'^2} r \tag{4}$$

όπου, όπως και στην Β13 προηγουμένως, ω είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και $k = 2k_0$ (ο κάθε φοιτητής θα πρέπει για λογαριασμό του να αποδείξει την (4), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3) και (2)). Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η (3) αποτελεί λύση της (2) εφ' όσον το πλάτος x_0 της ταλάντωσης, δίνεται από την (4).

Οταν η συχνότητα ω', είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα ω, τότε το πλάτος είναι θετικό και η εξαναγκασμένη ταλάντωση είναι σε φάση με την δύναμη οδήγησης (δηλαδή την δύναμη που εξαναγκάζει το σύστημα σε ταλάντωση). Οταν $\omega' > \omega$ οι ταλαντώσεις είναι 180° (μισό κύκλο) εκτός φάσης με την 'δύναμη οδήγησης'. Οταν $\omega' = \omega$, η (4), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πλάτος ταλάντωσης γίνεται άπειρο. Αυτό συμβαίνει επειδή αγνοήσαμε τις αποσβεστικές δυνάμεις. Μια πιο πλήρης ανάλυση που περιλαμβάνει και τις δυνάμεις τριβής, οδηγεί σε μια συνάρτηση πλάτους ταλάντωσης που έχει ένα μέγιστο όταν $\omega' = \omega$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα Β14.2. Οπως αναφέρθηκε, η κατάσταση για την οποία $\omega' = \omega$, είναι γνωστή σαν συντονισμός.

Στην περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με απόσβεση, ενέργεια καταναλώνεται συνεχώς από τις αποσβεστικές δυνάμεις αλλά η εξωτερική δύναμη οδήγησης αντικαθιστά αυτή την απώλεια παράγοντας έργο στο σύστημα. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, καθορίζεται με βάση το γεγονός, ότι ο μέσος ρυθμός απώλειας ενέργειας λογω απόσβεσης είναι ίσος με το μέσο ρυθμό παραγωγής έργου της δύναμης οδήγησης. Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης κατά το συντονισμό. Εδώ, δεν θα αναπτύξουμε τον υπολογισμό με λεπτομέρειες αλλά θα αναφέρουμε μόνο ορισμένα βασικά στοιχεία που οδηγούν στο αποτέλεσμα.



Σχήμα Β14.2. Καμπύλη συντονισμού

Από την εξίσωση (12) της πειραματικής άσκησης Β13, βλέπουμε ότι ο μέσος ρυθμός απώλειας της ενέργειας είναι ανάλογος του E/Q, ενώ η ολική ενέργεια E είναι ανάλογη του τετραγώνου του μεγίστου πλάτους, x_0^2. Ετσι ο ρυθμός απώλειας της ενέργειας είναι ανάλογος του x_0^2/Q. Παράλληλα, ο ρυθμός παραγωγής έργου της δύναμης οδήγησης είναι ανάλογος της ταχύτητας (η οποία είναι ανάλογη του x_0) και του πλάτους r της μεταβολής $r\cos\omega' t$. Ετσι ο ρυθμός παραγωγής έργου είναι ανάλογος του $x_0 r$. Εξισώνοντας τον ρυθμό απόσβεσης της ενέργειας με τον ρυθμό παραγωγής έργου βρίσκουμε ότι

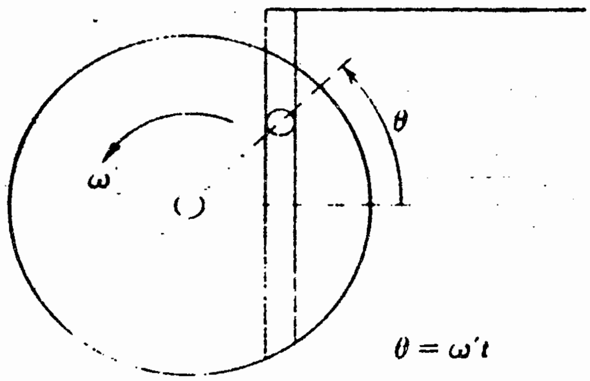
$$\frac{x_0^2}{Q} = (const)x_0 r.$$

Επειδή Q είναι καθαρός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι η σταθερά αναλογίας στην προηγούμενη σχέση είναι επίσης καθαρός αριθμός. Ενας πιο λεπτομερής υπολογισμός δείχνει ότι η τιμή της σταθεράς είναι ίση με $1/2$, έτσι ώστε η ακριβής σχέση είναι απλά

$$x_o = \frac{1}{2}Qr. \tag{5}$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η (5) ισχύει μόνο για συντονισμό, γιατί μόνο τότε η δύναμη εξαναγκασμού βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα της ταλαντούμενης μάζας. Για άλλες συχνότητες τα δύο μεγέθη δεν είναι σε φάση και ο ρυθμός κατά τον οποίο η δύναμη παράγει έργο δεν είναι πλέον ανάλογος του $x_0 r$.

Η ημιτονοειδής εξωτερική δύναμη που εξασκείται στον ταλαντωτή επιτυγχάνεται με μιά μηχανική συσκευή που ονομάζεται 'Scotch Yoke' και της οποίας η αρχή επιδεικνύεται στο σχήμα B14.3



Σχήμα B14.3. Μηχανισμός Scotch-Yoκε

Το σχήμα δείχνει μια έκκεντρο κεφαλή να περιστρέφεται με ομοιόμορφη ταχύτητα μέσω ενός κινητήρα, ενώ ταυτόχρονα μπορεί να παλλινδρομεί σε ένα κανάλι που παραμένει πάντα κατακόρυφο. Με τον τρόπο αυτό, η οριζόντια μετατόπιση του καναλιού δίνεται από την σχέση

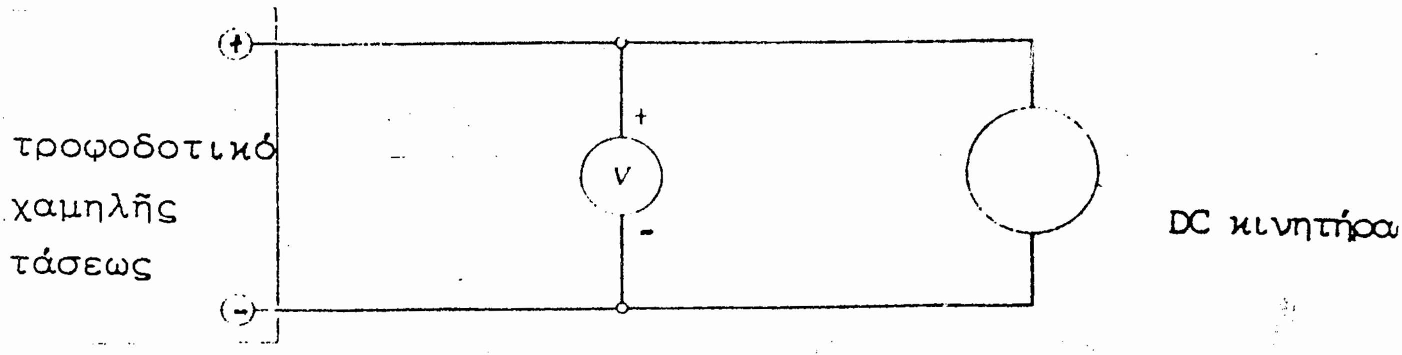
$$x = r\cos\omega' t$$

όπου r είναι η απόσταση της κεφαλής από τον άξονα περιστροφής και ω' είναι η γωνιακή συχνότητα περιστροφής. Μεταβάλλοντας το r μπορούμε να μεταβάλλουμε το πλάτος της μετατόπισης. Η συχνότητα ω' καθορίζεται από την τάση που τροφοδοτεί τον κινητήρα. Για τον κινητήρα που χρησιμοποιείται στο πείραμα, η ταχύτητα περιστροφής είναι σχεδόν ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης. Η σχέση αυτή μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά και κατόπιν να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της συχνότητας ω'.

Πείραμα

Η πειραματική διαδικασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα μέρη:

Α) Καμπύλη βαθμονόμησης του κινητήρα. Με την συσκευή εξαναγκασμένων ταλαντώσεων τοποθετημένη στον αερόδρομο, συνδέστε τον κινητήρα και ένα βολτόμετρο σε ένα τροφοδοτικό DC χαμηλής τάσης, σύμφωνα με το Σχήμα Β14.4. Ο κινητήρας δεν περιστρέφεται σταθερά κάτω από μία ορισμένη κρίσιμη τάση, γι' αυτό αυξείστε την τάση τροφοδοσίας μέχρις ότου ο κινητήρας να περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα.



Σχήμα Β 14.4. Σύνδεση κινητήρα με τροφοδοτικό DC

Στη συνέχεια, χρησιμοποιείστε διάφορες τάσεις (χωρίς να υπερβείτε την μέγιστη τάση λειτουργίας του κινητήρα) και μετρείστε τον χρόνο που χρειάζεται ο κινητήρας για 15-25 περιστροφές. Υπολογίστε την συχνότητα και κατασκευάστε έαν διάγραμμα βαθμονόμησης, που θα χρησιμοποιήσετε παρακάτω. Είναι η καμπύλη ευθεία γραμμή; Περνά η γραμμή από την αρχή των αξόνων; Αν όχι, γιατί;

Β) Συντονισμός. Συναρμολογείστε την διάταξη του Σχήματος Β14.1 και μεταβάλλετε την ταχύτητα του κινητήρα μέχρι να πετύχετε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, ή συντονισμό. Χρησιμοποιώντας την καμπύλη βαθμονόμησης, ή με κατ' ευθείαν χρονομέτρηση, καθορίστε την συχνότητα συντονισμού. Χρησιμοποιώντας την διάταξη που εμφανίζεται στο σχήμα Β 13.4 και τις οδηγίες που παρέχονται στην προηγούμενη άσκηση (Β13), υπολογίστε το k_0 και στη συνέχεια την ιδιοσυχνότητα ($\omega = \sqrt{2k_0/m}$) του συστήματος. Συγκρίνετε την συχνότητα συντονισμού με την ιδιοσυχνότητα ω. Συμφωνούν εντός των ορίων σφάλματος του πειράματος; Αν όχι, γιατί; Καθορίστε την τιμή του Q από την (5). Επίσης βρείτε την καμπύλη συντονισμού (όπως στο Σχήμα Β14.2). Πως συμπεριφέρεται η καμπύλη αυτή, όταν μεταβάλλετε την μάζα του ταλαντούμενου συστήματος;

Γ) Μαγνητική απόσβεση. Προσαρμόστε μαγνήτες στο κινητό και καθορίστε πάλι την συχνότητα συντονισμού. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την τιμή που βρήκατε στο μέρος Β. Καθορίστε το Q και συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το προηγούμενο. Τι συμπεραίνετε; (Λάβετε υπ' όψη την σημείωση στο τέλος της άσκησης).

Δ) Συζευγμένοι ταλαντωτές. Συναρμολογείστε τη διάταξη που εμφανίζεται στο Σχήμα Β14.5.

Σχήμα Β14.5. Σύστημα δυο συζευγμένων ταλαντωτών με εξωτερική οδήγηση

Στην προηγούμενη άσκηση (Β13) μελετήθηκαν οι κανονικοί τρόποι (normal modes) ταλάντωσης του αντιστοίχου συστήματος του Σχήματος Β14.5, όπου βρέθηκε ότι υπάρχουν δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης, ο συμμετρικός και αντισυμμετρικός. Για τον συμμετρικό τρόπο η συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$\omega_s = \sqrt{\frac{3k_0}{m}} \tag{6}$$

ενώ και για τον αντισυμμετρικό τρόπο

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{7}$$

Κανονίστε έτσι την ταχύτητα του κινητήρα, ώστε να διεγείρετε τον αντισυμμετρικό τρόπο. Μετρήστε την συχνότητα ταλάντωσης και συγκρίνετε την τιμή της με αυτή της εξίσωσης (7). Επαναλάβετε το ίδιο για τον συμμετρικό τρόπο.

Ε) Επιπρόσθεση μάζας. Προσθέστε μία μικρή μάζα στο ένα κινητό, αλλά όχι στο άλλο και βρείτε την συχνότητα των παραπάνω δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Πως οι κινήσεις των κανονικών τρόπων διαφέρουν από τις ανάλογες κινήσεις, όταν οι μάζες είναι ίσες; Υπάρχει διαφορά στις αντίστοιχες συχνότητες ταλαντώσεων;

Ερωτήσεις

1) Γιατί το διάγραμμα συχνότητα–τάση δεν είναι ευθεία γραμμή;

2) Γιατί η καμπύλη του διαγράμματος συχνότητας–τάσης δεν περνά από την αρχή των αξόνων;

3) Αποδείξτε ότι η ταχύτητα του κινητού είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου και ότι είναι $90°$ ($1/4$ του κύκλου ή $\pi/2$) εκτός φάσης σε σχέση με την μετατόπιση.

4) Πως θα μεταβληθεί το μέγιστο πλάτος των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων στο συντονισμό, αν η μάζα του κινητού (η ταλαντούμενη μάζα) ελαττωθεί;

Σημείωση. Αν στην εξίσωση (2) συμπεριλάβουμε και την δύναμη απόσβεσης $F = -bv = -b(dx/dt)$ (όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης), τότε η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = k_0 r \cos\omega' t. \tag{8}$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$x = \frac{\omega^2 r}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (b\omega'/m)^2}} sin(\omega' t + \delta), \tag{9}$$

όπου δ είναι η σταθερά φάσης.

Ετσι, στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη την απόσβεση, ο συντονισμός λαμβάνει χώρα για το ω' εκείνο γιά το οποίο το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. Από την Εξίσωση (9) βλέπουμε ότι ο συντονισμός δεν συμβαίνει γιά $\omega' = \omega$ εκτός αν $b = 0$. Σημειώστε ότι όσο λιγότερη είναι η απόσβεση (τριβή) σ' ένα πραγματικό σύστημα τόσο πιο κοντά είναι η συχνότητα συντονισμού στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε *Halliday and Resnick*, Τόμος Α.

B15. Μετρήσεις Αδρανειακής Μάζας

Η ιδιότητα της ύλης που ονομάζεται μάζα, προκύπτει ανεξάρτητα από δύο διαφορετικούς νόμους της μηχανικής. Σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, η έλκτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών τους. Κατά συνέπεια η μάζα μπορεί να θεωρηθεί σαν η ιδιότητα εκείνη της ύλης, μέσω της οποίας κάθε σώμα εξασκεί μία δύναμη έλξης σε οποιοδήποτε άλλο σώμα. Καλούμε την ιδιότητα αυτή της ύλης βαρυτική μάζα (gravitational mass).

Παράλληλα, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα αφορά μία διαφορετική ιδιότητα, δηλαδή το γεγονός ότι μία δύναμη (όχι αναγκαστικά η δύναμη βαρύτητας) πρέπει να εφαρμόζεται στη μάζα ενός σώματος για να του προκαλέσει επιτάχυνση, δηλαδή να μεταβάλλει το μέτρο είτε τη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος. Επίσης σύμφωνα, με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα, ένα σώμα που δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις παραμένει σε ηρεμία ή ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και αντιδρά σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του. Η ιδιότητα αυτή της ύλης ονομάζεται αδράνεια (inertia) και η μάζα είναι ένα μέτρο της αδράνειας του σώματος. Αν και δεν είναι καθόλου προφανές, ότι η βαρυτική μάζα ενός σώματος πρέπει να είναι ίση με την αδρανειακή μάζα, το πείραμα δείχνει ότι οι δύο ποσότητες είναι πράγματι ίσες.

Οπως και σε άλλες φυσικές ποσότητες, έτσι και η μάζα ενός σώματος, μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους. Ενας π.χ. είναι μέσω του 2ου νόμου του Νεύτωνα, αφού μετρηθεί η επιτάχυνση, που προκαλείται από μια γνωστή δύναμη. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά γιά την μέτρηση μαζών ατομικών σωματιδίων. Μια άλλη κοινή μέθοδος είναι μέσω του ζυγού, που είναι μία συσκευή με την οποία μπορεί να καθορίσθεί με ακρίβεια πότε τα βάρη δύο σωμάτων είναι ίσα (για ζυγούς με ίσους βραχίονες), οπότε και οι μάζες τους είναι ίσες. Η μάζα που μετράται με αυτόν τον τρόπο είναι η βαρυτική μάζα. Επίσης άλλες αλληλεπιδράσεις μεταξύ μιας άγνωστης και μιας γνωστής μάζας, μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την σύγκριση και τον υπολογισμό μαζών. Π.χ., στο παρόν πείραμα μία γνωστή μάζα που κινείται στον αερόδρομο συγκρούεται με μια άγνωστη μάζα η οποία μπορεί να υπολογισθεί από τον νόμο διατήρησης της ορμής υπό την προυπόθεση ότι η κρούση είναι τελείως ελαστική. Η μάζα που μετράται με αυτόν τον τρόπο είναι η αδρανειακή μάζα, σε αντιδιαστολή με την βαρυτική μάζα που μετρείται μεσω ενός ζυγού.

Πείραμα

Υποθέστε ότι ένα κινητό μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 και συγκρούεται με ένα άλλο κινητό μάζας M που βρίσκεται σε ηρεμία. Τα κινητά κινούνται μετά την κρούση με ταχύτητες v_m και v_M, αντίστοιχα. Επειδή η ορμή διατηρείται κατά την κρούση έχουμε

$$mv_0 = mv_m + Mv_M \tag{1}$$

όπου v_m και v_M είναι θετικά εάν έχουν την ίδια διεύθυνση όπως η ταχύτητα v_0 πριν την κρούση.

Εάν η κρούση είναι τελείως ελαστική (στο πείραμα υποθέτουμε ότι είναι) η κινητική ενέργεια θα διατηρηθεί επίσης κατά την κρούση (βλέπε B10), δηλαδή

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1) και (2), μπορεί να δειχθεί (η απόδειξη αφήνεται στον φοιτητή) ότι

$$\frac{M}{m} = 1 - \frac{2v_m}{v_M}. \tag{3}$$

Σημειώστε οτι v_m θα είναι αρνητικό στην παραπάνω σχέση όταν έχει διεύθυνση αντίθετη της διεύθυνσης της v_0 (πότε συμβαίνει αυτό;).

Πριν κάνετε οτιδήποτε μετρήσεις βεβαιωθείτε ότι ο αερόδρομος είναι οριζοντιομένος. Για να ελέγξετε την οριζοντιότητα της συσκευής υποθέστε ότι η τριβή του κινητού είναι αμελητέα. Αν η οριζοντιότητα είναι τέλεια, τότε το κινητό που τοποθετείται στον αερόδρομο παραμένει τελείως ακίνητο στη θέση αυτή. Αν όμως επιταχύνεται, έστω κατά ένα μικρό ποσό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τους κοχλίες της βάσης της συσκευής για την βελτίωση της οριζοντιότητας.

Η απόσταση που διανύει ένα κινητό μετά την κρούση είναι ανάλογη της ταχύτητάς του (Γιατί;). Χρησιμοποιείστε την ιδιότητα αυτή για να βρείτε μία μέθοδο για την μέτρηση του λόγου v_m/v_M. Εκτελέστε ένα αριθμό κρούσεων και καταγράψτε τα δεδομένα. Από τις μετρήσεις αυτές υπολογίστε τον λόγο των δύο αδρανειακών μαζών, σύμφωνα με την (3). Ζυγίστε τα δύο κινητά και υπολογίστε το επί τοις εκατό σφάλμα για κάθε λόγο και συγκρίνετε τους δύο λόγους μαζών. Συμφωνούν οι δύο τιμές μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος;

Στη συνέχεια, επαναλάβατε τις μετρήσεις για βαρύτερες μάζες και υπολογίστε το σφάλμα. Τι συμπεραίνετε; Αναφερθείτε στις πιθανές πηγές σφάλματος στο πείραμα αυτό.

Στη συνέχεια, θα εξετάσετε αν η υπόθεση ότι η κρούση είναι ελαστική, ισχύει. Προς τούτο δώστε την μορφή κεκλιμένου επιπέδου στον αερόδρομο και ελευθερώστε το κινητό από το ψηλότερο σημείο. Το κινητό συγκρούεται στο κατώτερο άκρο και 'ανακλάται' προς τα πάνω. Για την περίπτωση της τελείως ελαστικής κρούσης, το μέτρο της ταχύτητας του κινητού μετά την κρούση, πρέπει να είναι ίσο με αυτό της ταχύτητας πριν την κρούση. Εδώ ενδιαφέρει να βρούμε όχι τις ακριβείς τιμές αυτών των ποσοτήτων, αλλά τον λόγο των ταχυτήτων. Αμέσως παρακάτω αναπτύσσεται μία μέθοδος υπολογισμού αυτού του λόγου.

Οταν το κινητό μάζας m, απελευθερώνεται από ένα ύψος h_1 έχει δυναμική ενέργεια ίση με mgh_1. Στο κατώτερο άκρο της συσκευής, ακριβώς λίγο πριν την κρούση, όλη η ενέργεια αυτή έχει μεταιραπεί σε κινητική, έτσι ώστε να έχουμε

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4}$$

Κατά την διάρκεια της κρούσης του κινητού, ένα μικρό ποσό της κινητικής ενέργειας θα χαθεί (βλέπε B13), έτσι ώστε το κινητό αναπηδά προς τα πίσω με κινητική ενέργεια $mv_2^2/2$ και φτάνει σε ένα ύψος h_2, όπου η κινητική ενέργεια έχει μετατραπεί σε δυναμική, δηλαδή

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2. \tag{5}$$

Από τις εξισώσεις (4) και (5) βρίσκουμε ότι

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \tag{6}$$

όπου l_1 και l_2 είναι τα μήκη που διανύει το κινητό, πριν και μετά την κρούση, έτσι ώστε $h_1 = l_1 \sin\theta$ και $h_2 = l_2 \sin\theta$ (όπου θ είναι η γωνία κλίσης του φορέα του αερόδρομου). Ο λόγος των ταχυτήτων μετά και πρίν την κρούση αποτελεί ένα μέτρο της ελαστικότητας της κρούσης και, οπως ορίστηκε στην B10, είναι ο συντελεστής κρούσης e (coefficient of restitution).

Μετρείστε τις αποστάσεις l_1 και l_2 αρκετές φορές και υπολογίστε τα e και Δe. Για μια τελείως ελαστική κρούση η τιμή του e πρέπει να είναι μονάδα. Ισχύει η υπόθεση της τελείως ελαστικής κρούσης εντός των ορίων του πειραματικού σφάλματος; Πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τιμή του e για να υπολογισθεί το αναμενόμενο σφάλμα στη μέτρηση του M/m.

B16. Μελέτη Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης [1]

Στο πείραμα αυτό θα χρησιμοποιηθούν διάφορες διατάξεις απλής αρμονικής ταλάντωσης στον αερόδρομο για να μελετηθεί η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων: σταθεράς ελατηρίου, μάζας κινητού, πλάτος ταλάντωσης, κλίσης του αερόδρομου, και περιόδου ταλάντωσης. Επίσης θα διερευνήσετε την μεταβολή της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή.

Η απλή αρμονική κίνηση απαντάται στη παλινδρομική κίνηση της μάζας ενός εκκρεμούς ή μιάς μάζας που είναι κρεμασμένη σε ένα ελατήριο. Η κίνηση γίνεται υπο την επίδραση μιας δύναμης επαναφοράς που μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο, με συνέπεια και η επιτάχυνση του απλού αρμονικού ταλαντωτή να μεταβάλλεται κατά τον ίδιο τρόπο. Η απλή αρμονική κίνηση απαιτεί η δύναμη επαναφοράς F που ενεργεί σε μία μάζα m, να είναι ανάλογη της μετατόπισης της μάζας από την θέση ισορροπίας, δηλαδή να ισχύει $F = -kx$, όπου k είναι ονομάζεται 'σταθερά δύναμης'. Το αρνητικό πρόσημο διευκρινίζει ότι η δύναμη επαναφοράς έχει αντίθετη φορά από την μετατόπιση.

Πείραμα

Για τα πειραματικά μέρη που ακολουθούν παρέχεται η συσκευή του αερόδρομου, διάφορα ελατήρια, διάφορα κινητά και μάζες που μπορούν να προστεθούν στα κινητά. Η χρονομέτρηση μπορεί να γίνεται με μηχανικά χρονόμετρα ακρίβειας 0.1 s. Τα ελατήρια προσαρμόζονται στα άκρα των κινητών και μπορούν να τεντωθούν μέχρι 10 φορές το αρχικό τους μήκος. Γενικά, η σταθερά δύναμης k για ένα ελατήριο (ή σταθερά ελατηρίου), μπορεί να μετρηθεί όπως στην άσκηση B5. Δηλαδή κρεμάμε διαδοχικά αυξανόμενες μάζες από το άκρο του ελατηρίου και μετράμε την μετατόπιση. Θα πρέπει να λάβουμε πρόνοια, ώστε να μην υπερτεντωθεί το ελατήριο για να μην υποστεί μόνιμη παραμόρφωση. Εάν το διάγραμμα της δύναμης έναντι της μετατόπισης δίνει μια ευθεία γραμμή, τότε το ελατήριο λέγεται ότι υπακούει τον νόμο του Hooke. Από την κλίση της ευθείας γραμμής βρίσκουμε το k. Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικού τρόπους για την μέτρηση της σταθεράς k. Η

[1]Εναλλακτική και μερικώς συμπληρωματική της B13

πειραματική διαδικασία περιλαμβάνει τα παρακάτω μέρη.

Μέρος Α. Το αντικείμενο του πρώτου μέρους είναι να ερευνηθεί το αποτέλεσμα της αρχικής μετατόπισης και της κλίσης του αερόδρομου πάνω στην περίοδο της απλής αρμονικής κίνησης. Πρώτα οριζοντιώστε τον αερόδρομο. Κατόπιν κατασκευάστε τον ταλαντωτή χρησιμοποιώντας ένα κινητό μάζας m και ένα ελατήριο, το οποίο προσδένεται στο κινητό και στο άκρο του αερόδρομου. Σημειώστε σε ποια υποδιαίρεση της κλίμακας του αερόδρομου αντιστοιχεί η θέση ισορροπίας του κινητού. Για να μελετήσετε το αποτέλεσμα της αρχικής μετατόπισης (μεγίστου πλάτους), μετρείστε την περίοδο της ταλάντωσης για αρχικές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας 5, 10, 15 και 20 cm. Συγκρίνετε και συζητείστε τα αποτελέσματα.

Χωρίς καμμία μεταβολή στον ταλαντωτή, δώστε μία κλίση στον αερόδρομο υπερυψώνοντας λίγο το ένα του άκρο και κατόπιν επαναλάβετε όλο ή μέρος του προηγούμενου πειράματος και παρατηρείστε εάν η μετατόπιση της θέσης ισορροπίας, λόγω της βαρύτητας έχει αλλάξει την περίοδο ταλάντωσης. Αν το θεωρήσετε αναγκαίο δοκιμάστε περισσότερες γωνίες κλίσης.

Ποιο αποτέλεσμα έχει το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στην περίοδο; Ποιο είναι το αποτέλεσμα της κλίσης του αερόδρομου; Συνιστούν οι μετρήσεις γενικεύσεις σχετικά με την απλή αρμονική κίνηση; Πως θα προτείνατε να ελεγχθούν οι γενικεύσεις αυτές σε κάποιο άλλο σύστημα;

Μέρος Β. Το αντικείμενο του παρακάτω πειράματος είναι ο καθορισμός της συναρτησιακής σχέσης της περιόδου της ταλάντωσης και της ταλαντούμενης μάζας. Πρώτα μετρείστε την περίοδο της ταλάντωσης για ένα ελαφρό κινητό και στη συνέχεια προσθέστε γνωστές μάζες ή βαρύτερα κινητά και επαναλάβετε την μέτρηση. Καταχωρήστε τις μετρήσεις σε μορφή πίνακα. Κατόπιν κατασκευάστε ένα λογαριθμικό διάγραμμα της περιόδου σε δευτερόλεπτα έναντι της μάζας σε γραμμάρια.

Για να καθορίσετε την σχέση μεταξύ της περιόδου και της μάζας του ταλαντωτή, υποθέστε ότι η περίοδος και η μάζα συνδέονται με την σχέση

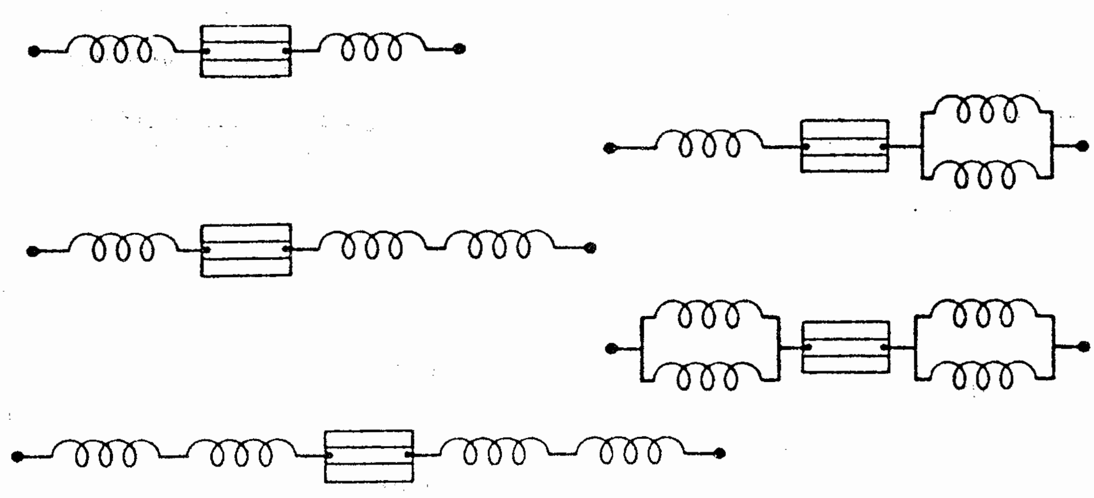
$$T = Am^p \tag{1}$$

όπου A και p είναι σταθερές. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\log T = \log A + p \log m \tag{2}$$

που παριστά την εξίσωση μιας ευθείας γραμμής, της οποίας η κλίση είναι p . Σημειώστε ότι οι μεταβλητές είναι $\log T$ και $\log m$ και όχι T και m. Κατά συνέπεια, η τιμή των σταθερών p και A μπορεί να καθορισθεί από το διάγραμμα $\log T$, $\log m$. Αν η καμπύλη του διαγράμματος είναι ευθεία γραμμή, τότε η υπόθεση ότι T και m συνδέονται με την σχέση (1) είναι σωστή. Υπολογίστε την τιμή του p από την κλίση της γραμμής.

Μέρος Γ. Εδώ θα ερευνήσουμε την συναρτησιακή σχέση μεταξύ της περιόδου ταλάντωσης και της σταθεράς του ελατηρίου. Κατασκευάστε ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή, χρησιμοποιώντας ένα κινητό μαζας m και διάφορους συνδυασμούς ελατηρίων. Το Σχήμα Β16.1 δείχνει διάφορους συνδυασμούς ελατηρίων με την ίδια μάζα που μπορούν να μελετηθούν.



Σχήμα Β16.1. Ταλαντωτές με διάφορους συνδιασμούς ελατηρίων

Χρησιμοποιείστε τουλάχιστον 4 διαφορετικούς συνδυασμούς ελατηρίων, που θα δώσουν διαφορετικές σταθερές. Βεβαιωθείτε ότι ένας απ' αυτούς είναι ο ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιήσατε στο μέρος Β γιατί χρειάζεται στο πειραματικό μέρος Δ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ελατήρια διαφορετικών μηκών, για να κατασκευάσετε τον ταλαντωτή σας (υπάρχουν ελατήρια τριών διαφορετικών μηκών). Για να μετρήσετε την σταθερά ελατηρίου του ταλαντωτή, χρησιμποιείστε μαγνητική ταινία, της οποίας το ένα άκρο δένεται στο άκρο του κινητού. Η ταινία περνά πάνω από μια τροχαλία αέρα και στο άλλο άκρο υπάρχει ένα άγκιστρο όπου κρεμιούνται γνωστά βάρη. Μετρώντας την μετατόπιση και κάνοντας χρήση του νόμου $F = -kx$, μπορείτε να υπολογίσετε την σταθερά k του συστήματος. Στη συνέχεια, για να βρείτε την σχέση μεταξύ T και k, υποθέστε ότι οι ποσότητες αυτές συνδέονται μέσω της σχέσης $T = Bk^q$. Μετρείστε τις περιόδους των ταλαντώσεων για κάθε k και κατασκευάστε το διάγραμμα του $\log T$ έναντι του $\log k$ και βρείτε την σταθερά q.

Μέρος Δ. Στο μέρος Β βρήκατε μία εμπειρική εξίσωση, που σχετίζει την περίοδο ταλάντωσης και την μάζα του ταλαντωτή ενώ στο μέρος Γ μία παρόμοια εξίσωση, που σχετίζει την περίοδο Τ με την σταθερά ελατηρίου k του συστήματος. Προφανώς θα πρέπει να υπάρχει μία μόνο εξίσωση, που συνδέει όλες τις μεταβλητές και η οποία πρέπει να είναι της μορφής $T = ck^q m^p$, όπου c είναι μία σταθερά αναλογίας, που σχετίζεται κατά κάποιον τρόπο με τις προηγούμενες σταθερές Α και Β. Ο ευκολότεροος τρόπος για να βρεθεί το c, είναι να επαληθεύσετε την παραπάνω εξίσωση σε ένα σημείο όπου οι ίδιες τιμές του m και του k χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο πειράματα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, υπολογίστε την σταθερά c και γράψτε την τελική μορφή της εξίσωσης.

Μέρος Ε. Το αντικείμενο εδώ είναι να μελετήσουμε πως η σταθερά ελατηρίου μεταβάλλεται όταν δύο ή περισσότερα ελατήρια συνδέονται μαζί σε σειρά ή παράλληλα (συζευγμένοι ταλαντωτές). Οι σταθερές κάθε ενός ελατηρίου θα μετρηθούν με την 'στατική' μέθοδο, ενώ η ολική σταθερά σε ένα σύστημα ελατηρίου–μάζας θα μετρηθεί με δύο μεθόδους, τη 'στατική' και την 'δυναμική' για να συγκριθεί το αποτέλεσμα. Το σχήμα Β16.1 δείχνει διάφορους δυνατούς συνδυασμούς ελατηρίων.

Στη 'στατική' μέθοδο το κινητό μετατοπίζεται σε μία διάταξη, όπου χρησιμοποιείται μαγνητική ταινία, η τροχαλία αέρα, και μερικά βάρη (ή μετατοπίζεται κάτω απ' την επίδραση της συνιστώσας του βάρους του όταν στον αερόδρομο δίνεται μία σταθερή κλίση). Στη 'δυναμική' μέθοδο η σταθερά ελατηρίου καθορίζεται από την περίοδο της ταλάντωσης T.

Αμέσως παρακάτω θα εξετάσουμε θεωρητικά, πόση είναι η ολική σταθερά ελατηρίου, όταν δύο ελατήρια συνδέονται σε σειρά ή παράλληλα. (Βλέπε Σχήμα B16.2). Αλλες, πιο σύνθετες, διατάξεις μπορούν να θεωρηθούν σαν συνδυασμοί των δύο αυτών βασικών συνδέσεων. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$F_1 = -k_1 x_1 \quad , \quad F_2 = -k_2 x_2 \quad \text{και} \quad F_t = -k_t x_t \tag{3}$$

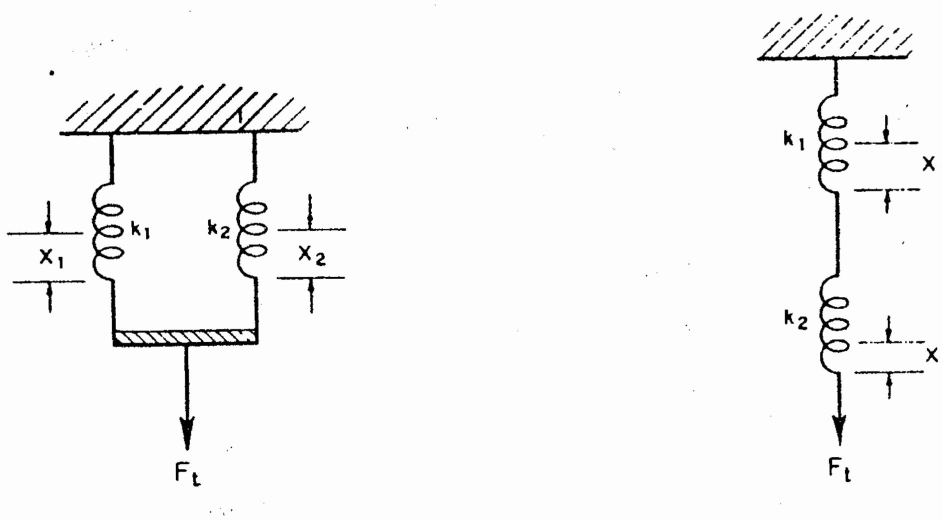
Θεωρείστε πρώτα την παράλληλη σύνδεση. Προφανώς η μετατόπιση x είναι η ίδια και για τα δύο ελατήρια, ενώ η ολική δύναμη είναι $F_t = F_1 + F_2$, η οποία μέσω των (3) δίνει

$$k_t x_t = k_1 x_1 + k_2 x_2, \tag{4}$$

έτσι ώστε τελικά να έχουμε

$$k_t = k_1 + k_2. \tag{5}$$

Βρείτε μία ανάλογη σχέση για την σύνδεση των δύο ελατηρίων σε σειρά.



Σχήμα B16.2. Παράλληλη και σε σειρά σύνδεση δύο ελατηρίων

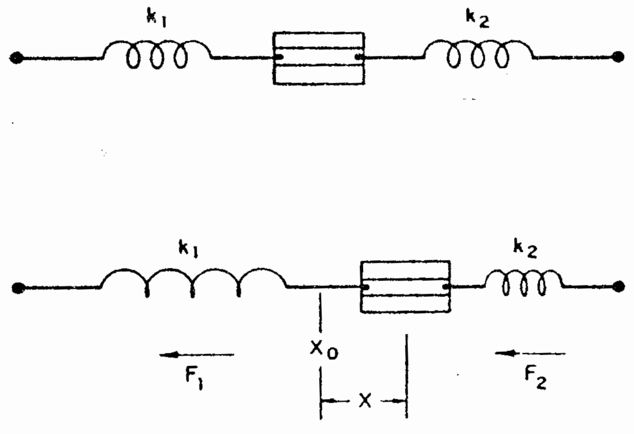
Θεωρείστε μία τρίτη σύνδεση, αυτή που παριστάνει το Σχήμα B16.3, που αντιπροσωπεύει μία άλλη διάταξη αρμονικού ταλαντωτή. Ποιά μεταβλητή παραμένει σταθερή καθώς μετατοπίζεται το κινητό; Με ποιά από τις προηγούμενες δύο διατάξεις μοιάζει η διάταξη του Σχήματος B16.3. Γράψτε την κατάλληλη εξίσωση που σχετίζει το k_t με το k_1 και k_2 γι' αυτή την περίπτωση.

Για το μέρος Ε του πειράματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω εξίσωση, που συνδέει την περίοδο T και την σταθερά k.

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \tag{6}$$

Η τιμή του k που καθορίζεται από την (6), αφού μετρηθεί το Τ, θεωρείται σαν 'δυναμική σταθερά' ελατηρίου σε αντιδιαστολή με την 'στατική' σταθερά ελατηρίου που αναφέρθηκε προηγούμενα.

Χρησιμοποιείστε την διάταξη του Σχήματος B16.3 για μετρήσεις. Συγκρίνετε την δυναμική με την στατική σταθερά του ελατηρίου. Κατόπιν υπολογίστε το k_t, από τις επιμέρους μετρήσεις των k_1 και k_2. Κάνετε συγκρίσεις. Επαναλάβετε το ίδιο με μερικές ή όλες τις διατάξεις του Σχήματος B16.1. Οπωσδήποτε να εξετάσετε τουλάχιστον μία διάταξη με τα ελατήρια σε σειρά και μία σε παράλληλη σύνδεση. Αναπτύξτε τα συμπεράσματά σας.



Σχήμα B16.3. Σύστημα αρμονικού ταλαντωτή

Μέρος Ζ. Το αντικείμενο εδώ είναι να μελετήσετε την ολική ενέργεια ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να καθορίσετε αν οι δυνάμεις που ενεργούν είναι συντηρητικές.

Ο αρμονικός ταλαντωτής του σχήματος B16.3 είναι ένα σύστημα, στο οποίο κατά προσέγγιση δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις. Υπό τις συνθήκες αυτές η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται και παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const. \tag{7}$$

ισχύει. Κατά την διάρκεια κάθε ταλάντωσης υπάρχει μία συνεχής ανταλλαγή μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας, έτσι ώστε οι όροι του δευτέρου μέρους της εξίσωσης (7) μεταβάλλονται, ενώ η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή.

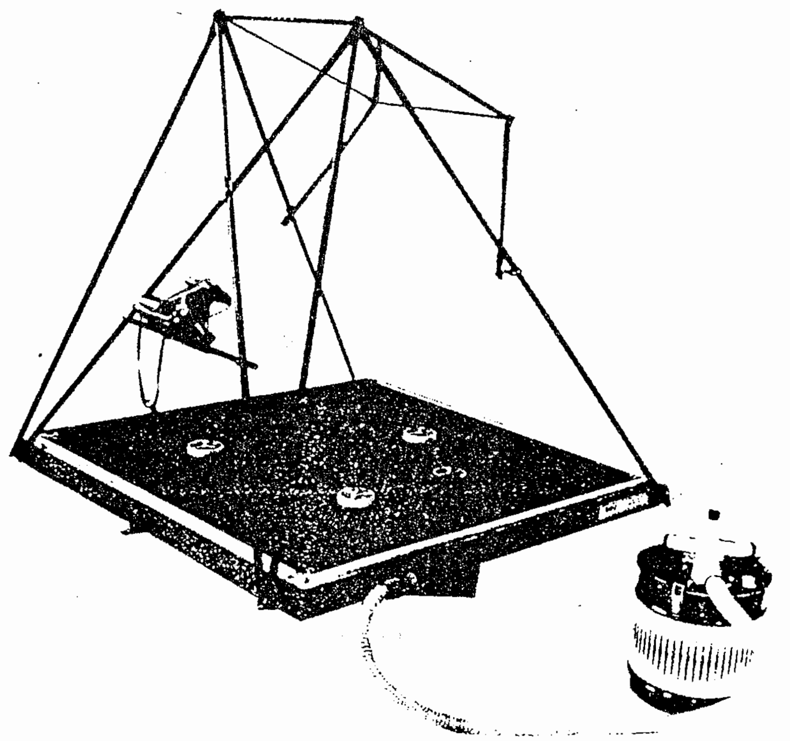
Οταν το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας, η δυναμική ενέργεια αυξάνει σε βάρος της κινητικής, ενώ συμβαίνει το αντίθετο όταν η μάζα πλησιάζει την θέση ισορροπίας. Η σχέση μεταξύ των δύο μορφών ενέργειας μπορεί να υπολογισθεί μεσω της μεταβολής της ταχύτητας και της απομάκρυνσης, κατά την διάρκεια ενός πλήρους κύκλου. Το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας και μηδέν στα σημεία της μέγιστης μετατόπισης ευκολύνει τα πράγματα.

Για την εκτέλεση του πειράματος χρησιμοποιείστε την χρονομετρική συσκευή με σπινθήρες και μία ταινία κηρομένου χαρτιού για να αποτυπώσετε την τροχιά μισής ταλάντωσης. Κατ' αρχήν, εντοπίστε το σημείο ισορροπίας και στη συνέχεια θέστε το σύστημα σε ταλάντωση και πάρτε ένα ίχνος της τροχιάς, όταν η μάζα κινείται από την θέση μιας μέγιστης μετατόπισης στη θέση της άλλης. Από τη τροχιά καθορίστε την μέγιστη ταχύτητα και υπολογίστε την E_k'. Από την μέγιστη μετατόπιση και την τιμή της σταθεράς k του συστήματος, υπολογίστε την μέγιστη τιμή E_p'. Αν $E_k' = E_p'$, σημαίνει ότι οι δυνάμεις που ενεργούν είναι συντηρητικές. Οι ταχύτητες θα πρέπει επίσης να υπολογισθούν και σε άλλα σημεία της τροχιάς. Κατασκευάστε σε γραμμικό χαρτί, διαγράμματα των E_k, E_p και $E_k + E_p$, έναντι της μετατόπισης x. Τι συμπεραίνετε;

Για τον υπολογισμό της E_p χρειάζεται να μετρηθεί η σταθερά k του συστήματος. Αυτό μπορεί να γίνει με την στατική ή δυναμική μέθοδο που περιγράφτηκαν προηγουμένως. Για να βρείτε την ταχύτητα σε ένα αποτυπωμένο σημείο i στην ταινία, μετρείστε την απόσταση από το σημείο $(i+1)$ έως $(i-1)$ και διαιρέστε με το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$. Αυτό δίνει την μέση ταχύτητα μεταξύ των σημείων $(i-1)$ και $(i+1)$ και την στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο i που βρίσκεται στο μέσον του χρονικού διαστήματος Δt εφόσον θεωρήσουμε κατά προσέγγιση ότι η επιτάχυνση παραμένει σταθερή στο μικρό αυτό διάστημα.

B17. Πειράματα με την Αεροτράπεζα

Η αεροτράπεζα (air table) είναι μια ευαίσθητη συσκευή, με την οποία μπορούμε να μελετήσουμε πειραματικώς προβλήματα κινηματικής σε δύο διαστάσεις με μειωμένη τριβή. Η συσκευή μοιάζει με ένα πεπλατυσμένο ορθογώνιο κουτί, του οποίου η πάνω επιφάνεια είναι τελείως επίπεδη και φέρνει ομοιόμορφες σειρές μικρών οπών. Εάν τροφοδοτήσουμε ένα ρεύμα αέρα μέσα στο κουτί, τότε ο αέρας θα βγει με πίεση από τις οπές της πάνω επιφάνειας, έτσι ώστε ένα πεπλατυσμένο αντικείμενο, που τοποθετείται στην επιφάνεια της τράπεζας, αναγκάζεται να επιπλέει (εφόσον δεν είναι πολύ βαρύ) σε ένα λεπτό στρώμα αέρα. Με τον τρόπο αυτό η τριβή ολίσθησης μειώνεται σημαντικά.



Σχήμα B17.1. Συσκευή Αεροτράπεζας με στροβοσκοπική κάμερα

Τα κινητά είναι μικροί πλαστικοί δίσκοι των οποίων η επιφάνεια επαφής είναι απολύτως επίπεδη. Η αεροτράπεζα συνοδεύεται από ένα αριθμό χρήσιμων εξαρτημάτων (π.χ.

μαγνήτες, ελατήρια, τροχαλίες, εκτοξευτές δίσκων, δονητές κ.λ.π.), που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλά ενδιαφέροντα πειράματα μηχανικής και κινητικής αερίων.

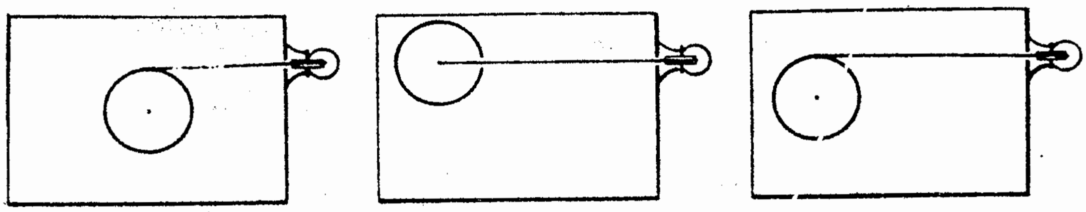
Η καταγραφή των δεδομένων, πάνω στα οποία βασίζεται η όλη ανάλυση, μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους: **1)** στροβοσκοπική φωτογράφηση, **2)** συσκευή καταγραφής σπινθήρων σε ειδικό χαρτί και **3)** μέσω φωτοκυττάρων και ηλεκτρονικών χρονομέτρων. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι η πρώτη (στροβοσκοπική φωτογραφία), γιατί η αεροτράπεζα παραμένη ακάλυπτη και οι δίσκοι κινούνται χωρίς περιορισμούς. Οι δύο άλλοι τρόποι χρονομέτρησης χρησιμοποιούνται σε ορισμένες πειραματικές διατάξεις, όπου οι τροχιές των δίσκων είναι καθορισμένες. Για λεπτομέρειες σχετικά με την συσκευή της αεροτράπεζας και τους μηχανισμούς καταγραφής δεδομένων βλέπε: *Experiments on an air table*, EALING, Εργαστήριο Φυσικής.

Προτεινόμενα πειράματα

Παρακάτω παραθέτουμε ένα κατάλογο πειραμάτων, καθώς και μία σύντομη περιγραφή του αντικειμένου κάθε πειράματος, που μπορούν να πραγματοποιηθούν με την αεροτράπεζα. Περισσότερες οδηγίες (περιληπτική θεωρία και πειραματική διαδικασία), υπάρχουν στα αγγλικά στο *Experiments on an air table* της EALING. Η κάθε εργαστηριακή ομάδα μπορεί να εκλέξει ένα από τα παρακάτω πειράματα και αφού συμβουλευτεί τον διδάσκοντα να προχωρήσει στην εκτέλεσή του. Οι λεπτομέρειες της πειραματικής διαδικασίας αφήνονται στην πρωτοβουλία των φοιτητών.

1) Μελέτη επιταχυνόμενης κίνησης στο κεκλιμένο επίπεδο. Στο πείραμα αυτό θα μελετηθεί η κίνηση ενός κινητού που ξεκινά από ηρεμία και κινείται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβή. Κατ' αρχή, θα μετρηθεί η θέση του κινητού σαν συνάρτηση του χρόνου. Τα δεδομένα αυτά θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό άλλων ποσοτήτων π.χ. της ταχύτητας και επιτάχυνσης. Στη συνέχεια θα γίνουν γραφικές παραστάσεις σε γραμμικό χαρτί για την εύρεση απλών γραμμικών σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών. Αν υπάρχουν μεταβλητές των οποίων το διάγραμμα δεν είναι ευθεία γραμμή, τότε θα πρέπει να κατασκευασθεί το λογαριθμικό διάγραμμα, σε μια προσπάθεια να βρεθούν απλές εξισώσεις που συνδέουν τις δύο μεταβλητές.

2) Γραμμική και γωνιακή επιτάχυνση ενός δίσκου. Στο πείραμα αυτό θα γίνει μελέτη και σύγκριση των κινητών ενός δίσκου μάζας m στις εξής τρεις περιπτώσεις: **1)** όταν μία εφαπτομενική δύναμη εφαρμόζεται στην περιφέρεια του δίσκου, του οποίου το κέντρο παραμένει ακίνητο (περιστροφική κίνηση), **2)** η ίδια δύναμη ενεργεί στο κέντρο του δίσκου, ο οποίος είναι ελεύθερος να κινηθεί (μεταφορική κίνηση) και **3)** όπως και στην πρώτη περίπτωση με την διαφορά ότι το κέντρο του δίσκου μπορεί να κινηθεί (περιστροφική και μεταφορική κίνηση).



1 2 3

3) Κυκλική κίνηση. Το αντικείμενο αυτού του πειράματος είναι η μελέτη της κυκλικής κίνησης ενός κινητού στο οποίο επιδρά μία σταθερή δύναμη που κατευθύνεται προς το κέντρο της τροχιάς. Αλλος σκοπός του πειράματος είναι να επιδειχθεί στο φοιτητή η χρησιμότητα των προκαταρκτικών δοκιμαστικών πειραμάτων. Αντί λεπτομερών συστάσεων για τη συλλογή των μετρήσεων, θα εκτελεσθεί ένας αριθμός προκατακτικών πειραμάτων, έτσι ώστε ο ασκούμενος να δει μόνος του το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησής τους.

4) Μελέτη ελαστικών κρούσεων. Το αντικείμενο του πειράματος είναι να μελετηθούν οι νόμοι της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας κατά την κρούση μεταξύ δύο μαγνητικών δίσκων ίσης μάζας.

5) Ημιελαστικές κρούσεις. Η παράμετρος που χαρακτηρίζει μια κρούση είναι ο συντελεστής κρούσης (coefficient of restitution), που ορίζεται σαν το πηλίκον της σχετικής ταχύτητας των κινητών *μετά* δια της σχετικής ταχύτητας *πριν* την κρούση. Στο πείραμα αυτό θα μετρηθεί και θα χρησιμοποιηθεί ο συντελεστής κρούσης στη μελέτη των ημιελαστικών κρούσεων. Επίσης θα αποδειχθεί ότι ο συντελεστής κρούσης είναι, συνήθως, ανεξάρτητος των ταχυτήτων των κινητών.

6) Ανελαστικές κρούσεις και στροφορμή. Το αντικείμενο του πειράματος, είναι να αποδειχθεί ποσοτικά, ότι ένας δίσκος, που κινείται σε μία ευθεία γραμμή στην αεροτράπεζα, έχει στροφορμή, σε σχέση με οποιοδήποτε σημείο που δεν βρίσκεται στην τροχιά του κέντρου μάζας. Επίσης θα αποδειχθεί ότι η ορμή και στροφορμή διατηρούνται κατά την διάρκεια μιας ανελαστικής κρούσης.

7) Μαγνητικές δυνάμεις. Οι στόχοι αυτού του πειράματος συνοψίζονται ως εξής:

α) Θα μετρηθεί η απωστική δύναμη μεταξύ δύο μαγνητικών δίσκων σαν συνάρτηση της απόστασης των κέντρων τους (νόμος του Coulomb).

β) Θα βρεθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος των ίδιων μαγνητικών δίσκων, σαν συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης.

γ) Θα αποδειχθεί γραφικά ότι η δύναμη δίνεται από την αρνητική κλίση της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

8) Απλή αρμονική κίνηση: 'Ο ταλαντωτής μάζας–ελατηρίου'. Θα κατασκευασθεί ένας αρμονικός ταλαντωτής προσαρμόζοντας ένα δίσκο μεταξύ δύο ελατηρίων στην αεροτράπεζα. Στη συνέχεια θα μελετηθεί η σχέση μεταξύ των ακολούθων μεταβλητών: σταθερά ελατηρίου, μάζα δίσκου, πλάτος ταλάντωσης, κλίση τράπεζας και περίοδος ταλάντωσης. Επίσης θα μελετηθεί η μεταβολή των μορφών ενέργειας του συστήματος.

9) Μελέτη πραγματικού αρμονικού ταλαντωτή. Στο πείραμα αυτό θα μελετηθεί το αποτέλεσμα της μάζας του ελατηρίου στην απλή αρμονική κίνηση. Επίσης θα διερευνηθεί ο τύπος και το αποτέλεσμα των αποσβεστικών δυνάμεων τριβής που απαντώνται σε ένα πραγματικό (μη ιδανικό) σύστημα ταλαντωτή.

10) Μελέτη φυσικού εκκρεμούς. Στο πείραμα αυτό θα μελετηθεί η περίοδος ενός φυσικού εκκρεμούς, το οποίο αποτελείται από ένα δίσκο μη αμελητέας ροπής αδράνειας και μία ράβδο.

11) Πειραματική εισαγωγή στην κινητική Θεωρία. Εδώ θα μελετηθεί η χωρική κατανομή των σωματιδίων σε ένα 'αέριο δίσκων' και θα εξετασθεί αν αυτή η κατανομή είναι όμοια με εκείνη που προβλέπεται για ένα ιδανικό αέριο.

12) Κινητική Θεωρία: Κατανομή ταχυτήτων (velocity distribution). Ας θεωρήσουμε έαν ιδανικό αέριο σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του. Μπορεί να αποδειχθεί (π.χ. βλέπε *Halliday and Resnick*, Φυσική, Μέρος Α, Συμπληρωματικό ζήτημα IV), ότι η κατανομή ταχυτήτων του αερίου δίνεται από την σχέση

$$dn = cve^{-(v^2/b^2)}dv$$

όπου c και b είναι σταθερές, v είναι η ταχύτητα και dn είναι ο αριθμός των σωματιδίων (μορίων ή ατόμων), που έχουν ταχύτητες μεταξύ v και $v + dv$. Στο πείραμα αυτό θα μελετηθεί, αν ένας μεγάλος αριθμός δίσκων, που κινούνται τυχαία στην αεροτράπεζα, δηλαδή ένα 'αέριο δίσκων', έχει την ίδια κατανομή ταχυτήτων όπως και ένα ιδανικό αέριο.

171

B18. Ηλεκτρικό και Μηχανικό Ισοδύναμο Θερμότητας

Μέρος Α. Σκοπός μας εδώ είναι να μετρηθεί ο παράγοντας μετατροπής μεταξύ της ηλεκτρικής ενέργειας που μετράται σε Joules (J) και της θερμικής ενέργειας, που μετράται σε kilocalories (kcal), δηλαδή να βρούμε το ηλεκτρικό ισοδύναμο θερμότητας.

Για την εκτέλεση του πειράματος χρησιμοποιείται μία ηλεκτρική αντίσταση θέρμανσης μέσα σε ειδικό θερμιδόμετρο, μέσω της οποίας μετατρέπεται ηλεκτρική ενέργεια σε θερμική ενέργεια. Κάτω από την παραδοχή ότι η ολική ενέργεια διατηρείται, η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώνεται θα πρέπει να είναι ίση με την θερμότητα που παράγεται.

Σε ένα αγωγό αντίστασης R απ' όπου περνά ένα συνεχές ρεύμα έντασης I, η ενέργεια που καταναλώνεται ανά μονάδα χρόνου, ή η ισχύς P, είναι ίση με το γινόμενο του ρεύματος που ρέει στον αγωγό, επί την διαφορά τάσης που επικρατεί στα άκρα του αγωγού, δηλαδή

$$P = IV \tag{1}$$

Η ισχύς ορίζεται σαν το έργο που παράγεται ανά μονάδα χρόνου δηλαδή

$$P = \frac{W}{t} \tag{2}$$

έτσι ώστε η ολική ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώνεται σε χρόνο t είναι

$$W = IVt \tag{3}$$

Αν το ρεύμα μετράται σε A (amperes) και η διαφορά δυναμικού σε V (volts), η ολική ενέργεια που καταναλώνεται στο χρονο t (seconds) μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (3) και μετράται σε J (Joules).

Η θερμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο θερμιδόμετρο δίνεται από την σχέση

$$Q = mc\Delta T \tag{4}$$

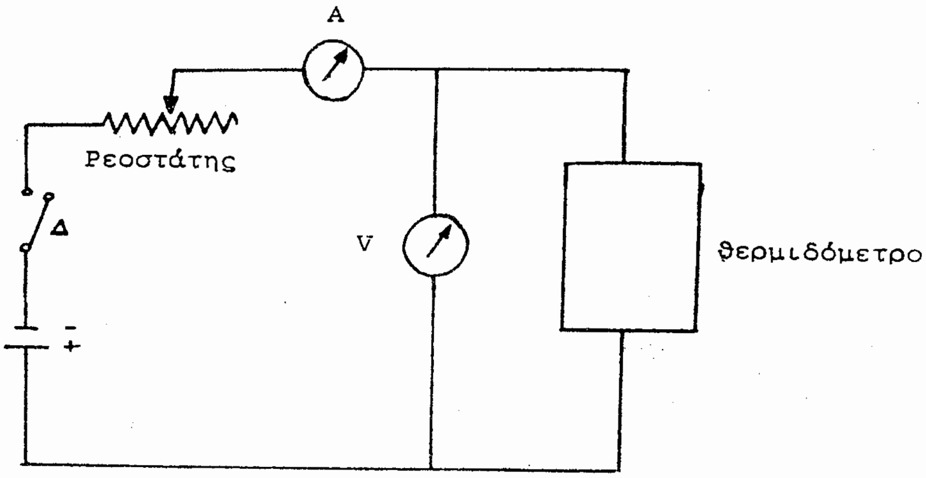
όπου m είναι η ολική μάζα των υλικών που θερμαίνονται, c είναι η ειδική θερμότητα και ΔT είναι η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμική. Αν m μετράται σε Kg, ΔT σε °C και c σε kcal/(kg °C), η ποσότητα θερμότητας Q που υπολογίζεται από την (4) μετράται σε kcal.

Η μονάδα μέτρησης της θερμότητας ορίζεται, έτσι ώστε η ειδική θερμότητα του νερού να είναι ίση με 1 kcal/(kg °C). Τα μέταλλα έχουν αρκετά μικρότερη ειδική θερμότητα π.χ. του χαλκού είναι 0.092 kcal/(kg °C) και του αλουμινίου είναι 0.216 kcal/kg ·°C.

Πειραματική διαδικασία

Λιγο πριν αρχίσετε μετρήσεις βάλτε στο θερμιδόμετρο 150-200 g νερού, του οποίου η μάζα θα πρέπει να μετρηθεί ακριβώς. Στο κάλυμα του θερμιδομέτρου υπάρχουν 4 ακροδέκτες (δύο για κάθε αντίσταση θέρμανσης), οι οποίοι θα πρέπει να συνδεθούν με ένα τροφοδοτικό DC, έτσι ώστε οι δύο αντιστάσεις (κάθε μία περίπου 1 Ω), να είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Πριν αρχίσετε το πείραμα, είναι προτιμότερο η θερμοκρασία του νερού να βρίσκεται $3^o - 4^o$ C κάτω από την θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Επίσης, είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται αποσταγμένο νερό, εφόσον υπάρχει, αντί του νερού της βρύσης (Γιατί;)

Για να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή του ισοδύναμου της θερμότητας, είναι αναγκαίο να μετατρέψουμε μία ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα, την οποία μπορούμε να μετρήσουμε. Αυτό επιτυγχάνεται με την διάταξη του Σχήματος B18.1.



Σχήμα B18.1. Διάταξη γιά την μέτρηση της Ηλεκτρικού Ισοδύναμου θερμότητας

Συνδέστε τις αντιστάσεις θέρμανσης, ένα αμπερόμετρο, ένα βολτόμετρο, τον ρεοστάτη, ένα διακόπτη (ανοιχτό), και ένα DC τροφοδοτικό, όπως και στο σχήμα B18.1. Το ρεύμα που περνά απο τις αντιστάσεις θέρμανσης, μπορεί να μεταβληθεί με τον ρεοστάτη και να μετρηθεί με το αμπερόμετρο. Η ένδειξη του βολτομέτρου δίνει την διαφορά δυναμικού στα άκρα των αντιστάσεων θέρμανσης.

Αφού κάνετε τις συνδέσεις κλείστε τον διακόπτη και ρυθμίστε τον ρεοστάτη, έτσι ώστε το ρεύμα να είναι μεταξύ 2 και 3 A. Στη συνέχεια, ανοίξτε τον διακόπτη και αναμίξτε το νερό με τον αναδευτήρα, ώστε η θερμοκρασία να είναι ομοιόμορφη και πάρτε την ένδειξη του θερμομέτρου. Για να αρχίσετε το πείραμα κλείστε τον διακόπτη, ενώ ταυτόχρονα, θέστε σε λειτουργία το χρονόμετρο.

Η θέρμανση του νερού θα πρέπει αν διαρκέσει γύρω στα 500-600 s (10 min) και ο αναδευτήρας θα πρέπει να χρησιμοποιείται για λίγο, κάθε φορά που καταγράφετε την θερμοκρασία (π.χ. κάθε ένα λεπτό). Κατά την διάρκεια που ο διακόπτης είναι κλειστός και σε κανονικά διαστήματα, θα πρέπει να καταγράψετε τις ενδείξεις των οργάνων για το ρεύμα και την τάση, έτσι ώστε να υπολογισθούν οι μέσες τιμές που θα χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς (βασικά οι μεταβολές αυτές, για τα οργανα που χρησιμοποιούμε και τις μικρές μεταβολές θερμοκρασίας μάλλον δεν είναι μετρήσιμες). Μετρήσεις του I, V και T θα πρέπει να καταχωρηθούν υπό μορφή πίνακα. Ανοίξτε τον διακόπτη αφού παρατηρήσετε ότι η θερμοκρασία του νερού είναι περίπου $3^{\circ} - 4^{\circ}$C πάνω από την θερμοκρασία του περιβάλλοντος (γιατί;) και αφού αναμίξετε το νερό καταγράψτε την τελική θερμοκρασία.

Αν υποθέσουμε ότι όλη η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώθηκε, μετατράπηκε σε θερμότητα που απορροφήθηκε από το νερό και τα υπόλοιπα μέρη του θερμιδομέτρου, βλέπουμε από τις εξισώσεις (3) και (4), ότι η αύξηση της θερμοκρασίας του συστήματος πρέπει να είναι ανάλογη του χρόνου θέρμανσης. Για να το εξετάσετε αυτό, κατασκευάστε ένα διάγραμμα της θερμοκρασίας σαν συνάρτηση του χρόνου. Είναι η καμπύλη που προκύπτει ευθεία γραμμή; αν όχι πως το εξηγείτε; Αν το διάγραμμα που παίρνετε είναι μια αρκετά ομαλή καμπύλη, πως μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε για να διορθώσετε την τελική θερμοκρασία που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μεταβολής του ΔT;

Υπολογίστε την ηλεκτρική και θερμική ενέργεια από τις εξισώσεις (3) και (4).

Για τον υπολογισμό του Q, θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψη, ότι ένα μικρό μέρος της ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιείται για να θερμάνει τα μέρη του θερμιδομέτρου που έρχονται σε επαφή με το νερό (π.χ. ο αναδευτήρας, τα τοιχώματα του δοχείου). Αυτό το ποσό θερμότητας, που ονομάζεται *θερμοχωρητικότητα* ή *ισοδύναμο νερού* του θερμιδομέτρου, μπορεί να υπολογισθεί αν λάβουμε υπ' όψη την ειδική θερμοτητα και την θερμική αγωγιμότητα των μερών εκείνων που έρχονται σε επαφή με το νερό. Ο κατασκευαστής συστήνει ότι το θερμιδόμετρο αντιστοιχεί σε ισοδύναμο νερού 0.009 kg, ενώ το θρμόμετρο 0.810^{-3} kg. (Το *ισοδύναμο νερού* ενός σώματος είναι η μάζα του νερού που θα απορροφήσει το ίδιο ποσό θερμότητας όπως και το σώμα για την ίδια μεταβολή ΔT της θερμοκρασίας).

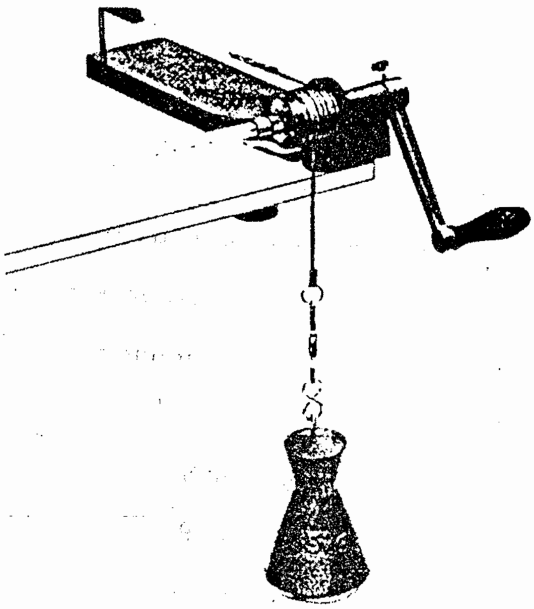
Το ισοδύναμο νερού (η θερμοχωρητικότητα) του θερμιδομέτρου και του θερμομέτρου θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στον υπολογισμό του ηλεκτρικού ισοδυνάμου. Για ακριβέστερα αποτελέσματα είναι καλύτερο να μετρηθεί το συνολικό ισοδύναμο νερού, δηλαδή του θερμομέτρου και του θερμιδομέτρου, αντί να χρησιμοποιηθούν οι τιμές του κατασκευαστή. Για την μέτρηση αυτή εφαρμόστε την πειραματική διαδικασία που περιγράφεται λεπτομερώς στην επόμενη ασκηση, B19.

Υπό την υπόθεση ότι η ενέργεια διατηρείται, υπολογίστε τον αριθμό των Joules ανά kcal, δηλαδή το ηλεκτρικό ισοδύναμο θερμότητας. Βρείτε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα του ηλεκτρικού ισοδύναμου, λαμβάνοντας υπ' όψη τα απόλυτα σφάλματα των άμεσων μετρήσεων. Συγκρίνετε την τιμή του ηλεκτρικού ισοδύναμου με την γνωστή τιμή των 4186 J/kcal. Συμφωνούν οι δύο τιμές μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος; (Εδώ ζητείται να κάνετε πληρη ανάλυση σφαλμάτων). Εάν η εκατοστιαία διαφορά είναι μεγαλύτερη του 4-5% θα πρέπει να απαναλάβετε το πείραμα.

Σημείωση. Οταν συγκρίνετε την πειραματική σας τιμή με την τιμή των 4186 J/kcal, θα πρέπει να λάβετε υπ' όψη, ότι οι αντιστάσεις των σημείων σύνδεσης των τεσσάρων ακροδεκτών στο κάλυμα του θερμιδομέτρου, των οποίων το μέγεθος είναι γύρω στα 0.02 Ω, καταναλώνουν ένα μικρό μέρος της ηλεκτρικής ενέργειας έτσι ώστε η τιμή που υπολογίστηκε για το ηλεκτρικό ισοδύναμο είναι λίγο ψηλότερη της πραγματικής. Ξέροντας ότι η αντίσταση κάθε ενός από τα σύρματα θέρμανσης είναι $\simeq 1$ Ω, εκτιμείστε το επί τοις εκατό συστηματικό σφάλμα στη μέτρησή σας.

Μέρος Β. Σκοπός του πειράματος εδώ είναι να καθορίσουμε τον παράγοντα μετατροπής μηχανικής ενέργειας (J) σε θερμότητα (kcal).

Στο πείραμα μετατρέπεται συνεχώς μέσω της συσκευής του σχήματος Β18.2, μηχανική σε θερμική ενέργεια. Η μηχανική ενέργεια αντιπροσωπεύει το έργο που εκτελεί η δύναμη της τριβής, που ασκείται λόγω του αναρτημένου βάρους μέσω μιας χάλκινης ζώνης που περιτυλίσσεται στο θερμιδόμετρο, με συνεχή περιστροφή του τελευταίου.



Σχήμα Β18.2. Συσκευή για την μέτρηση του Μηχανικού Ισοδύναμου θερμότητας

Η συσκευή του Σχήματος Β18.2 είναι έτσι κατασκευασμένη, ώστε η δύναμη τριβής να είναι ίση με το βάρος που κρέμεται, και να παραμένει πάντα σταθερή ανεξάρτητα της συχνότητας περιστροφής του θερμιδομέτρου (δηλαδή της χειρολαβής). Στο θερμιδόμετρο, είναι κατάλληλα προσαρμοσμένο θερμόμετρο, το οποίο μας δίνει την αύξηση της θερμοκρασίας του περιεχόμενου νερού, έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της θερμότητας που παράγεται. Οι απώλειες θερμότητας είναι μικρές και με προσεκτική εκτέλεση του πειράματος μπορεί να πετύχει κανείς αποτελέσματα που να διαφέρουν λιγώτερο του 4-5% από τη γνωστή τιμή.

Το μηχανικό έργο υπολογίζεται από την εξίσωση

$$W = Mgn\pi d \tag{5}$$

όπου Mg είναι το βάρος που κρεμάμε, n ο αριθμός των περιστροφών της χειρολαβής και d

είναι η διάμετρος του θερμιδομέτρου (εξηγείστε πως καταλήγουμε στην εξίσωση (5)).

Η αύξηση της θερμικής ενέργειας, λόγω μετατροπής σ' αυτή της μηχανικής, είναι ίση με την θερμότητα που κερδίζει το σύστημα, δηλαδή

$$\Delta Q = mc\Delta T \tag{6}$$

όπου m είναι η μάζα (αντιπροσωπεύει την μάζα του νερού, του θερμιδομέτρου και μέρος της μάζας του θερμομέτρου), c αντιπροσωπεύει τις αντίστοιχες ειδικές θερμότητες και ΔT είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας. Ο παράγοντας μετατροπής μηχανικής θερμότητας σε θερμική υπολογίζεται από το πηλίκο $W/\Delta Q$, ποσότητα που θα πρέπει να πλησιάζει την γνωστή τιμή των 4184 J/kcal.

Πειραματικό μέρος.

Ζυγίστε τις μάζες που χρειάζεται να γνωρίζετε. Για την συμμετέχουσα στο πείραμα μάζα του θερμομέτρου θεωρείστε ότι είναι ισοδύναμη με 0.8×10^{-3} kg νερού. Βάλτε στο θερμιδόμετρο νερό θερμοκρασίας 3-4°C κάτω της θερμοκρασίας εργαστηρίου. Στη συνέχεια, με την βοήθεια του διδάσκοντα, ετοιμάστε την όλη διάταξη σωστά πριν αρχίσετε να μετράτε. Κατόπιν, μετρείστε την αρχική θερμοκρασία και γυρίστε γρήγορα και σταθερά την χειρολαβή πολλές φορές, μέχρι που η θερμοκρασία να φτάσει 6-10 βαθμούς πάνω από την αρχική θερμοκρασία. Αν είναι δυνατόν, σημειώστε κατά την διάρκεια του πειράματος τις ενδιάμεσες θερμοκρασίες και τις αντίστοιχες τιμές του μετρητή των περιστροφών. Φτιάξτε ένα διάγραμμα του ΔT σαν συνάρτηση του αριθμού n των περιστροφών. Τι συμπεραίνετε; Χρησιμοποιείστε πρώτα το θερμιδόμετρο από χαλκό και υπολογίστε το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας. Επαναλάβατε το πείραμα με το θερμιδόμετρο αλουμινίου. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με την γνωστή τιμή του παράγοντα μετατροπής μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα, καθώς επίσης και με τα αποτελέσματα του 1ου μέρους της άσκησης. Συζητείστε τα αποτελέσματα και αναπτύξτε τα συμπεράσματά σας.

Σημειώστε ότι για ακριβέστερα αποτελέσματα θα πρέπει να μετρηθεί το συνολικό ισοδύναμο νερού, του θερμομέτρου και θερμιδομέτρου, αντι να χρησιμοποιηθούν οι τιμές του κατασκευαστή. Για την μέτρηση αυτή εφαρμόστε, και εδώ, την πειραματική διαδικασία που δίνεται στην επόμενη ασκηση, B19.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει:

1) Είσοδο δεδομένων μέρους Α

a) t_1, T_i, I_i, V_i ;$i = 1, 2, \cdots, n$

b) m_{H_2O}, C_{H_2O}, t_o, T_o

c) Απόλυτα σφάλματα μετρήσεων: ΔT, ΔI, ΔV, Δm.

2) Υπολογισμούς.

Το ηλεκτρικό ισοδύναμο είναι $J_i = W_i/Q_i$, όπου $W_i = I_i V_i \Delta t_i$ και $Q_i = mc\Delta T_i$. Το πρόγραμμα θα υπολογίζει ένα μεγάλο αριθμό ($\approx$ 100) τιμών του J για διαφορετικές διαφορές Δt_i και ΔT_i, αρχίζοντας από διαφορετικά σημεία των μετρήσεών σας. Κατόπιν θα βρίσκει την μέση τιμή $\overline{J}$ καιτην τυπική απόκλιση σ_j. Με χρήση της μεθόδου του Πιθανού Σφάλματος, θα υπολογίζεται το απόλυτο σφάλμα ΔJ, με βάση τις μέσες τιμές και τα απόλυτα σφάλματα των επιμέρους μετρήσεων. Στο τέλος θα εκτυπώνονται τα αποτελέσματα, καθώς και η εκατοστιαία διαφορά μεταξύ ΔJ και σ_J.

3) Απεικόνιση σ' ένα γραφικό των ζευγών, J_i, T$_i$ και της ευθείας J=4.186 J/cal.

B19. Θερμιδομετρία και Θερμοστοιχεία

Σε ένα μονοατομικό ιδανικό αέριο, κάθε άτομο μπορεί να κινηθεί ελεύθερα προς όλες τις διευθύνσεις εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση, κατά συνέπεια, έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι καλούνται θερμοδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας. Μπορεί να αποδειχθεί, ότι η μέση κινητική ενέργεια κάθε ατόμου είναι ίση με $(3/2)kT$, όπου T είναι η θερμοκρασία και k είναι η παγκόσμια σταθερά Boltzmann που ορίζεται από τον λόγο

$$k = \frac{R}{N_0} = 3.30 \times 10^{-27} kcal/^oC. \tag{1}$$

Στην (1) R είναι η παγκόσμια σταθερά αερίων και N_0 ο αριθμός του Avogadro. Η ολική ενέργεια ενός χιλιογραμμομορίου (kmole) του αερίου, λόγω της θερμικής κίνησης είναι $(3/2)N_0kT{=}(3/2)RT$.

<u>Η ατομική θερμότητα</u> ανά kmole υπό σταθερό όγκο ορίζεται σαν

$$C = \frac{dE}{dT}, \tag{2}$$

και αντιπροσωπεύει τον ρυθμό μεταβολής με την θερμοκρασία της ολικής ενέργειας ανά kmole. Για ένα ιδανικό μονοατομικό αέριο, η εξίσωση (2) είναι

$$C = \frac{3}{2}R = 2.98\ kcal(kmoles^oC)^{-1}. \tag{3}$$

Αν εκτός της μεταφορικής κίνησης υπήρχαν και άλλα είδη κινήσεων (επιπλέον βαθμοί ελευθερίας) τότε η ατομική θερμότητα C είναι μεγαλύτερη. Αυτό συμβαίνει π.χ., σε μη μονοατομικά αέρια στα οποία, εκτός από μεταφορική, υπάρχει περιστροφική και δονητική κίνηση.

Πριν την ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας (δηλαδή πριν το 1900), υπήρχε η ιδέα ότι μία παρόμοια απλή θεωρία, πρέπει να ισχύει και για τα στερεά. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή, κάθε άτομο στο στερεό συμπεριφέρεται σαν αρμονικός ταλαντωτής, του οποίου η ταλάντωση μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσεις, x, y και z. Επειδή η ολική ενέργεια ενός υλικού σημείου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση σε ένα άξονα είναι ίση με το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας (και η μέση κινητική ενέργεια ισούται με την μέση δυναμική ενέργεια), η ολική ενέργεια του ατόμου σε ένα στερεό είναι $3kT$ και για ποσότητα ενός kmole είναι $E = 3RT$, έτσι ώστε η ατομική θερμότητα ενός στερεού σώματος είναι

$$C = \frac{dE}{dT} = 3R = 5.96\ kcal(kmole^oC)^{-1} \tag{4}$$

όπου R=1.986 kcal/(kmole ^{o}C). Δηλαδή σύμφωνα με την κινητική θεωρία η ατομική θερμότητα όλων των στερεών είναι σταθερή και ίση με 5.96 kcal/(kmole^{o}C). Εκτός από λίγες εξαιρέσεις το πείραμα δείχνει, ότι η ειδική θερμότητα των στερεών είναι σταθερή για συνήθεις θερμοκρασίες και προσεγγίζει την παραπάνω τιμή. Η εξίσωση (4) διαπιστώθηκε πρώτα το 1819 και είναι γνωστή σαν νόμος του Dulong και Petit, απ' αυτούς που την ανακάλυψαν. Αποκλίσεις από την τιμή αυτή παρουσιάζουν στερεά με ελαφρά άτομα σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στα προηγούμενα βλέπε π.χ. : Κ.Δ. Αλεξόπουλος, Γενική Φυσική, τόμος 4ος, Θερμότης.

Η <u>ειδική θερμοτητα</u>, c, μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (4) αφού διαιρεθεί με το ατομικό βάρος. Συνήθως ορίζουμε την ειδική θερμότητα μιας ουσίας σαν την ποσότητα θερμότητας που χρειάζεται για να αυξήσει την θερμοκρασία της μονάδας μάζας της ουσίας κατά 1 °C. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, συμπεραίνουμε ότι, όταν ένα σώμα μάζας m θερμαίνεται ώστε η θερμοκρασία της μεταβάλλεται κατά ΔT το ποσό θερμότητας που κέρδισε το σώμα είναι

$$Q = mc\Delta T, \tag{5}$$

όπου c η ειδική θερμότητα του σώματος.

Πείραμα

<u>Μέρος Α.</u> Εδώ θα μετρηθεί η ειδική θερμότητα διαφόρων στερεών με τη μέθοδο των μιγμάτων. Η αρχή της μεθόδου είναι η εξής:

Αν δύο σώματα, που βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες έλθουν σε θερμική επαφή, τότε το σώμα με την χαμηλότερη θερμοκρασία θα απορροφήσει μία ορισμένη ποσότητα θερμότητας μέχρι που οι θερμοκρασίες στων δύο σωμάτων να εξισωθούν. Είναι φανερό, εφόσον τα δύο σώματα είναι θερμικώς μονωμένα με το περιβάλλον τους, ότι όση θερμότητα χάσει το θερμότερο σώμα θα την κερδίσει το ψυχρότερο. Αν η μάζα, η ειδική θερμότητα, και η αρχική θερμοκρασία του θερμότερου σώματος είναι m_1, c_1, θ_1, του ψυχρότερου m_2, c_2, θ_2 και η τελική θερμοκρασία σου συστήματος θ_τ, τότε θα ισχύει η σχέση

$$c_1 m_1(\theta_1 - \theta_\tau) = c_2 m_2(\theta_\tau - \theta_2) \tag{6}$$

Η εξίσωση (6), μπορεί να χρησιμοποιηθει για την εύρεση της ειδικής θερμότητας ενός σώματος, εφόσον η ειδική θερμότητα του άλλου σώματος με το οποίο έρχεται σε θερμική επαφή είναι γνωστή.

Στο παρόν πείραμα σαν σώμα γνωστής c χρησιμοποιείται το νερό, γιά το οποίο c=1 **kcal/(kg °C)**, και επιδιώκεται να μετρηθεί η ειδική θερμότητα του χαλκού (**Cu**) και του γυαλιού, τα οποία έρχονται σε θερμική επαφή με το νερό μέσα σε ένα ειδικό θερμιδόμετρο. Το θερμιδόμετρο έχει καλή θερμική μόνωση, ώστε οι απώλειες της θερμότητας προς το περιβάλλον να περιορίζονται αρκετά. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (6) θα πρέπει να προσαρμοσθεί κατάλληλα, ώστε να περιλαμβάνει και τη συμβολή του συστήματος του θερμιδομέτρου στη διαμόρφωση της τελικής θερμοκρασίας, δηλαδή

$$c_1 m_1(\theta_1 - \theta_\tau) = [c_{H_2O} m_{H_2O} + c_\Theta m_\Theta] \cdot (\theta_\tau - \theta_2) \tag{7}$$

όπου ο παράγοντας $c_\Theta m_\Theta$ ονομάζεται <u>θερμοχωρητικότητα</u> του θερμιδομέτρου και οφείλεται στα μέρη εκείνα της συσκευής που έρχονται σε επαφή με το νερό (τα τοιχώματα του δοχείου, ο αναδευτήρας, το θερμόμετρο). Η θερμοχωρητικότητα ενός σώματος είναι ίση με το γινόμενο mc της μάζας του σώματος επί την ειδική θερμότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται.

Πειραματική διαδικασία. Θα υπολογίσετε την ειδική θερμότητα του χαλκού και του γυαλιού. Το προς εξέταση στερεό θερμαίνεται σε μία σχετικά σχετικά υψηλή θερμοκρασία, κατά προτίμηση θ=100 °C, μέσα σε μία συσκευή θέρμανσης η οποία έχει σχεδιαστεί κατάλληλα; ώστε να μην έρχεται σε άμεση επαφή με το νερό που βράζει ή τον ατμό. (Τι πλεονεκτήματα παρουσιάζει αυτό;).

Η συσκευή θέρμανσης του στερεού σώματος, αποτελείται από ένα κυλινδρικό δοχείο στο οποίο έχουν προσαρμοσθεί δύο ακροφύσια από όπου μπορεί να μπαίνει και να βγαίνει ατμός. Κατά μήκος του άξονα του δοχείου, υπάρχει ένας εσωτερικός κυλινδρικός χώρος που χρησιμεύει για την τοποθέτηση του υλικού για θέρμανση. Η ουσία τοποθετείται από το πάνω στόμιο του χώρου αυτού και αφού θερμανθεί, μπορεί να πέσει στο θερμιδόμετρο από το κατώτερο στόμιο, μέσω ενός συρταρωτού ανοίγματος. Για να θερμανθεί η ουσία, διοχετεύεται ατμός νερού (θερμοκρασίας 100 °C) από το πάνω ακροφύσιο, μέσω ενός ελαστικού σωλήνα, που συνδέεται με μια απλή συσκευή παραγωγής υδρατμών με βρασμό. Ο ατμός θα πρέπει να περάσει για αρκετό χρονικό διάστημα μέσα από την συσκευή, έτσι ώστε να επέλθει θερμική ισορροπία. Ο χρόνος που χρειάζεται για θερμική ισορροπία εξαρτάται από την θερμική αγωγιμότητα της ουσίας. Ετσι π.χ. ο χαλκός είναι καλός αγωγός θερμότητας ώστε ένας χρόνος **5–10 min** είναι αρκετός, ενώ αντίθετα, το γυαλί απαιτεί **20–30 min** για ομοιόμορφη θέρμανση (πως ορίζεται η θερμική αγωγιμότητα ενός υλικού;).

Αφού καταγράψετε την ακριβή αρχική θερμοκρασία του νερού, ταποθετείστε το θερμιδόμετρο, κάτω από την συσκευή θέρμανσης (η οποία είναι στερεωμένη σε μια κατακόρυφη ράβδο) κοντά στο στόμιο εξόδου της ουσίας ώστε η ουσία να πέσει στο συρμάτινο δίχτυ που είναι προσαρμοσμένο στον αναδευτήρα και όχι στο βυθό του δοχείου. Η διεργασία αυτή θα πρέπει να γίνει προσεκτικά και πολύ γρήγορα, ώστε η ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη (αποτελεί μάλλον σημαντική πηγή σφάλματος). Αφού κλείσετε το κάλυμα του θερμιδομέτρου, κάνετε χρήση του αναδευτήρα για να πάρετε ομοιόμορφη θερμοκρασία. Οταν η θερμοκρασία σταθεροποιηθεί, που σημαίνει ότι έχει αποκατασταθεί θερμική ισορροπία, καταγράψτε την ένδειξη του θερμομέτρου. Ο πιο απλός τρόπος καθορισμού των διαφόρων μαζών που χρειάζονται, είναι να ζυγίζεται η συσκευή του θερμιδόμετρου, πρώτα όταν είναι άδεια, δεύτερον μετά τη τοποθέτηση του νερού και τρίτον μετά τη τοποθέτηση της στερεάς ουσίας.

Πριν προχωρήσετε στον υπολογισμό της ειδικής θερμότητας (για το γυαλί και τον χαλκό), υπολογίστε την θερμοχωρητικότητα του συστήματος του θερμιδομέτρου. Προς τούτο, ακολουθείστε την παρακάτω διαδικασία.

Υπολογισμός Θερμοχωρητικότητας. Αναμίξτε δύο ποσότητες νερού m_1 και m_2, που έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες, θ_1 και θ_2 ανίστοιχα και μετρείστε την τελική θερμοκρασία θ_τ. Εάν m_1 είναι η μάζα του νερού, που βρίσκεται στο θερμιδόμετρο πριν το πείραμα και m_2 είναι η μάζα του ζεστότερου νερού, που προστέθηκε, τότε η θερμοχωρητικότητα $c_\Theta m_\Theta$ υπολογίζεται από την σχέση

$$c_\Theta m_\Theta = c_{H_2O} m_2 \frac{\theta_2 - \theta_\tau}{\theta_\tau - \theta_1} - c_{H_2O} m_1 \tag{8}$$

Χρησιμοποιείστε τις εξισώσεις (8) και (7) και τις μετρήσεις μαζών και θερμοκρασιών και υπολογίστε την ειδική θερμότητα του χαλκού και του γυαλιού. Στη συνέχεια, υπολογίστε το πειραματικό σφάλμα για την περίπτωση του χαλκού με βάση τα απόλυτα σφάλματα των ποσοτήτων που μετρήθηκαν. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την γνωστή τιμή της ειδικής θερμότητας για τον χαλκό (c_{Cu}=0.092 kcal/(kg^{o}C)). Υπάρχει συμφωνία των δύο τιμών εντός του ορίου του σφάλματος; (Εδώ ζητείται πλήρης ανάλυση διάδοσης σφαλμάτων στους υπολογισμούς με την μέθοδο του Πιθανού Σφάλματος). Συγκρίνετε την ειδική θερμότητα για το γυαλί με την γνωστή τιμή που είναι ίση με 0.199 kcal/(kg^{o}C). Είναι η τιμή αυτή μικρότερη σε σύγκριση με την αποδεκτή; (αν ναι, ποιός είναι ο κυριώτερος λόγος;). Υπολογίστε το ατομικό βάρος του χαλκού, χρησιμοποιώντας τον νόμο των Dulong–Petit. Τι συμπεραίνετε για την ισχύ του νόμου αυτού; Δίνεται ότι AB$_{Cu}$=64,54.

Μέρος Β. Εδώ θα μετρηθεί η λανθάνουσα θερμότητα τήξης του πάγου.

Κατά τη διάρκεια της τήξης ενός σώματος η θερμοκρασία παραμένει σταθερή παρόλο που προσφέρεται διαρκώς θερμότητα. Η θερμότητα αυτή καταναλώνεται για να μετατραπεί η στερεά κατάσταση του σώματος σε υγρή. Η θερμότητα εκείνη που χρειάζεται για να τακεί η μονάδα μάζας ενός υλικού, το οποίο βρίσκεται στη θερμοκρασία τήξης, ονομάζεται λανθάνουσα θερμότητα τήξης, λ.

Αν ρίξουμε στο θερμιδόμετρο πάγο, που βρίσκεται στη θερμοκρασία τήξης, το νερό που προέρχεται από την τήξη του πάγου θερμαίνεται από μηδέν βαθμούς, μέχρι μία τελική θερμοκρασία θ_τ. Ταυτόχρονα το θερμιδόμετρο με το νερό κρυώνει από μια αρχική θερμοκρασία θ_α, μέχρι την θ_τ. Η θερμότητα που παρέχεται από το σύστημα του θερμιδομέτρου είναι ίση με το άθροισμα της θερμότητας που χρειάζεται για την τήξη του πάγου και για την θέρμανση του νερού που προέκυψε από την τήξη. Υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι απόλυτα μονωμένο από το περιβάλλον έχουμε την εξίσωση

$$m_\Theta c_u(\Theta_\alpha - \theta_\tau) + m_\nu c_\nu(\theta_\alpha - \theta_\tau) = m\lambda + mc_\nu\theta_\tau \tag{9}$$

όπου $m_\Theta c_\Theta$ είναι η θερμοχωρητικότητα του συστήματος του θερμιδομέτρου (ο ίδιος παράγοντας όπως και στην εξίσωση (7)), m_ν, c_ν είναι η μάζα και η ειδική θερμοτητα του νερού που βρίσκεται στο θερμιδόμετρο, m η μάζα του παγου και λ η θερμότητα τήξης. Η εξίσωση (9), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του λ.

Σημειώστε, ότι ο πάγος που ρίχνεται στο θερμιδόμετρο πρέπει να έχει θερμοκρασία 0°C. Επειδή ο πάγος που βγαίνει αμέσως από τον χώρο κατάψυξης του ψυγείου, έχει θερμοκρασία μικρότερη των 0°C, πρεπει να αφήνεται μέχρι που να αρχίσει να τήκεται. Αυτό ευκολύνεται όταν ο πάγος θρυμματισθεί σε μικρά κομμάτια.

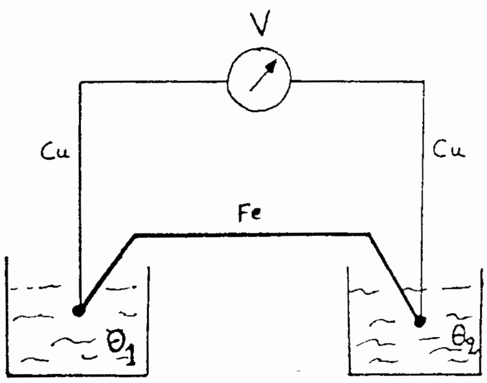
Υπολογίστε την θερμότητα τήξης του πάγου και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την γνωστή τιμή $\lambda_{H_2O} = 79.71$ kcal/kg (υπό πίεση 1 Atm). Για τον υπολογισμό χρησιμοποιείστε την τιμή του $m_\Theta c_\Theta$ του θερμιδομέτρου που βρήκατε στο Μέρος Α. Επίσης υπολογίστε το πειραματικό σφάλμα $\Delta\lambda$.

Μέρος Γ. Το αντικείμενο εδώ είναι η βαθμονόμηση ενός θερμοστοιχείου και η χρήση του για την μέτρηση θερμοκρασιών.

Αν σχηματίσουμε ένα κύκλωμα συνδέοντας δύο σύρματα διαφορετικών μετάλλων, π.χ. σιδήρου και χαλκού, και τοποθετήσουμε τα δύο σημεία επαφής σε διαφορετικές θερμοκρασίες (βλέπε σχήμα B19.1), τότε θα παρατηρήσουμε ότι μεταξύ των δύο συνδέσεων θα δημιουργηθεί μία διαφορά δυναμικού.

Το σύστημα των δύο ετερογενών μετάλλων ονομάζεται θερμοστοιχείο (thermocouple). Η τάση που αναπτύσσεται ονομάζεται *θερμοηλεκτρική τάση* και είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ των δύο επαφών ενώ εξαρτάται επίσης και από την φύση των μετάλλων. Αν η μία σύνδεση (επαφή) παραμένει σε μία σταθερή θερμοκρασία (π.χ. θερμοκρασία πάγου), που ονομάζεται θερμοκρασία αναφοράς, ενώ η άλλη σε μία μεταβαλλόμενη θερμοκρασία Θ, τότε η θερμοηλεκτρική τάση θα εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της θερμοκρασίας Θ.

Το θερμοηλεκτρικό φαινόμενο βρίσκει εφαρμογή στη μέτρηση διαφόρων φυσικών ποσοτήτων. Τα θερμοστοιχεία χρησιμοποιούνται κυρίως γιά την μέτρηση θερμοκρασιών, μετά από ακριβή βαθμονόμηση, έτσι ώστε η μέτρηση θερμοκρασιών ανάγεται στην μέτρηση θερμοηλεκτρικών τάσεων. Π.χ για την μέτρηση θερμοκρασιών μέχρι 1200°C, μπορεί να χρησιμοποιηθεί θερμοστοιχείο που αποτελείται από σίδηρο και constantan, ενώ μέχρι 1600°C θερμοστοιχείο Pt και Rh. Τα θερμοστοιχεία χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην κατασκευή οργάνων ηλεκτρικών μετρήσεων (αμπερόμετρα, βολτόμετρα), ιδιαίτερα χρήσιμα γιά μετρήσεις στην περιοχή των υψηλών (HF) και υπέρ υψηλών (VHF) συχνοτήτων (το ανώτερο όριο είναι περί τα 100 MHz).



Σχήμα Β19.1. Θερμοστοιχείο Fe-Cu

Πειραματικό μέρος. Παρέχονται ενα θερμοστοιχείο το οποίο θα πρέπει πρώτα να βαθμονομηθεί και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση διαφόρων γνωσιών θερμοκρασιών. Η βαθμονόμηση συνίσταται στη χάραξη της καμπύλης μεταξύ των ενδείξεων ενός μιλλιβολτομέτρου, που μετρά την θερμοηλεκτρική τάση που αναπτύσσεται στα ακρα των μετάλλων του θερμοστοιχείου, και της θερμοκρασίας επαφής των μετάλλων. Η βαθμονόμηση μπορεί να γίνει με την χρήση διαφόρων γνωσιών θερμοκρασιών π.χ. θερμοκρασία ζέσης του νερού, τήξης διαφόρων μετάλλων ή (όπως γίνεται στο πείραμα) με συνεχή θέρμανση, μέσω ενός θερμομέτρου.

Στο παρόν πείραμα, θα χρησιμοποιήσετε την θερμαντική φλόγα του λύχνου Bunsen για να θερμάνετε ένα δοκιμαστικό σωλήνα, που περιέχει μια μικρή ποσότητα ρινισμάτων σιδήρου όπου βυθίζονται το θερμόμετρο (κλίμακας -10 °C έως 360 °C) και η επαφή των μετάλλων του θερμοστοιχείου. Μην πλησιάζετε τον δοκιμαστικό σωλήνα πολύ κοντά στο στόμιο του λύχνου και διακόψτε την θέρμανση, όταν η θερμοκρασία φτάσει περίπου τους 320 $°C$. Τα ελεύθερα άκρα των δύο μεταλλικών συρμάτων συνδέονται με ένα μιλλιβολτόμετρο. Πριν αρχίσετε την θέρμανση βεβαιωθείτε ότι η ένδειξη του οργάνου είναι μηδέν.

Για την βαθμονόμηση, οι ενδείξεις του μιλλιβολτομέτρου καταγράφονται ταυτόχρονα με τις ενδείξεις του θερμομέτρου. Σημειώστε τις τιμές της θερμοηλεκτρικής τάσης ανά 20 °C ή 30 °C, καθώς η θερμοκρασία ανέρχεται αλλά και όταν κατέρχεται (κατα την ψύξη). Καταχωρείστε τις μετρήσεις σας σε πίνακα. Χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτές κατασκευάστε το διάγραμμα βαθμονόμησης για την άνοδο και κάθοδο της θερμοκρασίας. Διαφέρουν οι δύο καμπύλες και γιατί; ποιά απ' αυτές είναι κατά την γνώμη σας πιο αξιόπιστη και γιατί;

Μετά την βαθμονόμηση, θα χρησιμοποιήσετε το θερμοστοιχείο και την καμπύλη βαθμονόμησης, για την μέτρηση διαφόρων θερμοκρασιών π.χ. στο σημείο ζέσης του νερού (των ατμών). Επίσης παρέχονται τα στερεά κασσίτερος (Sn) και μόλυβδος (Pb), τα οποία μπορούν να θερμανθούν μέχρι τήξης και να μετρηθούν τα σημεία τήξης (η καλύτερα πήξης) τους. Να συγκρίνετε κάθε θερμοκρασία που μετρήσατε με την γνωστή της τιμή και να υπολογίσετε την εκατοστιαία διαφορά (θερμοκρασία τήξης Sn είναι 231.9 °C ενώ του Pb είναι 327.4 °C). Να κάνετε επιπλέον και τους υπολογισμούς σφαλμάτων. Αναφερθείτε λεπτομερώς στις πηγές σφάλματος.

Προτεινόμενο πρόγραμμα

Θερμιδομετρία. Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει δύο βασικά υποπρογράμματα Α και Β.

Α) Υπολογισμός της ειδικής θερμότητας c, ενός ή περισσοτέρων υλικών και των σφαλμάτων Δc και $\Delta c/c$.

1) Είσοδος παραμέτρων και μετρήσεων (αριθμός υλικών, είδος υλικού, μάζα, αρχική θερμοκρασία, τελική θερμοκρασία).

2) Σε ξεχωριστό υποπρόγραμμα θα ζητούνται τα στοιχεία που χρειάζονται (π.χ. θερμοκρασίες, μάζες, C_{H_2O}) και θα υπολογίζεται η θερμοχωρητικότητα $c_{\Theta}m_{\Theta}$ του θερμιδομέτρου.

3) Σε ξεχωριστό υποπρόγραμμα θα υπολογίζεται το απόλυτο Δc και το σχετικό $\Delta c/c$ σφάλμα με βάση αναλυτική έκφραση που προκύπτει από τον ορισμό του πιθανού σφάλματος. Οτι στοιχεία χρειάζονται (π.χ. απόλυτα σφάλματα άμεσα μετρούμενων ποσοτήτων), θα πρέπει να εισάγονται από το πληκτρολόγιο, μέσω του υποπρογράμματος.

B) Υπολογισμός λανθάνουσας θερμότητας λ του πάγου και σφαλμάτων $\Delta\lambda$ και $\Delta\lambda/\lambda$. Ακολουθείστε τα ίδια στάδια όπως στο υποπρόγραμμα **A**.

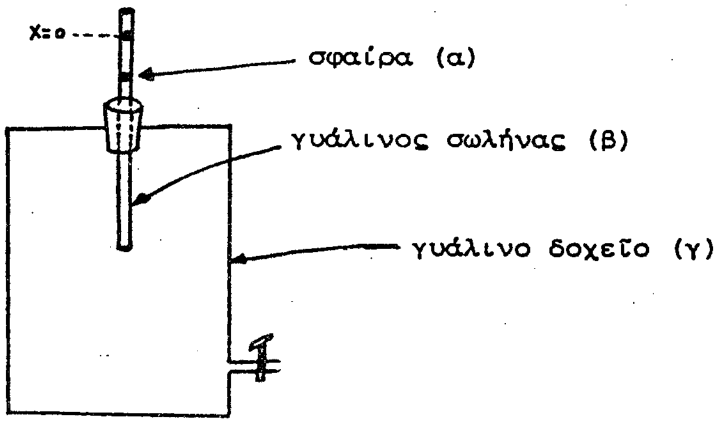
<u>Θερμοστοιχεία.</u>Το πρόγραμμα θα πρέπει να περιλαμβάνει:

1) Είσοδο στοχείων, δηλαδή **a)** μετρήσεων V_i γαλβανομέτρου και θερμοκρασίας T_i μόνο για την περίπτωση καθόδου της θερμοκρασίας. **b)** μετρήσεις αποκλίσεων V_1, και V_2 που αντιστοιχούν στη θερμοκρασία ζέσης H_2O και τήξης Sn. **c)** σημείου ζέσης H_2O και τήξης Sn.

2) Προσαρμογή στα σημεία V_i, T_i ενός πολυωνύμου 2ου βαθμού με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Εκτύπωση της εξίσωσης του πολυωνύμου και κατασκευή ενός γραφικού που θα απεικονίζει τις μετρήσεις V_i, T_i και την καμπύλη του πολυωνύμου. Στη συνέχεια, χρήση της εξίσωσης του πολυωνύμου και υπολογισμού των θερμοκρασιών T_1, T_2, που αντιστοιχούν στα V_1 και V_2 που μετρήθηκαν. Σύγκριση των T_1 και T_2 με τις γνωστές τιμές. Τέλος, εκτύπωση όλων των αποτελεσμάτων λαμβάνοντας πρόνοια για τα σημαντικά ψηφία.

B20. Μέτρηση του λόγου $\gamma = C_p/C_v$ των αερίων

Ενώ οι μετρήσεις των ειδικών θερμοτήτων C_p και C_v, συνήθως περιλαμβάνουν μεταφορά θερμότητας, είναι δυνατόν να μετρήσουμε τον λόγο $\gamma = C_p/C_v$ με μια πολύ απλή και έξυπνη μέθοδο που οφείλεται στο Rückhardt. Η μέθοδος βασίζεται στην αδιαβατική συμπίεση και εκτόνωση ενός αερίου και οι μετρήσεις γίνονται με την πειραματική διάταξη που δείχνεται παρακάτω.



Μια μικρή μεταλλική σφαίρα (α), αφήνεται να πέσει μέσα σ' ένα γυάλινο σωλήνα ακριβείας (β), που κρατιέται κατακόρυφα από ένα ελαστικό πώμα, που κλείνει αεροστεγώς το γυάλινο δοχείο (γ). Η σφαίρα εφαρμόζει ακριβώς στο σωλήνα, έτσι ώστε οι απώλειες του αερίου από το δοχείο (γ) στην ατμόσφαιρα να είναι αμελητέες. Οταν η σφαίρα αφεθεί στο πάνω άκρο του σωλήνα (β), πέφτει λόγω της βαρύτητας και συμπιέζει το αέριο στο δοχείο (γ). Το συμπιεσμένο αέριο εξασκεί μία δύναμη επαναφοράς και η σφαίρα ταλαντώνεται μέσα στο σωλήνα. Για ταλαντώσεις μικρού πλάτους, η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση και η περίοδός της εξαρτάται από τον τύπο του αερίου στο δοχείο (γ).

Οταν η σφαίρα ισορροπεί η πίεση του αερίου στο δοχείο P είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0 συν την πίεση που οφείλεται στο βάρος της σφαίρας

$$P = P_0 + \frac{mg}{A} \tag{1}$$

m είναι η μάζα της σφαίρας και A η τομή του γυάλινου σωλήνα (β).

Οταν η σφαίρα μετατοπισθεί από την θέση ισορροπίας κατά απόσταση x η πίεση αλλάζει κατά dP. Η δύναμη επαναφοράς είναι $F = AdP$.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Adp \tag{2}$$

Η μεταβολη της πίεσης κατά dp, μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται αδιαβατικά, γιατί πολύ λίγη θερμοτητα προστίθεται ή χάνεται από το γυάλινο δοχείο κατά την διάρκεια αυτής της διεργασίας. Σε μία αδιαβατική διεργασία έχουμε

$$PV^\gamma = C$$

και

$$dpV^\gamma + \gamma V^{\gamma-1}PdV = 0$$

ή

$$dp = -\gamma \frac{P}{V} dV \tag{3}$$

όπου

$$dV = \text{η μεταβολή του όγκου} = xA \tag{4}$$

όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας.

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{P}{V} A^2 x = 0 \tag{5}$$

Η (5) είναι η εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με περίοδο

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}}.$$

Τελικά

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{T^2 PA} \tag{6}$$

Ολες οι ποσότητες που μπαίνουν στον τύπο (6), μπορούν να μετρηθούν. Η πίεση P και ο όγκος V μπορούν κατά μεγάλη προσέγγιση να ληφθούν ίσα με P_0 (ατμοσφαιρική πίεση) και V_0 (όγκος γυάλινου δοχείου), αντίστοιχα. Σε σχέση με τα άλλα μεγέθη, η περίοδος T πρέπει να μετρηθεί με όση το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια (γιατί;).

Πρίν αρχίσετε το πείραμα, καθαρίστε προσεκτικά το εσωτερικό του σωλήνα με αποσταγμένο νερό και οινόπνευμα. Κλείστε το δοχείο (γ) με το λαστιχένιο πώμα και το σωλήνα. Μετρείστε αρκετές φορές το χρόνο που χρειάζεται για 10 με 20 ταλαντώσεις και υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης. Μετρείστε και τις άλλες ποσότητες που μπαίνουν στον τύπο

(6). Υπολογίστε από τον τύπο (6) την τιμή του γ για το αέριο καθώς και το σχετικό και απόλυτο σφάλμα. Συμφωνεί η τιμή που βρήκατε με τις θεωρητικές προβλέψεις μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος;

Το πείραμα αυτό δείχνει, πως κάποιος μπορεί να βγάλει συμπεράσματα για την ατομική και μοριακή δομή της ύλης, με πολύ απλές πειραματικές συσκευές.

Ερωτήσεις

1) Δικαιογείστε την αντικατάσταση των P και V από τα P_0 και V_0; αντίστοιχα.

2) Στην εξαγωγή του τύπου (6) δεν πήραμε υπ' όψη τα φαινόμενα τριβής. Εάν η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας $F_f = -ndx/dt$ πως αλλάζουν τα αποτελέσματά μας; Πως θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το n με το ίδιο πείραμα;

3) Τι είναι αδιαβατική μεταβολή; Δείξτε πως για μια αδιαβατική μεταβολή $PV^{\gamma} = c$.

4) Τι είναι θερμοδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας και πως συνδέονται με τα C_p, C_v και γ;

5) Εξηγεί ικανοποιητικά η κινητική θεωρία τα πειραματικά σας αποτελέαματα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

6) Ποιές ιδιότητες των ειδικών θερμοτήτων των στερεών και αερίων δεν μπορούν να εξηγηθούν με την κλασσική φυσική;

Βιβλιογραφία

Halliday and Resnick, Φυσική Μέρος Α, Κεφ.15 και Κεφ.23.

B21. Προσδιορισμός του μεγέθους του μορίου και του αριθμού Avogadro

Σ' αυτό το πείραμα [1] θα υπολογίσουμε το μέγεθος του μορίου και τον αριθμό του Avogadro. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε βασικές έννοιες της κινητικής θεωρίας και δύο πειραματικές παρατηρήσεις. Η πρώτη αφορά το 'μήκος διάχυσης' (diffusion length) του ιωδίου στον αέρα σε θερμοκρασία 100 °C σαν συνάρτηση του χρόνου, και η δεύτερη την μεταβολή του όγκου μιας ορισμένης ποσότητας διοξειδίου του άνθρακα καθώς περνά από την στερεά στην αέρια κατάσταση. Για σκοπούς επίδειξης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διάχυση βρωμίου στον αέρα σε θερμοκρασία δωματίου και η μεταβολή του όγκου, λόγω εξαέρωσης, μιας μικρής ποσότητας υγρού αζώτου.

Εισαγωγή

Από την στοιχειώδη κινητική θεωρία των αερίων βρίσκουμε ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή λ ενός μορίου δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{1}{\pi n d^2} \tag{1}$$

όπου n είναι η μοριακή πυκνότητα και d η διάμετρος του μορίου. [2]

Αν μπορέσουμε να καθορίσουμε πειραματικά τις ποσότητες λ και n σαν συνάρτηση του d, τότε θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το μέγεθος του μορίου που δίνεται από την διάμετρο d. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί μέσω δύο απλών πειραμάτων, σε συνδυασμό με βασικές έννοιες της κινητικής θεωρίας. Τα δύο πειράματα είναι η διάχυση ατμών ιωδίου στον αέρα σε θερμοκρασία 100 °C και η μεταβολή του όγκου, λόγω εξάχνωσης, μιας μικρής ποσότητας ξηρού πάγου.

Με το πείραμα της εξάχνωσης είναι δυνατόν να βρούμε το n, σαν συνάρτηση του d. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό εξηγείται αμέσως παρακάτω.

[1] Η άσκηση αυτή αποτελεί απόδοση στα ελληνικά της εργασίας του Γ. Αλεξανδράκη με τίτλο: Determination of molecular side and Avogadro 's number: A student experiment, που δημοσιεύτηκε στο American Journal of Rhysics, Vol. 46(8), P. 810, 1978.

[2] Για την απόδειξη της Εξ. (1) βλέπε Halliday and Resnick, Φυσική, Μέρος Α, Κεφ. 24.

Επειδή τα υγρά και στερεά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, τα μόριά τους, αν δεχθούμε ότι είναι σφαιρικά, βρίσκονται σχεδόν σε επαφή μεταξύ τους έτσι ώστε η απόσταση των κέντρων τους είναι ίση περίπου με την μοριακή διάμετρο. Παράλληλα, επειδή τα αέρια είναι συμπιεστά, τα μόρια του CO_2, μετά την εξάχνωση του ξηρού πάγου, θα βρίσκονται σε κάποια απόσταση το ένα από το άλλο. Ας υποθέσουμε ότι η μέση απόσταση των κέντρων των μορίων στην αέρια κατάσταση στη θερμοκρασία δωματίου είναι D. Ο όγκος του στερεού, V_s, είναι περίπου ίσος με Nd^3, όπου N είναι ο ολικός αριθμός των μορίων. Ο ίδιος αριθμός μορίων στην αέρια κατάσταση, θα καταλάβει σε θερμοκρασία δωματίου, όγκο $V_a = ND^3$. Επειδή οι όγκοι V_s και V_a μπορούν να μετρηθούν, για μια καθορισμένη ποσότητα ξηρού πάγου, ο λόγος

$$\frac{V_a}{V_s} = \frac{D^3}{d^3} = C \tag{2}$$

μπορεί να υπολογισθεί αρκετά εύκολα. Επειδή ο όγκος που καταλαμβάνει ένα μόριο στην αέρια κατάσταση, σε θερμοκρασία δωματίου, είναι κατά μέσο όρο D^3, η μοριακή πυκνότητα θα είναι: $n = 1/D^3 = 1/d^3C$. Αντικαθιστώντας την τιμή του n στην (1) έχουμε

$$\lambda = \frac{Cd}{\pi} \tag{3}$$

Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το d εφόσον καθορίσουμε το λ.

Το πείραμα της διάχυσης του ιωδίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό του λ. Πριν εξηγήσουμε πως μπορεί να επιτευχθεί αυτό, θα αναφέρουμε σύντομα μερικά στοιχεία για την διάχυση τυχαίου βηματισμού (random walk).

Η συγκέντρωση των μορίων μιας ουσίας, που διαχέεται σε ένα μέσον, είναι μια συνάρτηση Gauss της απόστασης[3]. Επειδή η συγκέντρωση των μορίων ελαττώνεται πολύ γρήγορα με την απόσταση από το σημείο διάχυσης, μία λογική εκτίμηση της μέσης απόστασης διάχυσης, είναι το μισό της απόστασης του σημείου εκείνου, στο οποίο ο ατμός δεν είναι ορατός. Οπως είναι γνωστό από την θεωρία του τυχαίου βηματισμού, (random walk theory) η ενεργός τιμή

[3] Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε: R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M.Sands. The Feynman Lectures on Physics (Addison–Wesley, Reading, MA, 1963), Vol. I Chap. 6.

[4] της απόστασης, S_{rms}, ενός μορίου με μέση ελεύθερη διαδρομή λ είναι

$$S_{rms} = \sqrt{N}\lambda = (\overline{v}\lambda t)^{1/2} \tag{4}$$

όπου N είναι ο αριθμός των 'βημάτων' που κάνει το μόριο, κατά την διάρκεια του χρόνου t, γιά τον οποίο η ενεργός τιμή της μετατόπισης είναι S_{rms} και $\overline{v}$ είναι η μέση μοριακή ταχύτητα. Στην απλή ανάλυση που χρησιμοποιούμε, θεωρούμε $\overline{v} \simeq v_{rms}$, όπου v_{rms}, σύμφωνα με τον νόμο των ιδανικών αερίων, εκφράζεται συναρτήσει της πίεσης P και της πυκνότητας ρ του αερίου

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \tag{5}$$

Η απόδειξη της εξίσωσης (5) αφήνεται σαν άσκηση στον φοιτητή. Αφού παρατηρηθεί η διάχυση μιας ουσίας (στην περίπτωσή μας ιωδίου στον αέρα), για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, η μέση απόσταση διάχυσης, που λαμβάνεται ίση με το μισό της ακτίνας διάχυσης, θα αντιστοιχεί στο S_{rms}, έτσι ώστε από την εξίσωση (4) μπορούμε να υπολογίσουμε το λ.

Αφού βρούμε τα λ και n, μπορούμε να υπολογίσουμε την διάμετρο d του μορίου από την εξίσωση (1) και D από την εξίσωση (2). Σύμφωνα με την υπόθεση του Avogardo, ο αριθμός N_0 του Avogardo, μπορεί να υπολογισθεί, αφού διαιρεθεί ο όγκος ενός γραμμομορίου του αερίου δια του D^3, που αντιπροσωπεύει τον όγκο ενός μορίου. Τέλος, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς Boltzmann, $k = R/N_0$, εφόσον το R μπορεί να μετρηθεί πειραματικά από τον νόμο των ιδανικών αερίων.

Πειραματικό μέρος

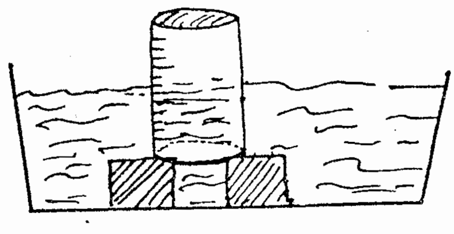
Α) Διάχυση ιωδίου. Γεμίζουμε με νερό ένα γυάλινο κυλινδρικό δοχείο Pyrex ύψους 15 cm και χωρητικότητας μισού λίτρου και θερμαίνουμε το νερό, μέχρις ότου αρχίσει να βράζει. Στη συνέχεια, ελαττώνουμε τον ρυθμό θέρμανσης, στο ελάχιστο που χρειάζεται για να διατηρείται ο βρασμός. Παίρνουμε ένα δοκιμαστικό σωλήνα μήκους 15 cm και σημειώνουμε την θέση των 10 cm από το κλειστό του άκρο. Το σημάδι μπορεί να είναι ένα λαστιχάκι ή ένα κομμάτι λεπτό μαλακό σύρμα τυλιγμένο και σφιγμένο στην θέση των 10 cm του δοκιμαστικού σωλήνα. Παίρνουμε έπειτα τον δοκιμαστικό σωλήνα και τον βάζουμε κατακόρυφα

[4]Η ενεργός τιμή, x_{rms}, ενός μεγέθους x, είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του αθροίσματος των τετραγώνων των τιμών του x, δηλαδή $x_{rms} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2/n)}$.

στο νερό που βράζει, με το κλειστό του άκρο προς τα κάτω, έτσι ώστε το μεγαλύτερο μέρος του να είναι στο νερό. Τον στερεώνουμε στην θέση αυτή με την βοήθεια ενός σφικτήρα. (**Προσοχή** να μην μπει νερό στο εσωτερικό του σωλήνα). Αφήνουμε να περάσουν μερικά λεπτά, ώστε ο σωλήνας να αποκτήσει την θερμοκρασία του νερού που βράζει. Στην συνέχεια, σημειώνοντας τον χρόνο, ρίχνουμε προσεκτικά στον πάτο του σωλήνα μερικούς κρυστάλλους ιωδίου, χρησιμοποιώντας γι' αυτό τον σκοπό μια μικρή λαβίδα. Κλείνουμε τον σωλήνα στεγανά μ' ένα ελαστικό πώμα και τον βυθίζουμε τελείως στο νερό που βράζει. (Τον κρατάμε στην θέση αυτή με την βοήθεια του σφικτήρα).

Σχεδόν αμέσως μετά την τοποθέτηση των κρυστάλλων στο σωλήνα, ιώδεις ατμοί αρχίζουν να διαχέονται προς τα επάνω. Μετά από ένα περίπου λεπτό και με τον φωτισμό του εργαστηρίου, βλέπουμε καθαρά διαφορετικές αποχρώσεις του ιώδους. Οταν το μέτωπο του 'ασθενούς ιώδους' φτάσει το σημάδι των 10 cm στο σωλήνα, όπως φαίνεται μέσω του νερού, σημειώνουμε και πάλι τον χρόνο. Ετσι μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέσο μήκος διάχυσης ίσο με 5 cm. Αυτό θα είναι σε πρώτη προσέγγιση, το μήκος διάχυσης του 'ημι-ιώδους' μετώπου.

Β) Εξάχνωση ξηρού πάγου. Για να βρούμε την μεταβολή του όγκου του ξηρού πάγου, όταν εξαχνώνεται χρησιμοποιούμε ένα μικρό κομμάτι 1–1.5 g. Για την συλλογή των ατμών (του ξηρού πάγου), χρησιμοποιούμε ένα βαθμολογημένο γυάλινο κύλινδρο χωρητικότητας ενός λίτρου. Στην αρχή του πειράματος, βάζουμε τον βαθμολογημένο κύλινδρο σε μια άλλη λεκάνη γεμάτη με νερό. Επειτα τον αναποδογυρίζουμε (ο πάτος προς τα πάνω) και τον τοποθετούμε σε δύο στηρίγματα (όπως φαίνεται στο σχήμα), έτσι ώστε τα 80 % του ύψους του να βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του νερού.



Ολες οι παραπάνω διεργασίες, πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε να μην παγιδευτεί αέρας στον κύλινδρο. Ζυγίζουμε μετά ένα μικρό κομμάτι ξηρού πάγου (σημειώστε την μάζα του) και τον βάζουμε γρήγορα κάτω από τον κύλινδρο, κρατώντας το στο νερό με το χέρι μας. (Δεν υπάρχει κίνδυνος να κάψετε τα δάκτυλά σας από τον ξηρό πάγο, εκτός εάν τον κρατήσετε πολύ σφικτά. Για μεγαλύτερη σιγουριά, μπορείτε να κρατήσετε τον ξηρό πάγο με ένα μικρό κομμάτι χαρτιού). Το κομματάκι του ξηρού πάγου, θα σηκωθεί μόνο του στη στήλη του νερού μέσα στον κύλινδρο και θα εξαερωθεί τελείως. Μόλις συμπληρωθεί η εξάχνωση, μετράμε τον όγκο του CO_2, που αντιστοιχεί σε πίεση ίση με την ατμοσφαιρική (πως επιτυγχάνεται αυτό;).

Ανάλυση

Με το πείραμα της διάχυσης του ιωδίου, υπολογίζεται η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων, με την βοήθεια της Εξίσωσης (4). Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να υπολογισθεί η ενεργός τιμή της μοριακής ταχύτητας του ιωδίου σε θερμοκρασία 100 °C. Από την εξίσωση (5), μπορεί να βρεθεί η ενεργός τιμή της μοριακής ταχύτητας του αέρα, v^a_{rms}, σε θερμοκρασία δωματίου. Για το ιώδιο, σε θερμοκρασία δωματίου, η ενεργός τιμή v_{rms} βρίσκεται από την σχέση

$$v^i_{rms} = v^a_{rms}(\frac{m_a}{m_i})^{1/2} \tag{6}$$

όπου m_a, είναι το μέσο μοριακό βάρος του αέρα και m_i το μοριακό βάρος του ιωδίου (πως καταλήγουμε στην Εξίσωση (6);). Αν η θερμοκρασία δωματίου είναι 25 °C, υπολογίστε την ενεργό τιμή της μοριακής ταχύτητας διάχυσης του ιωδίου στους 100 °C. Για τον υπολογισμό του λ, πρέπει επίσης να μετρηθεί ο χρόνος t, που χρειάζεται το αμυδρό μέτωπο της στήλης του ιωδίου να φτάσει το σημάδι των 10 cm στο σωλήνα. Υπολογίστε την τιμή του λ και το εκατοστιαίο ποσοστό του σχετικού σφάλματος.

Με το πείραμα της εξάχνωσης του ξηρού πάγου, μπορούμε να υπολογίσουμε την διάμετρο των μορίων και την μοριακή πυκνότητα (τον αριθμό μορίων ανά μονάδα όγκου) του ιωδίου. Οταν χρησιμοποιείται κύλινδρος, χωρητικότητας ενός λίτρου για την συλλογή του CO_2, η ποσότητα του πάγου δεν θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 1.5 g. Δίνεται ότι η πυκνότητα του ξηρού πάγου είναι 1.5 g/cm^3. Από τις μετρήσεις σας βρείτε τον λόγο $C = V_a/V_s$ και χρησιμοποιείστε την εξίσωση (3), για να υπολογίσετε την μοριακή διάμετρο και στη συνέχεια την μοριακή πυκνότητα του ιωδίου. Υπολογίστε επίσης το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα για τις δύο αυτές ποσότητες. Τέλος, ξέροντας ότι ο όγκος ενός γραμμομορίου (1 mole) σε θερμοκρασία δωματίου είναι 24 liters, μπορείτε να υπολογίσετε τον αριθμό N_0 του Avogadro και στην συνέχεια την σταθερά k του Boltzmann. Συγκρίνετε τις δύο τιμές με τις γνωστές τιμές των σταθερών, που μπορείτε να τις πάρετε από ένα πίνακα φυσικών σταθερών και βρείτε την εκατοστιαία διαφορά.

Συμπληρωματική ερώτηση. Είναι γνωστό, ότι οι ταχύτητες ενός μεγάλου αριθμού μορίων ενός αερίου, υπακούουν στην κατανομή Maxwell, η οποία γράφεται

$$n_v = cv^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

όπου m είναι η μάζα του μορίου, T η θερμοκρασία του αερίου, k η σταθερά Boltzmann, v το μέτρο της ταχύτητας των μορίων που μπορεί να παίρνει τιμές από 0 έως ∞ και c είναι σταθερά. Η διεύθυνση της ταχύτητας δεν ενδιαφέρει εδώ, γιατί θεωρείται εντελώς τυχαία.

Η παραπάνω κατανομή μας λέει ότι $n(v)dv$ είναι ο αριθμός των μορίων, που έχουν ταχύτητες μεταξύ v και $v + dv$. Σύμφωνα με αυτό λοιπόν πρέπει να ισχύει

$$\int_0^\infty n(v)dv = n$$

όπου n είναι ο συνολικός αριθμός των μορίων του αερίου.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, υπολογίστε την σταθερά c. Επίσης, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$\overline{v} = \frac{\int_0^\infty n(v)dv}{n}, \quad \text{και} \quad \overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty n(v)v^2dv}{n}$$

υπολογίστε τις τιμές της μέσης ταχύτητας $\overline{v}$ και της ενεργού ταχύτητας $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$ των μορίων συναρτήσει των παραμέτρων m και T και βρείτε την εκατοστιαία διαφορά. (Σημείωση: Χρησιμοποιείστε πίνακες ολοκληρωμάτων).